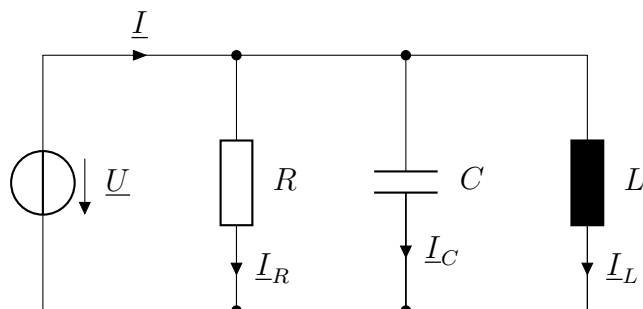


Aufgabe 21: *Schwingkreis parallel*



Bei nebenstehender Parallelschaltung von R , C und L handelt es sich um einen Schwingkreis.

Zahlenwerte:

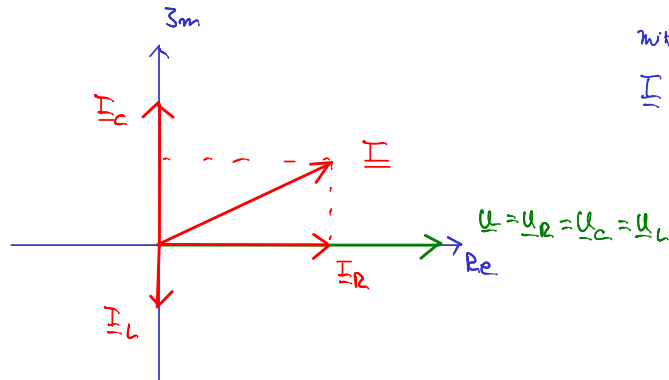
$R = 100 \, \Omega$, $C = 20 \, \mu\text{F}$, $L = 0.5 \, \text{H}$, $U = 100 \, \text{V}$

- 21.1** Skizzieren Sie qualitativ das Zeigerdiagramm mit allen Strömen und Spannungen.
- 21.2** Geben Sie die Ersatzadmittanz allgemein (ohne Zahlenwerte) an. Gegeben Sie damit den Effektivwert des Stroms $\underline{I}$ an.
- 21.3** Skizzieren Sie $I(\omega)$. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_r , indem Sie I minimieren. ($\omega_r = 316.2 \, \text{Hz}$ oder $f_r = 50.3 \, \text{Hz}$)
- 21.4** Bestimmen Sie die Effektivwerte I_R , I_C und I_L in Abhängigkeit von der Frequenz ω . Zeichnen Sie diese in die Skizze aus **3.** ein. Geben Sie die Effektivwerte bei der Resonanzfrequenz an.
($I_R = 1 \, \text{A}$, $I_C = I_L = 0.63 \, \text{A}$)
Müssen diese immer kleiner als I sein?

Lösung

① Zeigendiagramm

Es kann nur qualitativ gezeichnet werden, da die Frequenz nicht bekannt ist



mit Überlagerung:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L$$

② Ersatz admittanz:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$$

$$= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Somit gilt für Strom:

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \quad \text{bzw. für die Beträge folgt}$$

$$I = Y \cdot U \quad \rightarrow$$

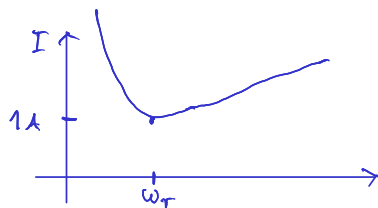
$$I = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot U$$

③ Resonanzfrequenz

I wird extremal (hier minimal), wenn $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$

$$\rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \underline{\underline{316,2 \text{ Hz}}}$$

ergibt $I = 1 \text{ A}$



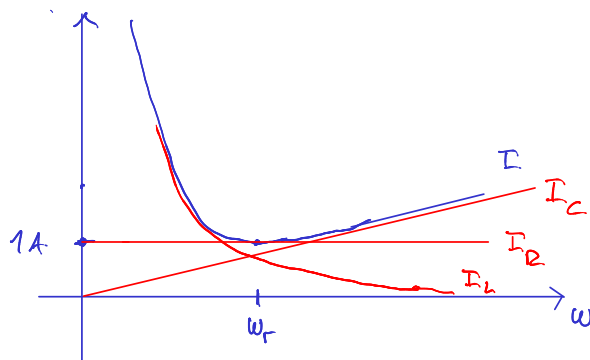
Man nehme ein Grafikprogramm

④ Effektivwerte

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_R} = \frac{\underline{U}}{R} \quad \leadsto \quad I_R = \frac{U}{R}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C}} \quad \leadsto \quad I_C = \omega C \cdot U$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}}{j\omega L} \quad \leadsto \quad I_L = \frac{1}{\omega L} U$$



Bei ω_r : $I_R = 1A$ $I_C = I_L = 0.63A$

- I_R ist immer I bei ω_r
- $I_C = I_L$ gilt immer, aber diese können auch größer als I sein.
Bsp.: Setze $C = 40\mu F$ und $L = 0.25H$

$\leadsto$ gleiches ω_r wie oben $\leadsto$ bei ω_r : $I = 1A$

aber $I_C = I_L = \underline{1.26A} > I$

Aufgabe 22: *Blindleistungskompensation / Schwingkreis*

Die Schaltung aus Aufgabe 19 stellt einen Schwingkreis dar.

22.1 Bestimmen Sie die Admittanz $\underline{Y}$ bestehend aus C , R und L allgemein (Real- und Imaginärteil).

22.2 Geben Sie ganz allgemein die Scheinleistung der Quelle an.

22.3 Bestimmen Sie $|\underline{I}|$. Wie verhält sich $|\underline{I}|$ in Abhängigkeit von C ?

22.4 Wie muss nun die Kapazität C gewählt werden (mit den restlichen Zahlenwerten aus Aufgabe 19), so dass keine Blindleistung abfällt? ($C = 31 \mu F$)

22.5 Ist für diesen Fall die Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ die Resonanzfrequenz?

(*nein, wenn Sie Lust haben berechnen Sie diese numerisch $f_{\text{Resonanz}} = 62 \text{ Hz}$*)

Lösung

① Admittanz:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(R + j\omega L)j\omega C + 1}{R + j\omega L} \\
 &= \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} (1 - \omega^2 LC + j\omega RC) \cdot (R - j\omega L) \\
 &= \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} (R - \omega^2 RLC + \omega^2 RLC + j(\omega RC^2 - \omega L + \omega^3 CL^2)) \\
 &= \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} (R + j\omega(R^2 C - L + \omega^2 CL^2))
 \end{aligned}$$

② Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot \underline{U}^* \cdot \underline{Y}^* = |\underline{U}|^2 \cdot \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} (R - j\omega(R^2 C - L + \omega^2 CL^2)) \quad (1)$$

③ $|\underline{I}|$

$$\text{Mit } \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

$$\text{folgt } |\underline{I}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{I}) + \operatorname{Im}^2(\underline{I})} = \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{R^2 + \omega^2 (R^2 C - L + \omega^2 CL^2)^2} |\underline{U}|$$

Durch C kann $|\underline{I}|$ geändert werden.

Es gilt ein Minimum

$$\begin{aligned}
 \left(\text{Dieses folgt aus } \frac{d|\underline{I}|}{dC} = 0 \quad \leadsto \quad 2\omega^2 \underbrace{(R^2 C - L + \omega^2 CL^2)}_{\stackrel{!}{=} 0} \cdot (R^2 + \omega^2 L^2) = 0 \right. \\
 \left. \quad \leadsto C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)
 \end{aligned}$$

④ $Q = 0$ ($\operatorname{Im}(\underline{S}) = 0$)

$$\xrightarrow{\text{aus (1)}} R^2 C - L + \omega^2 CL^2 = 0 \quad \leadsto C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \underline{31 \mu F}$$

(dies entspricht minimalem $|\underline{I}|$ bei $f = 50 \text{ Hz}$)

⑤ $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$ ist nicht die Resonanzfrequenz!

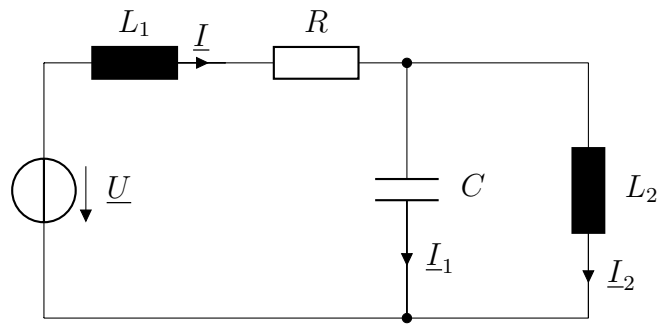
Diese ergibt sich aus

$$\frac{d|T|}{d\omega} = 0 \quad \text{und ist schwierig zu berechnen}$$

Man findet numerisch $\omega_r \approx 390 \text{ Hz}$ $f_r = 62 \text{ Hz}$

Aufgabe 23: *Schwingkreis*

Nebenstehende Schaltung ist ein Schwingkreis bestehend aus zwei Induktivitäten und einer Kapazität.



23.1 Bestimmen Sie die Ersatzimpedanz $\underline{Z}$ bestehend aus allen Bauteilen allgemein (Real- und Imaginärteil).

23.2 Bestimmen Sie den Strom $\underline{I}$ (diesen müssen Sie nicht als Real- + Imaginärteil angeben) und berechnen Sie den Betrag des Stromes.

23.3 Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz (hier gesucht: Strom maximal).

Jetzt sind folgende Daten gegeben: $\underline{U} = 50 \text{ V exp}(j\omega t)$, $C = 50 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$, $L_1 = 50 \text{ mH}$, $L_2 = 200 \text{ mH}$

23.4 Geben Sie die Resonanzfrequenz für diese Zahlenwerte an. Welcher Strom fließt dann? ($\omega_0 = 707 \text{ Hz}$, $|\underline{I}| = 0.5 \text{ A}$)

23.5 Bestimmen Sie für die Frequenz $\omega = 350 \text{ Hz}$ und mit obigen Zahlenwerte die Gesamtimpedanz, die Ströme $\underline{I}$, $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ sowie deren Beträge. Geben Sie die Scheinleistung der Quelle an. ($\underline{Z} = (100 - 294j) \Omega$, $|\underline{I}| = 161 \text{ mA}$, $|\underline{I}_1| = 878 \text{ mA}$, $|\underline{I}_2| = 716 \text{ mA}$)

23.6 Was geschieht bei $\omega = 316 \text{ Hz}$?

Lösung

① Ersatzimpedanz

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{L_1} + \underline{Z}_R + \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_{L_2}}} = j\omega L_1 + R + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L_2}}$$

$$= R + j\omega L_1 + \frac{j}{-\omega C + \frac{1}{\omega L_2}} = R + j\left(\omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}\right)$$

② Strom:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{1}{\left(R + j\left(\omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}\right)\right)}$$

③ $|\underline{I}| = |\underline{U}| \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}\right)^2}}$

Gesucht ist die Frequenz, für welche $|\underline{I}|$ extremal wird
hier maximal

D.h. hier, dass der Nenner minimal wird. Dies geschieht
für

$$\omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C} = 0$$

$$L_1(1 - \omega^2 L_2 C) + L_2 = 0$$

$$L_1 + L_2 = \omega^2 L_1 L_2 C$$

→

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

④ Zahlenwerte:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{0,05 + 0,2}{0,05 \cdot 0,2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} \cdot \frac{1}{15} = \underline{\underline{707 \text{ Hz}}}$$

$$|\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{R} = \underline{\underline{0,5 \text{ A}}}$$

⑤ $\omega = 350 \text{ Hz}$

$$\underline{Z} = (100 - j \cdot 234) \Omega$$

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = (52 + j \cdot 152) \text{ mA} \quad |\underline{I}| = 161 \text{ mA}$$

Stromteiler:

$$\underline{I}_1 = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}} = (283 + j \cdot 830) \text{ mA} \quad |\underline{I}_1| = 878 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1 = (-231 - j \cdot 678) \text{ mA} \quad |\underline{I}_2| = 716 \text{ mA}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (2,6 - j \cdot 7,6) \text{ VA}$$

- ⑥ Resonanz der Teilschaltung bestehend aus C und L_2
(keine Dämpfung durch ohmschen Widerstand vorhanden)

also gilt

$$\omega_{\text{Resonanz}} = \sqrt{\frac{1}{C L_2}} = \underline{\underline{316 \text{ Hz}}}$$