

Einführung in die Elektrotechnik

Gleichstrom- und Wechselstromnetzwerke, Nichtlineare Bauteile, Maschinen

Quellen:

- Vorlesungsskript *Einführung in die Elektrotechnik Teil I+II* (13. Auflage, Stuttgart 2018) von Prof. Dr.-Ing. N. Parspour (Institut für Elektrische Energieumwandlung, Uni Stuttgart)
- Vorlesungsskript *Grundlagen der Elektrotechnik* (Stuttgart 2018) von Dr. Dominic Merkt (Mint-Kolleg Baden-Württemberg)

Veranstaltung:

- Sommersemester 2019
- Vorlesung (2SWS): Dr. Frank Schweiner

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Elektrotechnik	1
1.1 Strom und Spannung	1
1.2 Ohmsches Gesetz	1
1.3 Gleichstromkreise	2
1.3.1 Zählpeilsysteme	2
1.3.2 Knoten, Zweige, Maschen	3
1.3.3 Zweipol	3
1.4 Kirchhoffsche Regeln	3
1.4.1 Beispiele	4
1.4.2 Schalter	7
1.5 Leistung	8
1.5.1 Beispiele	8
1.6 Reale Spannungsquelle	10
1.6.1 Arbeitsgerade	10
1.6.2 Beispiel	11
2 Lineare Gleichstromnetzwerke	13
2.1 Schaltung von Widerständen	13
2.1.1 Serien-/Reihenschaltung	13
2.1.2 Parallelschaltung	14
2.1.3 Stromteiler	14
2.1.4 Spannungsteiler	15
2.1.5 Beispiele	16
2.2 Überlagerungssatz	17
2.2.1 Allgemein	17
2.2.2 Beispiel	18
2.3 Ersatzspannungsquelle	19
2.3.1 Grundidee	19
2.3.2 Allgemein	19
2.3.3 Beispiel	20
2.4 Ersatzstromquelle	22
2.5 Beispiel (alte Klausuraufgabe)	22

3	Kondensatoren und Spulen	24
3.1	Kondensatoren	24
3.2	Spulen	24
3.3	Diskussion für Gleichstrom	25
3.4	Ein- und Ausschaltvorgänge	26
3.4.1	Kondensator	26
3.4.2	Spule	29
3.4.3	Nachtrag zu DGLs	30
4	Wechselspannung reell	32
4.1	Bauteile	32
4.1.1	Widerstand	33
4.1.2	Kondensator	33
4.1.3	Spule	34
4.1.4	Merkregel	35
4.2	Zeigerdarstellung	35
4.2.1	Kirchhoffsche Regeln	36
4.2.2	Winkel	36
4.2.3	Beispiele	36
4.3	Leistung	41
4.3.1	Beispiel	42
4.4	Schaltungen von Kondensatoren und Spulen	44
4.4.1	Serien-/Reihenschaltung	44
4.4.2	Parallelschaltung	45
5	Wechselspannung komplex	47
5.1	Einschub: komplexe Zahlen	47
5.1.1	Beispiele	48
5.2	Komplexe Darstellung von Wechselgrößen	51
5.2.1	Zusammenhang mit reellen Größen	51
5.3	Komplexer Scheinwiderstand	52
5.3.1	Blindwiderstand	52

5.3.2	Ohmscher Widerstand	52
5.3.3	Kapazität	53
5.3.4	Induktivität	53
5.4	Kirchhoffsche Regeln	53
5.4.1	Für Gleichstrom	53
5.4.2	Für Wechselstrom mit $\omega = \text{konst.}$	54
5.4.3	Stromteiler- und Spannungsteilerregel	54
5.4.4	Reihen- und Parallelschaltung	54
5.5	Beispiele	54
5.5.1	Reihenschaltung	54
5.5.2	Parallelschaltung	56
5.6	Leistung	57
5.7	Ausführliche Beispiele	57
5.7.1	Beispiel 1	58
5.7.2	Beispiel 2	60
5.7.3	Beispiel 3	61
5.8	Brückenschaltung	66
5.9	Schwingkreise	67
5.9.1	Reihenschwingkreis	67
5.9.2	Parallelschwingkreis	71
6	Nichtlineare Bauteile	73
6.1	Statischer / Differentieller Widerstand	74
6.2	Arbeitspunkt und Arbeitsgerade	74
6.2.1	Beispiel	76
7	Halbleiter	78
7.1	Überblick	78
7.2	Dotierung	78

8	Dioden	80
8.1	Kennlinienfeld	81
8.2	Ideale Diode	82
8.2.1	Beispiel	83
8.3	Reale Diode	86
8.3.1	Beispiel	87
8.4	Zenerdioden	89
8.4.1	Zenerdiode bei Last	90
8.4.2	Verschiebung des Arbeitspunktes	91
9	Transistoren	93
9.1	Kennlinienfeld	94
9.2	Linearisiertes Gleichstrom-ESB	94
9.3	Linearisiertes Wechselstrom-ESB	95
9.4	Beispiel	96
9.5	Beispiel	100
10	Operationsverstärker	105
10.1	Einstufiger Wechselstromverstärker	105
10.2	Operationsverstärker	105
10.2.1	Open-Loop-Betrieb	106
10.2.2	Idealer Operationsverstärker	106
10.3	Komparator	107
10.3.1	Beispiel	108
10.4	OP mit Rückkopplung	109
10.4.1	Invertierender Integrierer	109
10.4.2	Andere Schaltungen mit Gegenkopplung	113
10.5	Beispiel	114

11 Gleichstrommaschine	116
11.1 Vorbemerkung: Elektromagnetismus	116
11.2 Gleichstrommaschine	117
11.3 Betriebsarten	118
11.4 ESB des Ankers	118
11.5 Magnetfelderzeugung	119
11.6 Kennlinie	120
11.7 Drehzahlstellverfahren	120
11.8 Leistungsfluss	121
11.9 Wirkungsgrad	121
11.10 Beispiel: Fremderregte GM als Motor	122
11.11 Stabilität des Arbeitspunktes	123
12 Asynchronmaschine	125
12.1 Kennlinie	125
12.2 Leistungsfluss	126

1 Grundlagen der Elektrotechnik

1.1 Strom und Spannung

- Strom:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}} \quad \left(\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \right) \quad (\text{Ampere}) \quad (1)$$

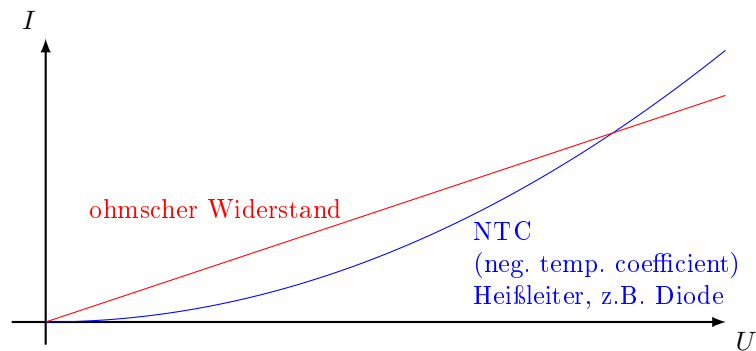
- Spannung:

$$U = \frac{dW}{dQ} \quad [U] = \text{V} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3} \quad \left(\frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}} \right) \quad (\text{Volt}) \quad (2)$$

- Zeitabhängige Größen werden meist mit Kleinbuchstaben $i(t)$, $u(t)$ bezeichnet.

1.2 Ohmsches Gesetz

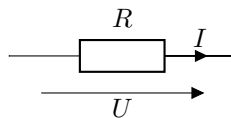
- Fließt durch ein Bauteil ein Strom I , dann fällt an diesem eine Spannung U ab. Dies kann man messen:



- Dies nennt man ein Kennlinienfeld.
- Am Bauteil ohmscher Widerstand gilt das ohmsche Gesetz (linearer reeller Zusammenhang):

$$U = RI \quad [R] = \Omega \quad R = \text{konst.} \quad (3)$$

- Schaltsymbol:

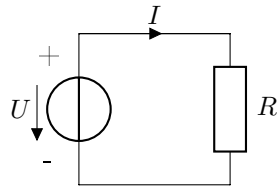


1.3 Gleichstromkreise

- Der Gleichstromkreis enthält Spannungsquellen und Verbraucher.
- Außerdem können Schalter, Schutzeinrichtungen, Messinstrumente etc. in Gleichstromkreisen enthalten sein.

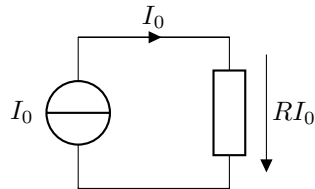
1.3.1 Zählfeilsysteme

- Spannungsquelle



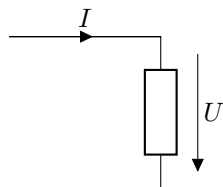
- Spannungspfeil von + nach –
- Strompfeil ist in Richtung positiver Ladungsträger (technische Stromrichtung)

- Stromquelle



- Strompfeil ist in Richtung positiver Ladungsträger (technische Stromrichtung)
- Strom ist fest vorgegeben (kein reales Bauteil)

- Widerstand



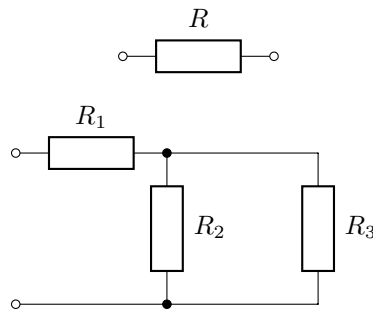
- Am Widerstand haben Strom- und Spannungspfeil gleiche Richtung
- Ansonsten ist Spannungspfeil frei wählbar
- Liefert die Rechnung negative Werte für U oder I , dann ist die Richtung verkehrt → nochmal richtigerum zeichnen.

1.3.2 Knoten, Zweige, Maschen

- Knoten:
 - Verzweigungsstelle, an der mindestens drei Ströme zu- bzw. abfließen.
- Zweig:
 - Verbindung zwischen zwei Knoten.
- Masche:
 - Geschlossener Pfad im Netzwerk, der sich nicht selbst schneidet, d.h. bei dem jeder Knoten nur ein einziges Mal durchlaufen wird.

1.3.3 Zweipol

- Ein Bauteil mit einem Eingang und einem Ausgang heißt Zweipol
 - Beispiele:

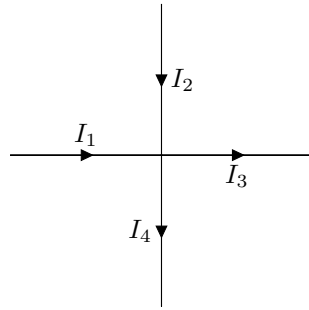


- weitere Beispiele: Spule, Kondensator, ...
- keine Zweipole sind: Transistor, Operationsverstärker, ...

1.4 Kirchhoffsche Regeln

- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)
 - Die Summe der ein- und auslaufenden Ströme an einem Knoten sind Null:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (4)$$

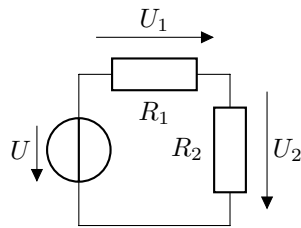


- abfließende Ströme gehen negativ ein
- hier $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$

- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

- Die Summe der Spannungen in einer Masche ist Null:

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad (5)$$



- wähle Umlaufrichtung willkürlich
- hier $U - U_1 - U_2 = 0$

- Wie viele Knoten- und Maschengleichungen gibt es?

- Es gilt für k Knoten und z Zweige:

- * Unabhängige Knotengleichungen:

$$K = k - 1 \quad (6)$$

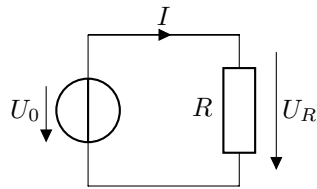
- * Unabhängige Maschengleichungen:

$$M = z - (k - 1) \quad (7)$$

- Mithilfe der Grundgleichungen an den Bauteilen (z.B. $U = RI$) kann dann das lineare Gleichungssystem eindeutig gelöst werden.
- Das LGS kann immer in der Form $A\vec{I} = \vec{b}$ bzw. $A\vec{U} = \vec{b}$ angegeben werden.

1.4.1 Beispiele

Beispiel



- Gegeben:

$$U_0 = 12\text{V}$$

$$R = 48\Omega$$

- Gesucht: I

- Es ist

$$k = 0, z = 1 \rightarrow K = 0, M = 1$$

- Maschengleichung:

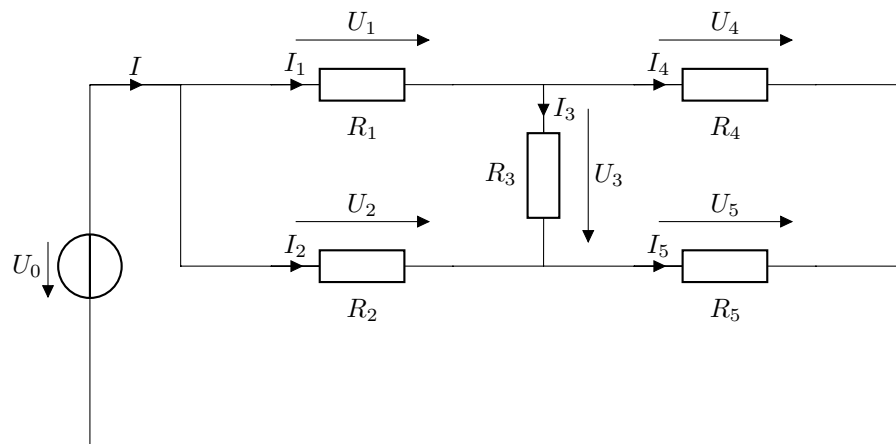
$$U_0 - U_R = 0$$

$$U_R = U_0 = 12\text{V}$$

- Ohmsches Gesetz:

$$I = \frac{U_R}{R} = 0.25\text{A}$$

Beispiel



- Gegeben

$$U_0 = 120\text{V}$$

$$R_2 = R_4 = R = 30\Omega$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 2R = 60\Omega$$

- Gesucht: Ströme (oder Spannungen)

- Es ist

$$k = 4, z = 6 \rightarrow K = 3, M = 3$$

- Maschenregel:

$$U_0 = U_2 + U_5 \quad (1)$$

$$U_2 = U_1 + U_3 \quad (2)$$

$$U_4 = U_3 + U_5 \quad (3)$$

- Knotenregel:

$$I = I_1 + I_2 \quad (4)$$

$$I_1 = I_3 + I_4 \quad (5)$$

$$I = I_4 + I_5 \quad (6)$$

- Lösung:

- (2) – (3):

$$U_2 - U_4 = U_1 - U_5$$

$$RI_2 - RI_4 = 2RI_1 - 2RI_5$$

$$I_2 - I_4 = 2I_1 - 2I_5$$

- (4) – (6):

$$I_2 - I_4 = I_5 - I_1$$

- Gleichsetzen liefert:

$$I_5 = I_1 \quad (1')$$

$$I_4 = I_2 \quad (2')$$

- aus (5) mit (2')

$$I_3 = I_1 - I_2 \quad (3')$$

- In (2)

$$I_2 = 2I_1 + 2(I_1 - I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{4}{3}I_1 \quad (4')$$

- (1) mit (1') und (4')

$$U_0 = R\frac{4}{3}I_1 + 2RI_1 = \frac{10}{3}RI_1$$

$$I_1 = 1.2\text{A}$$

- In (4')

$$I_2 = 1.6\text{A}$$

- In (3')

$$I_3 = -0.4\text{A}$$

- Strom- und Spannungspfeil an von R_3 umkehren!

- Aus (4)

$$I = 2.8\text{A}$$

- Und mit (1') und (2')

$$I_5 = 1.2\text{A}$$

$$I_4 = 1.6\text{A}$$

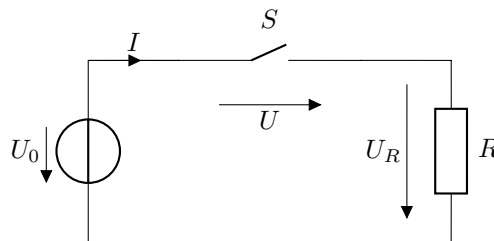
- Aus den Gleichungen (1) bis (6) und den Grundgleichungen an den Widerständen könnte man das LGS auch in der Form $A\vec{I} = \vec{b}$ angeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ R_1 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Am Schnellsten kann man dies mit MATLAB oder MAPLE lösen.

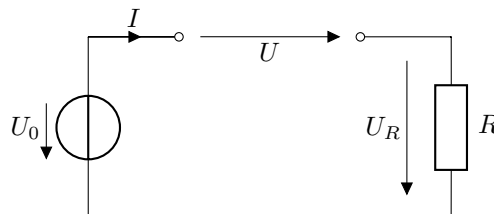
1.4.2 Schalter

- Der Schalter ist ein Zweipol mit genau zwei Einstellungsmöglichkeiten: offen oder geschlossen



Beispiel 1

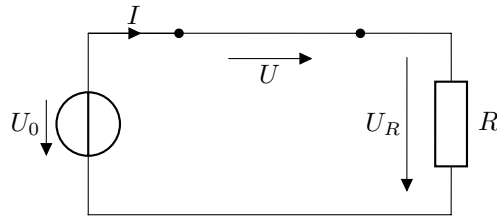
- Geöffneter Schalter ist Unterbrecher



- Im entsprechenden Zweig fließt kein Strom: $I = 0$
- Außerdem ist $U \neq 0$ (hier: $U_0 = U + U_R = U + RI = U$)

Beispiel 2

- Geschlossener Schalter ist „Kurzschluss“



- Am Schalter fällt keine Spannung ab: $U = 0$
- Außerdem ist $I \neq 0$ (hier: $U_0 = U + U_R = U_R = RI$, also $I = U_0/R$)

1.5 Leistung

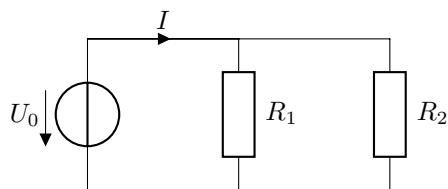
- Ist als Arbeit (Energie) pro Zeit definiert.
- Mit $U = \frac{dW}{dQ}$ und $I = \frac{dQ}{dt}$ folgt

$$P = \frac{dW}{dt} = UI \quad [P] = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} \quad (\text{Watt}) \quad (8)$$

- Das gilt immer - insbesondere auch für die momentane Leistung bei Wechselstrom.
- Summe aller Leistungen ergibt Leistung der Quelle (siehe nachfolgende Beispiele)

1.5.1 Beispiele

Beispiel 1 - Parallelschaltung



- Gegeben:

$$R_1 = 1\text{k}\Omega$$

$$R_2 = 3\text{k}\Omega$$

- Gesucht: Welche Leistung muss die Quelle bringen bei $U_0 = 600\text{V}$?
- Einfache Alternative:

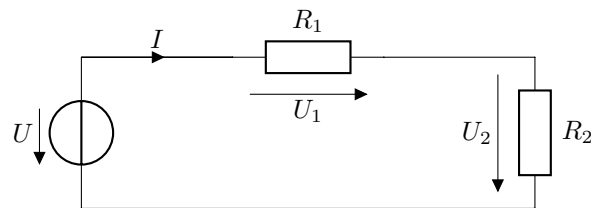
$$I = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_0 = 0.8\text{A}$$

$$P = U_0 I = 480\text{W}$$

- Umständliche Alternative:

$$P = U_1 I_1 + U_2 I_2 = U_0 (I_1 + I_2) = U_0 \left(\frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} \right) = 480\text{W}$$

Beispiel 2 - Reihenschaltung



- Gegeben:

$$R_1 = 1\text{k}\Omega$$

$$R_2 = 3\text{k}\Omega$$

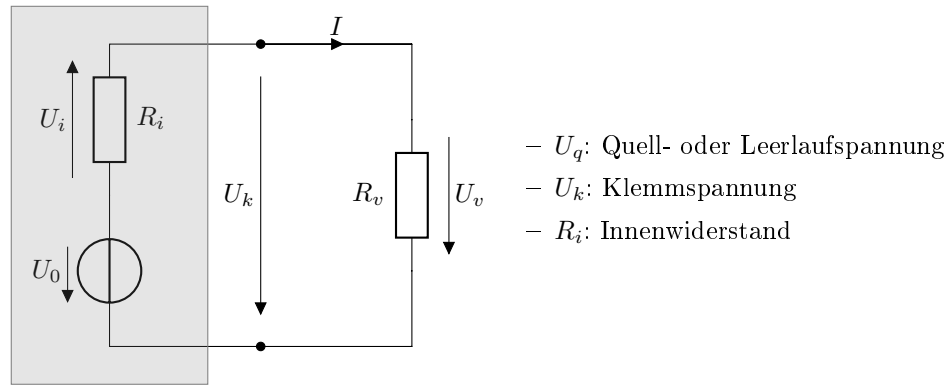
- Frage: Welche Leistung muss die Quelle bringen bei $U_0 = 600\text{V}$?
- Einfache Alternative:

$$I = \frac{1}{R_1 + R_2} U_0 = 0.15\text{A}$$

$$P = U_0 I = 90\text{W}$$

1.6 Reale Spannungsquelle

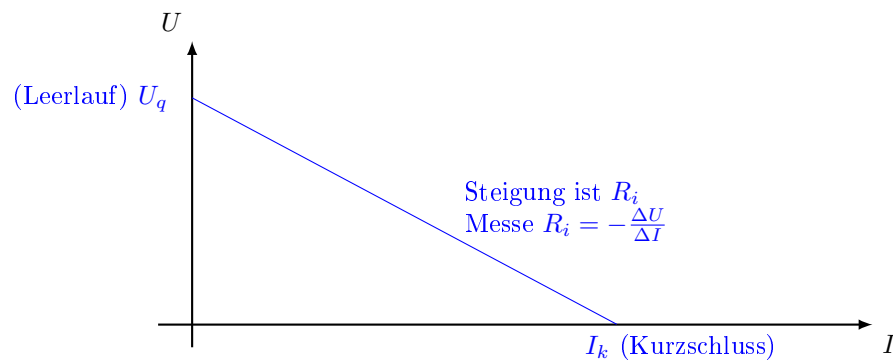
- Bei realen Spannungsquellen hängt die Spannung vom fließenden Strom ab. Wir berücksichtigen dies mit einem Innenwiderstand R_i



1.6.1 Arbeitsgerade

- Klemmspannung / Arbeitsgerade der realen Spannungsquelle (mit MR):

$$U_k = U_q - IR_i \quad (9)$$



- Die Arbeitsgerade ist völlig unabhängig von der Schaltung auf Verbraucherseite
- Bestimmung der Arbeitsgeraden:
 - Leerlauf ($R_v \rightarrow \infty$, dann fließt kein Strom)

$$U_L = U_k = U_q \text{ (Leerlaufspannung)}$$

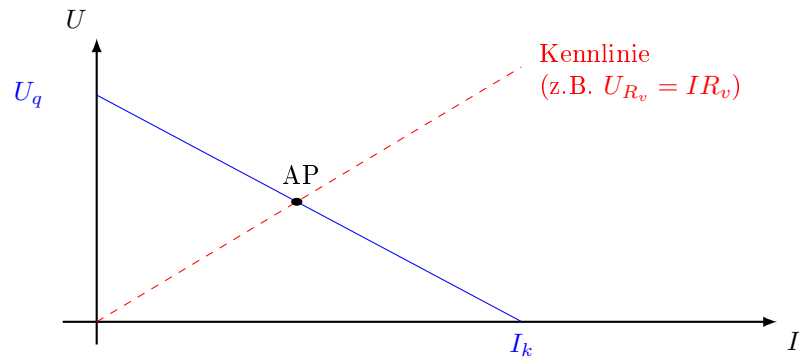
- Kurzschluss ($R_v = 0$)

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} \text{ (Kurzschlussstrom)}$$

– Innenwiderstand

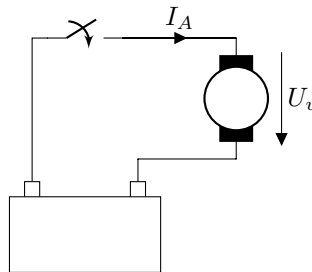
$$R_i = \frac{U_L}{I_k} \quad (10)$$

- Anmerkung: Dies liefert auch den Arbeitspunkt für ein Bauteil

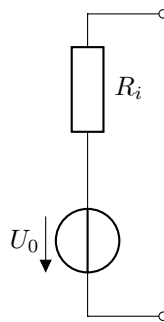


1.6.2 Beispiel

- Betrachte Bleiakkumulator mit $U_q = 12\text{V}$ und $I_k = 360\text{A}$.



- Ersatzschaltbild für die Batterie:



1. Berechne R_i

$$R_i = \frac{U_q}{I_k} = \frac{1}{30} \Omega$$

2. Jetzt fließe ein Strom $I_A = 100\text{A}$. Berechne U_v

$$\begin{aligned}U_q - R_i I_A - U_v &= 0 \\U_v &= 8.7\text{V}\end{aligned}$$

3. Leistung Verbraucher

$$P_A = I_A U_V = 870\text{W}$$

4. Leistung gesamt

$$P = I_A U_q = 1200\text{W}$$

5. Falls $I_A = 200\text{A}$ beträgt, ist

$$\begin{aligned}U_v &= 5.3\text{V} \\P_A &= 1060\text{W} \\P &= 2400\text{W}\end{aligned}$$

Die Leistung verdoppelt sich also nicht, wenn man I_A verdoppelt.

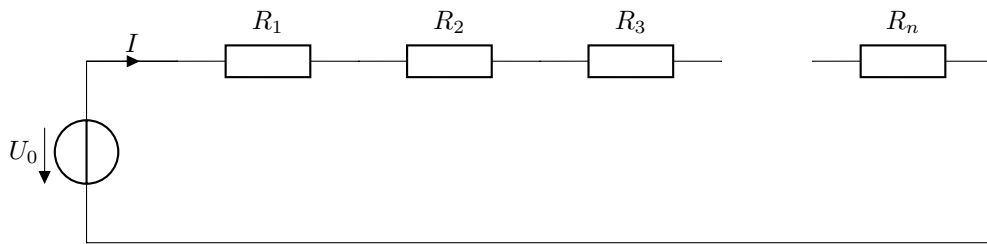
2 Lineare Gleichstromnetzwerke

- Analyse von Gleichstromnetzwerken
 - Verwende Knoten- und Maschenregel
 - Verwende Regeln für Widerstände, C , L
- Aber: Alle linearen Gleichungen aufstellen ist oft zu aufwendig
- Deshalb Abkürzungen nehmen:
 - Strom- und Spannungsteilerregel
 - Überlagerungssatz
 - Ersatzspannungsquelle
- Falls Zahlenwerte gegeben sind: Sofort Zahlenwerte einsetzen

W
W
W
W

2.1 Schaltung von Widerständen

2.1.1 Serien-/Reihenschaltung



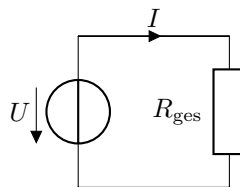
- Maschenregel:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) I = R_{\text{ges}} I$$

- Also:

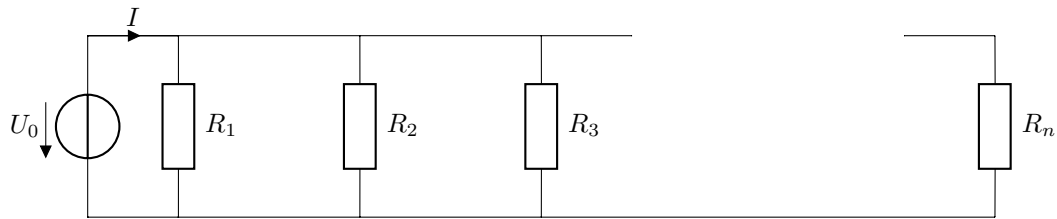
$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (11)$$

- Ersatzschaltbild:



- Ersatzwiderstand ist immer größer als die einzelnen Widerstände

2.1.2 Parallelschaltung



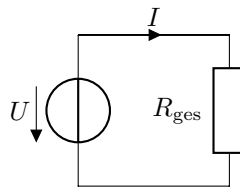
- Knotenregel:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) U = \frac{1}{R_{\text{ges}}} U$$

- Also:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (12)$$

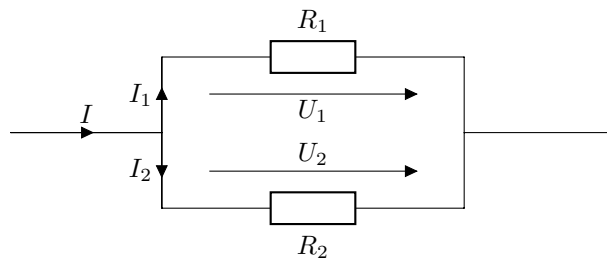
- Ersatzschaltbild:



- Ersatzwiderstand ist immer kleiner als der kleinste der einzelnen Widerstände
- Spezialfall für $n = 2$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

2.1.3 Stromteiler



- Maschenregel:

$$U = U_1 = U_2$$

- Knotenregel:

$$I = I_1 + I_2$$

- Damit:

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U = \frac{1}{R_{\text{ges}}} U$$

- Stromteilerformeln:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (14)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (15)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (16)$$

- Sonderfälle:

- $R_2 \rightarrow 0$ (wirkt als Kurzschluss)

$$I_1 = 0, \quad I_2 = I$$

W

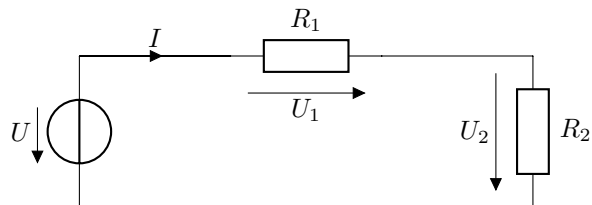
- $R_2 \rightarrow \infty$ (wirkt als Unterbrecher)

$$I_1 = I, \quad I_2 = 0$$

W

- Strom nimmt Weg des geringsten Widerstandes

2.1.4 Spannungsteiler



- Maschenregel:

$$U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I$$

- Spannungsteilerformeln:

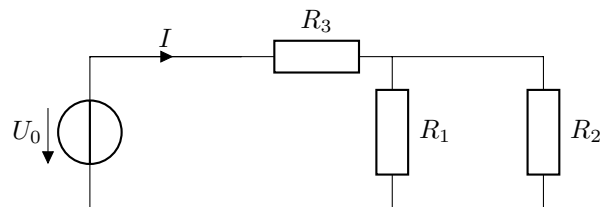
$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (17)$$

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (18)$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (19)$$

2.1.5 Beispiele

Beispiel 1



- Gegeben:

$$U_0 = 12\text{V}$$

$$R_1 = 30\Omega$$

$$R_2 = 60\Omega$$

$$R_3 = 28\Omega$$

- Gesucht: I_1, I_2

- Rechnung:

- Ersatzwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 48\Omega$$

- Falls Zahlenwerte gegeben sind: Sofort Zahlenwerte einsetzen und nicht mit

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

weiterrechnen

W

- Strom I

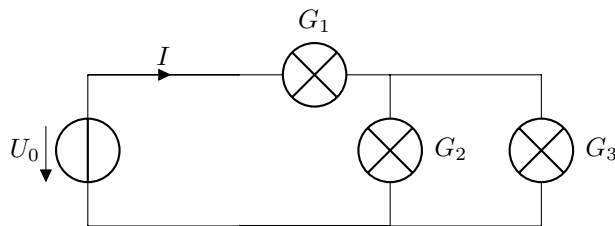
$$I = \frac{U_0}{R_{\text{ges}}} = 0.25 \text{ A}$$

- Stromteiler:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{1}{6} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = I - I_1 = \frac{1}{12} \text{ A}$$

Beispiel 2



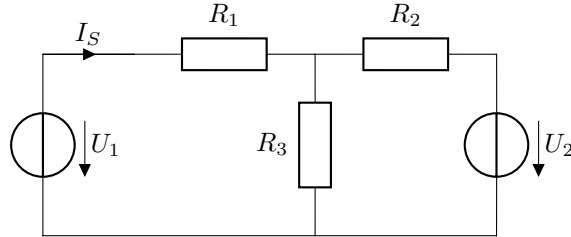
- Gegeben: Drei baugleiche Glühlampen
- Frage: Welche leuchtet am hellsten?
- G_2 und G_3 leuchten gleich hell (gleiche Spannung, gleicher Strom)
- G_1 leuchtet heller:
 - R_{ges} aus $G_2 \parallel G_3$ ist kleiner als R
 - Damit ist $U_1 > U_2 = U_3$
 - Außerdem gilt $I_1 = I_2 + I_3 > I_2 = I_3$
 - Somit $P_1 > P_2 = P_3$

2.2 Überlagerungssatz

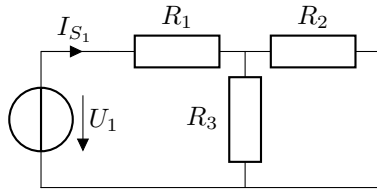
2.2.1 Allgemein

1. Auswahl einer Spannungs- oder Stromquelle
2. Kurzschließen aller anderen Spannungsquellen und auftrennen aller anderen Stromquellen
3. Gewünschte Größe in diesem Netzwerk bestimmen
4. Wiederholung von 1. bis 3. für andere Spannungs- und Stromquellen
5. Addition (Überlagerung) der Lösungen aus 3. ergibt die Lösung.

2.2.2 Beispiel



- Gesucht: I_S
- Aufteilen in zwei Netzwerke:



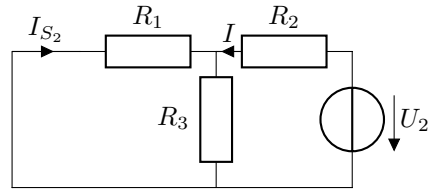
- Ersatzwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

- Stromstärke:

$$I_{S1} = \frac{U_1}{R_{\text{ges}}}$$

$$I_{S1} = \frac{(R_2 + R_3)U_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$



- Berechne I , dann Stromteiler:

$$R_{\text{ges}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I = \frac{(R_1 + R_3)U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$I_{S2} = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} I$$

- alternativ mit Spannungsteiler (Vorzeichen beachten!)

$$I_{S2} = -\frac{U_{R_1}}{R_1} = -\frac{U_{R_3}}{R_1}$$

und

$$U_{R_3} = \frac{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} U_2$$

- Überlagerung:

$$I_S = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

- Ergänzung:

- Wie muss R_3 bei $U_1 = 12\text{V}$, $U_2 = 16\text{V}$ und $R_2 = 20\Omega$ gewählt werden, damit kein Strom I_S fließt?

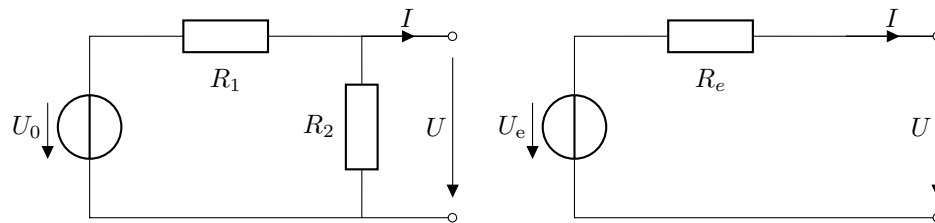
$$R_3 = \frac{-R_2 U_1}{U_1 - U_2} = 60\Omega$$

- Für $U_1 = 16\text{V}$, $U_2 = 12\text{V}$ und $R_2 = 20\Omega$ wäre dies zum Beispiel nicht möglich, da der Widerstand negativ sein müsste.

2.3 Ersatzspannungsquelle

2.3.1 Grundidee

- Zusammenfassung eines Teils eines Netzwerks zu einem einfachen Teil

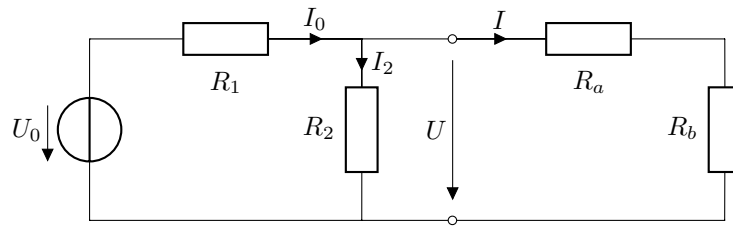


- Das einfachere Schaltbild enthält
 - eine Ersatzspannungsquelle U_e
 - einen Ersatzwiderstand R_e
- Und zwar so, dass egal was an den Klemmen angeschlossen wird, der Strom I und die Spannung U gleich sind.

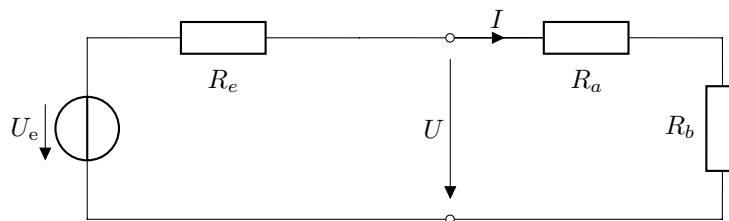
2.3.2 Allgemein

1. Originalschaltbild und Schaltbild mit Ersatzspannungsquelle skizzieren
2. Leerlaufspannungen ermitteln und gleichsetzen liefert Ersatzspannung
3. Kurzschlussströme ermitteln und gleichsetzen liefert Ersatzwiderstand
4. oder anstatt 3. Ersatzwiderstand direkt berechnen durch Kurzschließen der Spannungsquellen (Spannungen am Zweipol werden als Spannungsquelle betrachtet).

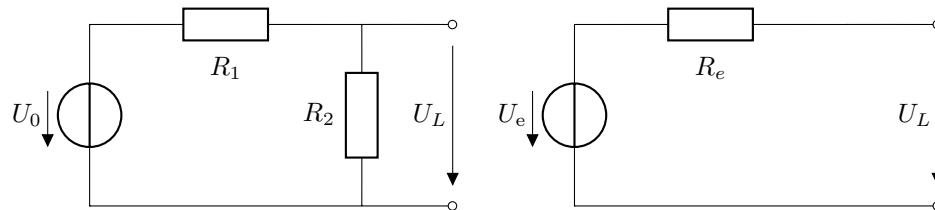
2.3.3 Beispiel



- Ersetze linken Zweipol durch Ersatzspannungsquelle



- Wie muss man U_e und R_e in Abhängigkeit von U_0 , R_1 und R_2 wählen?
1. Alternative - über Knoten- und Maschenregel (zu aufwendig)
 2. Alternative - über Leerlauf und Kurzschluss von rechtem Zweipol (wie bei realer Spannungsquelle) W
- Leerlauf:



- Hier ist (mit Spannungsteiler)

$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

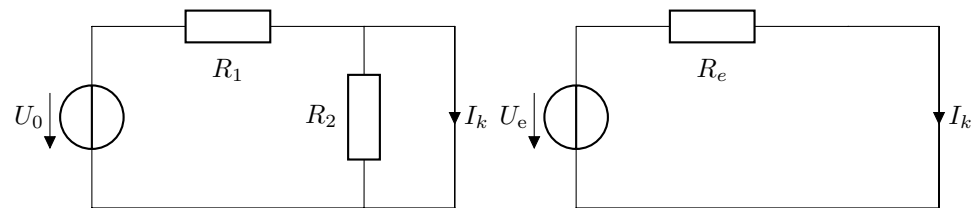
und

$$U_L = U_e$$

- Leerlaufspannungen müssen gleich sein:

$$U_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

- Kurzschluss:



- Hier ist

$$I_k = \frac{U_0}{R_1}$$

und

$$I_k = \frac{U_e}{R_e}$$

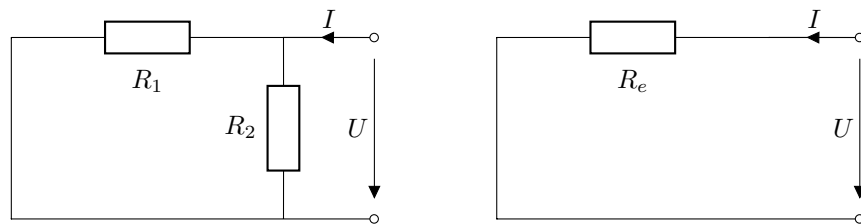
- Kurzschlussströme müssen gleich sein:

$$R_e = \frac{U_e}{U_0} R_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3. Alternative - U_0 kurzschließen und U als „Spannungsquelle“ betrachten

W

- Also



- Hier ist

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

und

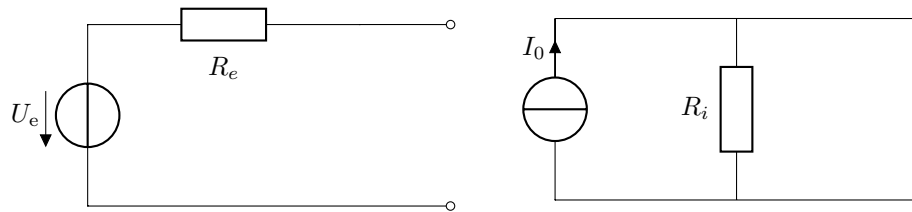
$$U = R_e I$$

- Durch Vergleich erhält man direkt den Ersatzwiderstand

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2.4 Ersatzstromquelle

- Es gilt



- Leerlauf:

$$U_L = U_e$$

und

$$U_L = R_i I_0$$

- Kurzschluss:

$$I_k = \frac{U_e}{R_e}$$

und

$$I_k = I_0$$

- Damit:

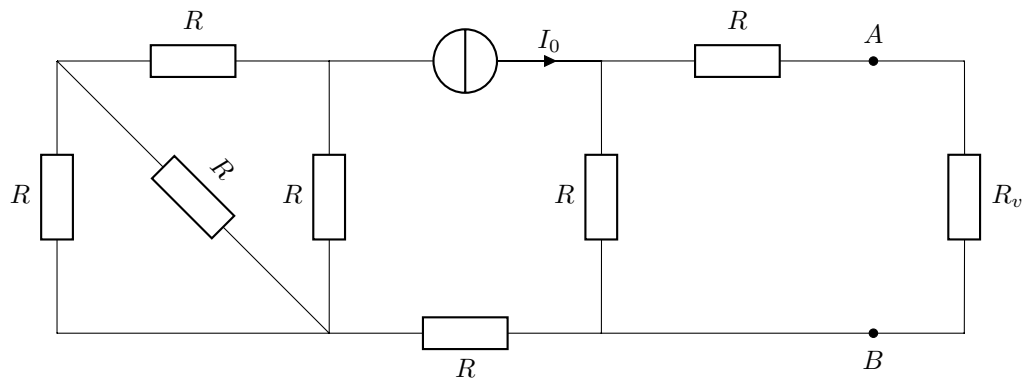
$$U_e = R_i I_0 \quad (20)$$

und

$$R_e = R_i \quad (21)$$

- Falls Stromquellen in einer Schaltung vorkommen, kann man sie durch Ersatzspannungsquellen ersetzen.

2.5 Beispiel (alte Klausuraufgabe)



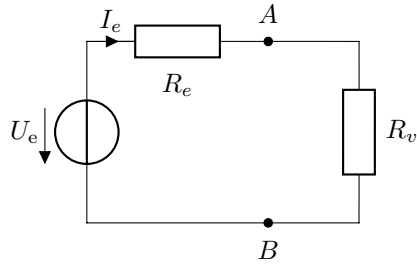
- Gegeben:

$$I_0 = 5\text{A}$$

$$R = 12\Omega$$

$$R_v = 6\Omega$$

- Gesucht: U_v
- Ersatzspannungsquelle links von A - B :



1. Leerlaufspannung:

$$U_L = I_0 R$$

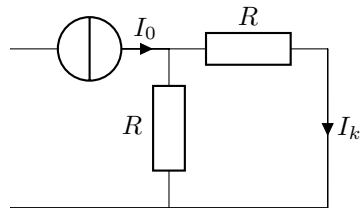
und

$$U_L = U_e$$

Also

$$U_e = I_0 R$$

2. Kurzschlussstrom:



$$I_k = \frac{R}{R + R} I_0 = \frac{1}{2} I_0$$

und

$$I_k = \frac{U_e}{R_e}$$

Also

$$R_e = \frac{2U_e}{I_0} = 2R$$

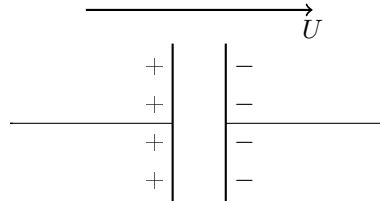
3. Spannungsteiler:

$$U_v = \frac{R_v}{R_v + R_e} U_e = 12\text{V}$$

3 Kondensatoren und Spulen

3.1 Kondensatoren

- Zwei elektrisch geladene Flächen, durch Dielektrikum getrennt:

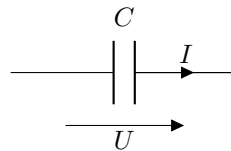


- Grundgleichung des Kondensators mit Kapazität C :

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad [C] = \text{F} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^2} \quad (\text{Farad}) \quad (22)$$

mit typischer Größenordnung von C : pF – μ F

- Schaltsymbol:



- Plattenkondensator:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \quad (23)$$

mit Plattenfläche A , Plattenabstand d , Dielektrizitätskonstante/Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ und relativer Dielektrizitätskonstante ε_r .

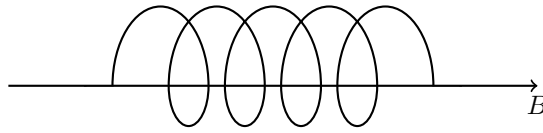
- Energie:

$$W = \int P \, dt = \int UI \, dt = C \int U \frac{dU}{dt} \, dt = \frac{1}{2} CU^2 \quad (24)$$

Die Spannung kennzeichnet die Energie des Kondensators.

3.2 Spulen

- Wicklung eines Leiters. Magnetfeld in Spule wird durch Strom erzeugt.

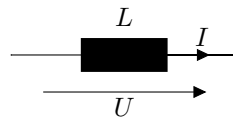


- Grundgleichung der Spule mit Induktivität L :

$$U = L \frac{dI}{dt} \quad [L] = \text{H} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{A}^2} \quad (\text{Henry}) \quad (25)$$

mit typischer Größenordnung von L : mH – μ H

- Schaltsymbol:



- Lange Spule

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A}{l} \quad (26)$$

mit durchsetzter Fläche A , Windungszahl N , Spulenlänge l und Permeabilität $\mu = \mu_0 \mu_r$.

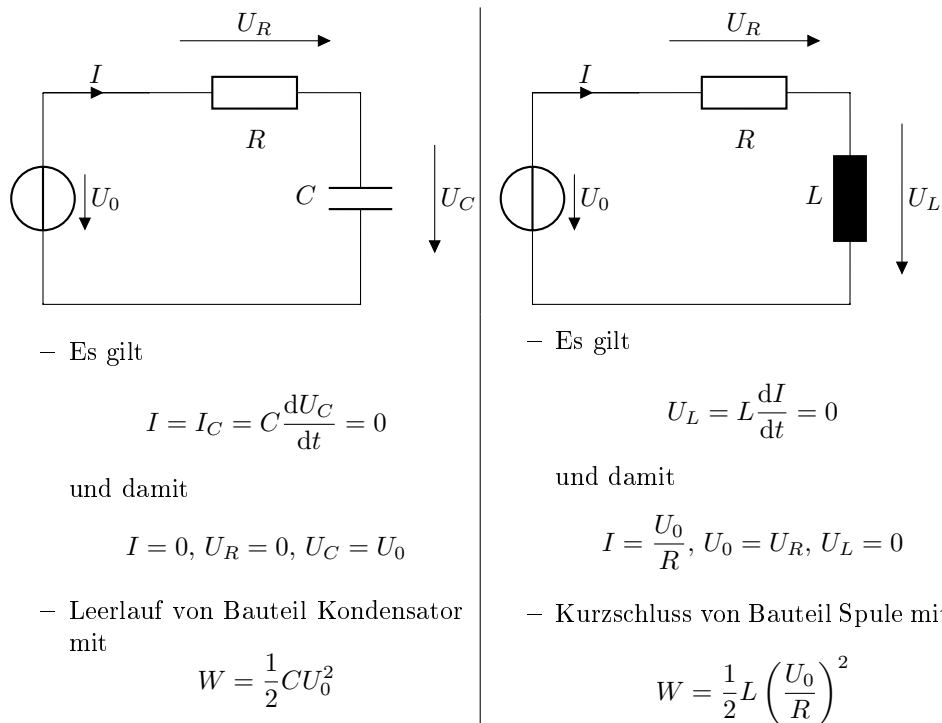
- Energie:

$$W = \int P \, dt = \int UI \, dt = L \int I \frac{dI}{dt} \, dt = \frac{1}{2} LI^2$$

Der Strom kennzeichnet die Energie der Spule.

3.3 Diskussion für Gleichstrom

- Betrachte stationären Zustand, d.h. $\frac{dU}{dt} = 0$ und $\frac{dI}{dt} = 0$.

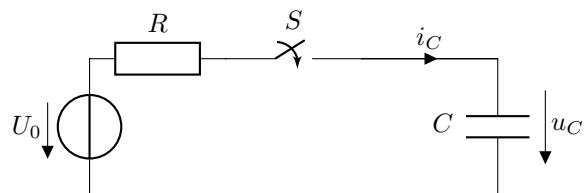


- Im stationären Betrieb mit Gleichstrom ist die Kapazität ein Unterbrecher und die Induktivität ein Kurzschluss
- In den Bauteilen steckt also Energie. Diese kommt beim Ein- und Ausschalten zum Vorschein.

3.4 Ein- und Ausschaltvorgänge

3.4.1 Kondensator

Einschaltvorgang



- Voraussetzung: Bei $t = 0$ ist Kondensator komplett entladen, d.h. $u_C(0) = 0$
- Maschenregel:

$$U_0 = u_C + u_R = u_C + R i_C$$

- DGL für Einschaltvorgang:

$$U_0 = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$$

- Ansatz:

$$u_C(t) = b + ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. Einsetzen in DGL:

$$U_0 = b + ae^{-\frac{t}{\tau}} + RC \left(-\frac{a}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Sortieren:

$$U_0 - b = \left(a + RC \left(-\frac{a}{\tau}\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

DGL muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Also

$$b = U_0, \quad \tau = RC$$

2. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_C(t) = 0$

$$b + ae^{-\frac{0}{\tau}} = U_0 + a = 0$$

Also

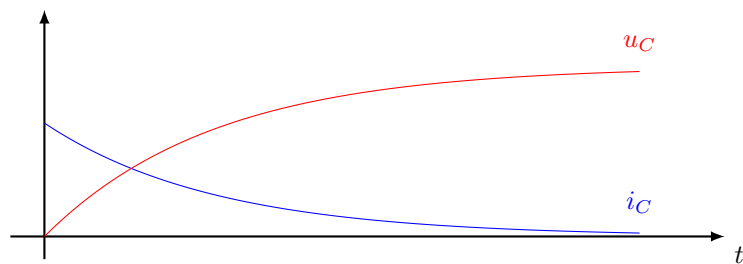
$$a = -U_0$$

3. Der Strom berechnet sich über $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$:

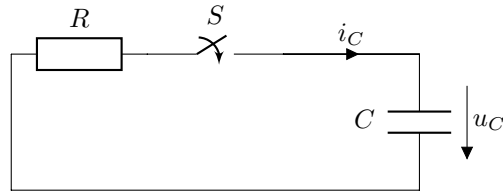
$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (27)$$

$$i_C(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (28)$$

4. Graphisch



Ausschaltvorgang



- Voraussetzung: Bei $t = 0$ ist Kondensator vollständig geladen, d.h. $u_C(0) = U_0$
- Maschenregel:

$$0 = u_C + Ri_C$$

- DGL für Ausschaltvorgang:

$$0 = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$$

- Ansatz:

$$u_C(t) = b + ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. Einsetzen in DGL:

$$0 = b + ae^{-\frac{t}{\tau}} + RC \left(-\frac{a}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Sortieren:

$$-b = \left(a + RC \left(-\frac{a}{\tau} \right) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

DGL muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Also

$$b = 0, \quad \tau = RC$$

2. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_C(t) = U_0$

$$b + ae^{-\frac{0}{\tau}} = a = U_0$$

Also

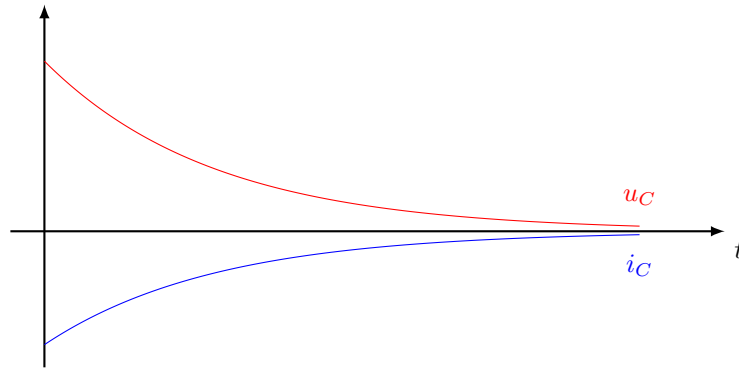
$$a = U_0$$

3. Der Strom berechnet sich über $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$:

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{29}$$

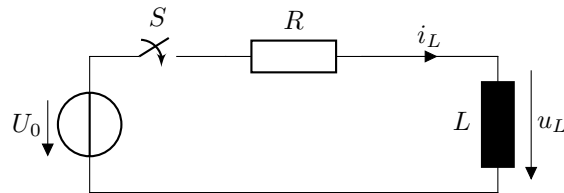
$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{30}$$

4. Graphisch (Beim Ausschalten dient C als „Quelle“)



3.4.2 Spule

Einschaltvorgang



- Voraussetzung: Bei $t = 0$ fließt kein Strom, d.h. $i_L(0) = 0$
- Maschenregel:

$$U_0 = u_L + u_R = u_L + Ri_L$$

- DGL für Einschaltvorgang:

$$U_0 = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

- Ansatz:

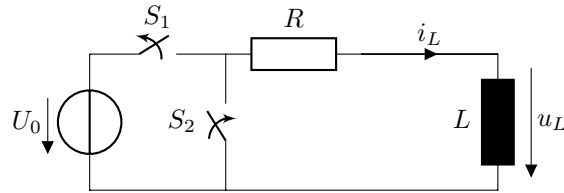
$$i_L(t) = b + ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Durchrechnen liefert:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (31)$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} = L \frac{di_L}{dt} \quad (32)$$

Ausschaltvorgang



- Der Schalter S_2 ist nötig, damit der Strom weiterfließen kann (sonst $\frac{di_L}{dt} \rightarrow \infty$ und damit elektrischer Durchschlag, d.h. Lichtbogen an S_1)
- Voraussetzung: Bei $t = 0$ ist $i_L(0) = \frac{U_0}{R}$
- Maschenregel:

$$0 = u_L + u_R = u_L + Ri_L$$

- DGL für Ausschaltvorgang:

$$0 = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L$$

- Ansatz:

$$i_L(t) = b + ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Durchrechnen liefert:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (33)$$

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (34)$$

Bei Ausschalten dient L dient als „Quelle“

3.4.3 Nachtrag zu DGLs

- Betrachte zum Beispiel die DGL

$$U_0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$

Es handelt sich um eine inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- Homogene DGL

$$0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{1}{i} di \quad (\text{Separation der Variablen})$$

$$-\frac{R}{L} \int 1 dt = \int \frac{1}{i} di \quad (\text{Integration})$$

$$-\frac{R}{L} t = \ln(i) + a$$

$$i(t) = e^{-a} e^{-\frac{R}{L} t} = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

- Inhomogene DGL

$$U_0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$

Verwende Variation de Konstanten, d.h. $i(t) = A(t) e^{-\frac{R}{L} t}$

$$U_0 = \left(\frac{dA}{dt} e^{-\frac{R}{L} t} + \left(-\frac{R}{L} \right) A e^{-\frac{R}{L} t} \right) + R A e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t}$$

$$A(t) = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} t} + B$$

- Einsetzen:

$$i(t) = \left(\frac{U_0}{R} + B e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

- Anfangswert $i(0) = 0$

$$B = -\frac{U_0}{R}$$

- Lösung

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

4 Wechselspannung reell

- Wechselgrößen mit konstanter Frequenz:

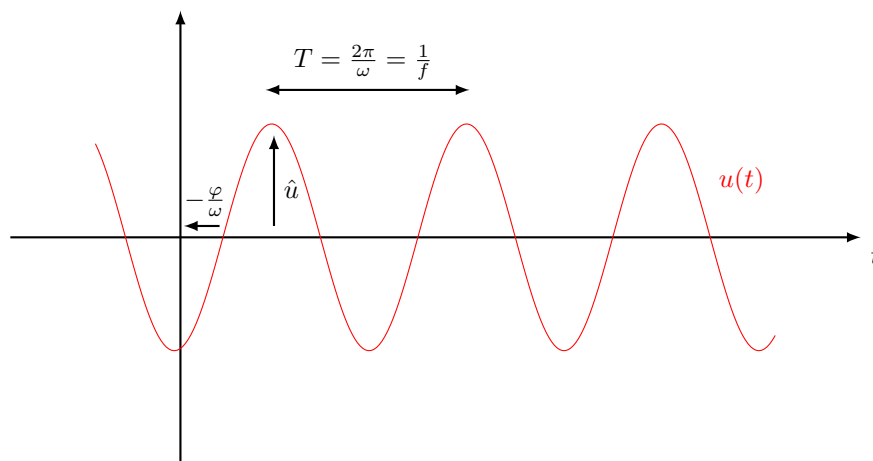
$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (35)$$

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (36)$$

- Dabei sind

$u(t), i(t)$	Momentanwerte von Spannung/Strom
$\hat{u}, \hat{i}$	Scheitelwerte bzw. Amplituden
φ_u, φ_i	Phasenwinkel
ω	Kreisfrequenz
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	Frequenz (meist 50Hz $\rightarrow \omega \approx 314 \frac{1}{s}$)

- Graphisch (Beachte: φ ist hier negativ. Im Allgemeinen ist $\omega t + \varphi = 0 \rightarrow t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$):



- Effektivwerte:

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

- Diese werden vor allem in der komplexen Wechselstromrechnung und im Zusammenhang mit der Leistung verwendet. Bei der komplexen Wechselstromrechnung wird „eff“ oft weggelassen.

4.1 Bauteile

- Definiere vorab die Phase am Bauteil:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (39)$$

4.1.1 Widerstand

- Es gilt

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

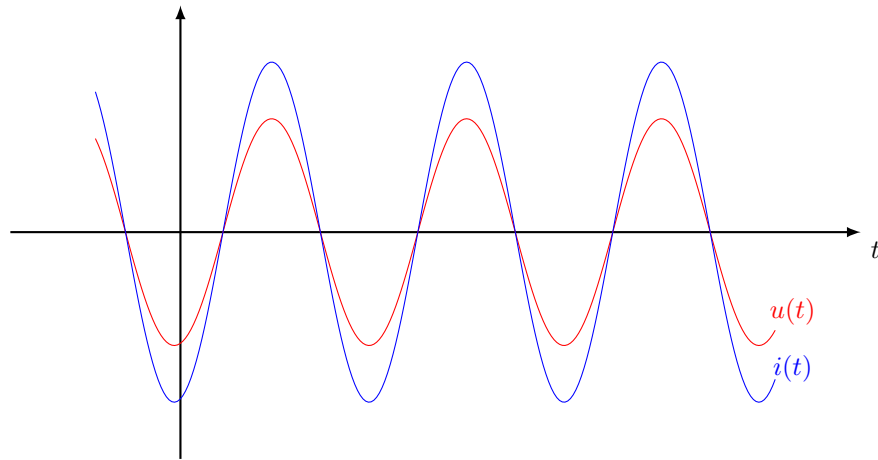
$$\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = R \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

- Vergleich liefert

$$\hat{u} = R \hat{i} \quad (40)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \quad (= 0^\circ) \quad (41)$$

- Strom und Spannung sind in Phase



4.1.2 Kondensator

- Es gilt

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

$$\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) = C \omega \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

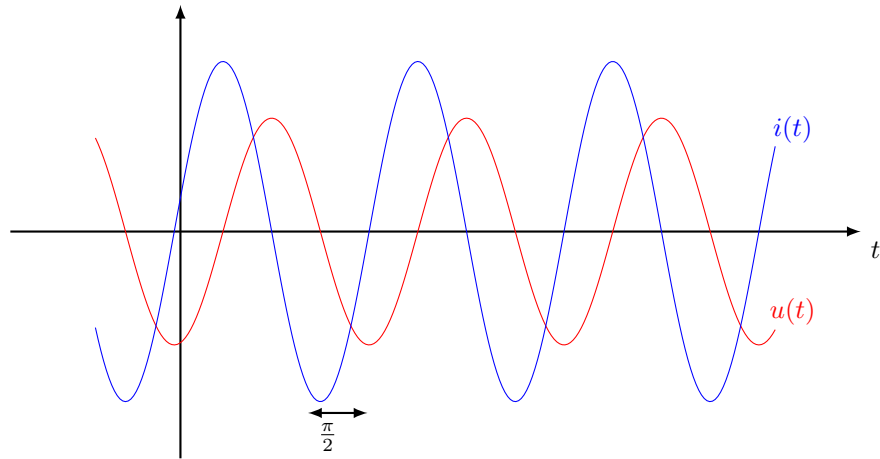
$$= C \omega \hat{u} \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Vergleich liefert

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega C} \hat{i} \quad (42)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \left(\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (= -90^\circ) \quad (43)$$

- Strom eilt Spannung voraus



4.1.3 Spule

- Es gilt

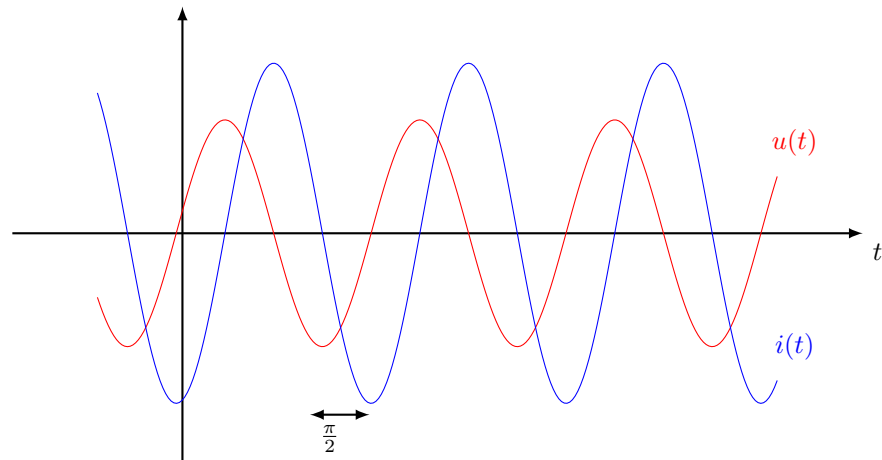
$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= L \frac{d}{dt} i_L(t) \\
 \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) &= L \omega \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \\
 &= L \omega \hat{i} \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

- Vergleich liefert

$$\hat{u} = \omega L \hat{i} \quad (44)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \quad (= +90^\circ) \quad (45)$$

- Spannung eilt Strom voraus



4.1.4 Merkregel

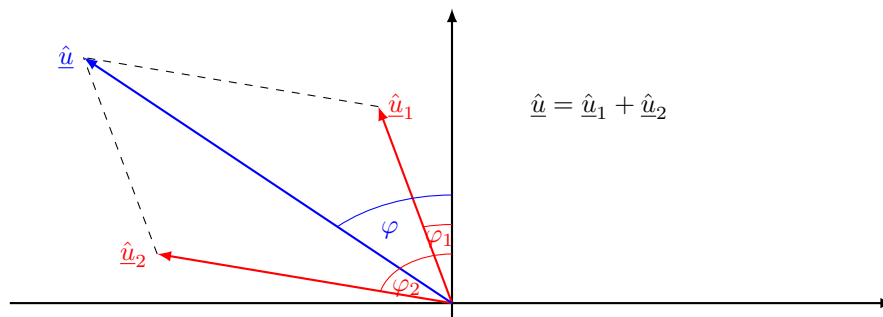
- Vorauseilend: *LUCI* vor
 - bei L ist U vor Strom
 - bei C ist I vor Spannung

W

4.2 Zeigerdarstellung

- Für alle Wechselstromkreise, die nur eine Frequenz aufweisen
- Zeiger sind symbolische Größen (Pfeile in der Ebene)
- Zeiger werden durch Unterstrich gekennzeichnet ($\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{i}}$)
- Zeigerlänge ist die Amplitude
- Für Zeiger gelten:
 - Maschenregel und Knotenregel (sowie Ableitungen davon)
 - Vektoraddition und -subtraktion

W



4.2.1 Kirchhoffsche Regeln

- Die Kirchhoffschen Regeln gelten
 - für Momentanwerte $u(t)$, $i(t)$
 - für Zeiger $\underline{\hat{u}}$, $\underline{\hat{i}}$
 - NICHT für Amplituden $\hat{u}$, $\hat{i}$

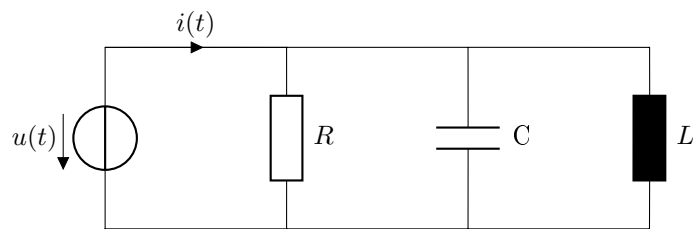
W

4.2.2 Winkel

- Zeichne Orientierung von φ immer von $\underline{\hat{i}}$ zu $\underline{\hat{u}}$
 - φ positiv: ohmsch induktiv
 - φ negativ: ohmsch kapazitiv

4.2.3 Beispiele

Beispiel 1



- Maschen- und Knotenregel:

$$u(t) = u_R(t) = u_C(t) = u_L(t)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

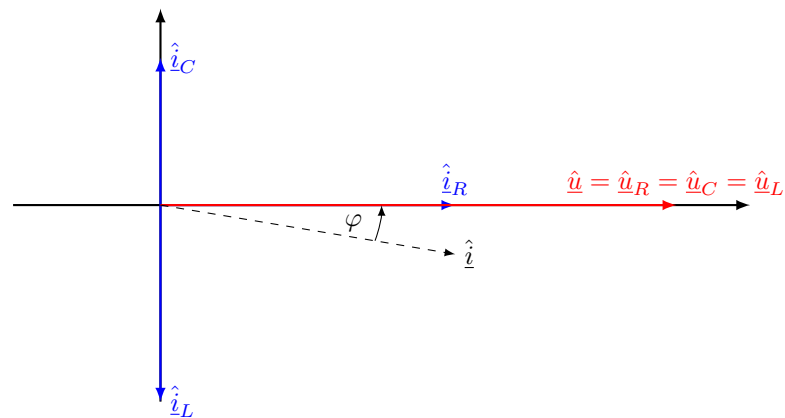
- Es gilt

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R} \hat{u}_R$$

$$\hat{i}_C = \omega C \hat{u}_C$$

$$\hat{i}_L = \frac{1}{\omega L} \hat{u}_L$$

- Zeiger:



- Aus Zeichnung erhält man:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\hat{i}_L - \hat{i}_C}{\hat{i}_R} \right)$$

Allerdings funktioniert das Aufstellen solch einer Formel nur in den einfachsten Fällen.

Beispiel 1 rechnerisch

1. Allgemein

- Es ist

$$u(t) = u_R(t) = u_C(t) = u_L(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

und NUR deshalb

$$\hat{u} = \hat{u}_R = \hat{u}_C = \hat{u}_L$$

- Damit

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R} \hat{u}$$

$$\hat{i}_C = \omega C \hat{u}$$

$$\hat{i}_L = \frac{1}{\omega L} \hat{u}$$

- Wichtig: Es gilt nicht $\hat{i} = \hat{i}_R + \hat{i}_C + \hat{i}_L$ (Kirchhoffsche Regeln gelten nicht für Amplituden)
- Phasenwinkel:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\hat{i}_L - \hat{i}_C}{\hat{i}_R} \right) = \arctan \left(R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right)$$

2. Zahlenbeispiel

- Gegeben:

$$R = 100\Omega$$

$$L = 1\text{H}$$

$$C = 20\mu\text{F}$$

$$\hat{u} = 100\text{V}$$

- Für $f = 30\text{Hz}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 30\text{Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\text{F}} = 265.26\Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 30\text{Hz} \cdot 1\text{H} = 188.5\Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(100\left(\frac{1}{188} - \frac{1}{265}\right)\right) \approx 8.7^\circ$$

ist also ohmsch induktiv

- Für $f = 50\text{Hz}$

$$X_C = 159\Omega$$

$$X_L = 314\Omega$$

$$\varphi \approx -17.2^\circ$$

ist also ohmsch kapazitiv.

- Das Längenverhältnis im Zeigerdiagramm ist für $f = 50\text{Hz}$ anders, denn

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R}\hat{u} = 1\text{A}$$

$$\hat{i}_C = \frac{1}{X_C}\hat{u} = 0.63\text{A}$$

$$\hat{i}_L = \frac{1}{X_L}\hat{u} = 0.32\text{A}$$

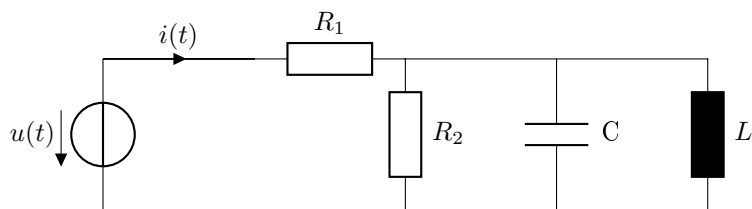
$$\hat{i}_C > \hat{i}_L$$

- Achtung: Es gilt nicht $\hat{i} = \hat{i}_R + \hat{i}_C + \hat{i}_L$, sondern

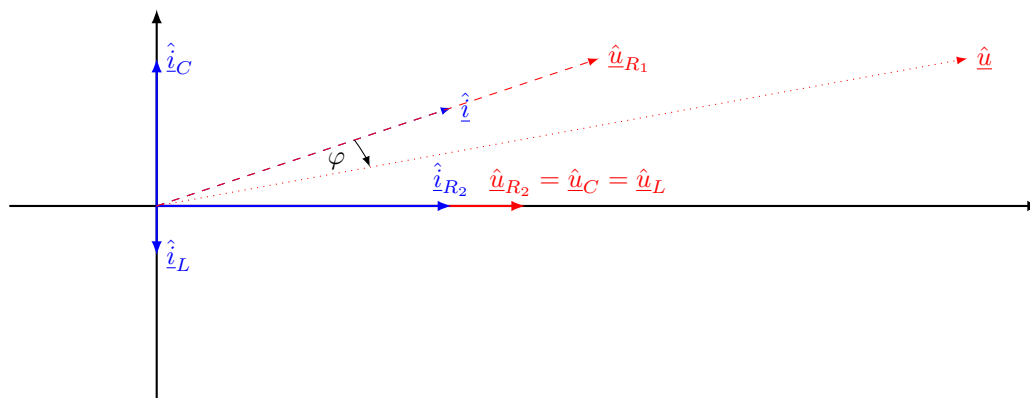
$$\hat{i} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{i}_R \sin(\omega t) + \hat{i}_C \sin(\omega t + 90^\circ) + \hat{i}_L \sin(\omega t - 90^\circ)$$

- Das rechnet man aber nie im Reellen, sondern immer nur komplex!

Beispiel 2

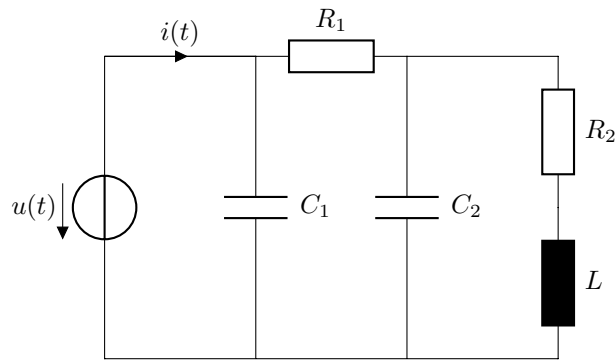


- Qualitatives Zeigerdiagramm mit Berücksichtigung von MR und KR.
- Starte mit u_L
 - $u_L(t) = u_C(t) = u_{R_2}(t)$, d.h. $\hat{u}_L = \hat{u}_C = \hat{u}_{R_2}$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{i}_L, \hat{i}_C, \hat{i}_{R_2}$
 - Zeichne $\hat{i} = \hat{i}_L + \hat{i}_C + \hat{i}_{R_2}$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{u}_{R_1}$
 - Zeichne $\hat{u} = \hat{u}_{R_1} + \hat{u}_L$
- Zeigerdiagramm:



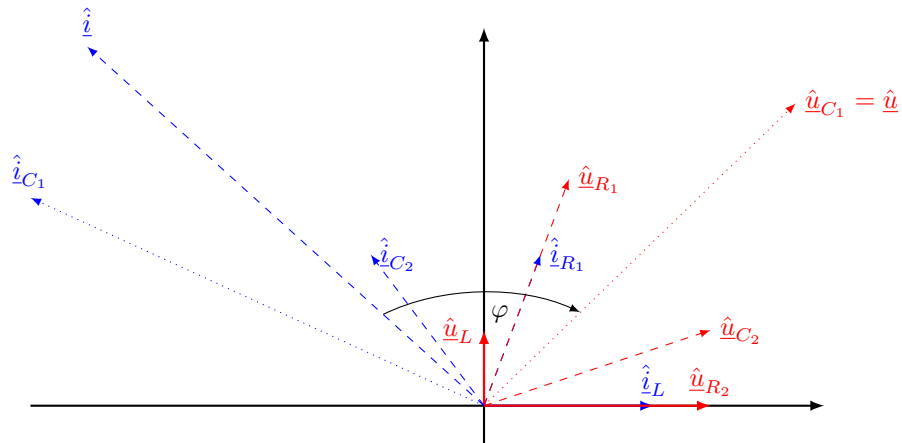
- Hier kann der Phasenwinkel φ nicht mehr einfach geometrisch bestimmt werden.

Beispiel 3



- Starte mit $\hat{i}_L$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{u}_L$ und $\hat{u}_{R_2}$
 - Zeichne $\hat{u}_{C_2} = \hat{u}_L + \hat{u}_{R_2}$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{i}_{C_2}$
 - Zeichne $\hat{i}_{R_1} = \hat{i}_{C_2} + \hat{i}_L$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{u}_{R_1}$
 - Zeichne $\hat{u}_{C_1} = \hat{u}_{R_1} + \hat{u}_{C_2} = \hat{u}$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{i}_{C_1}$
 - Zeichne $\hat{i} = \hat{i}_{C_1} + \hat{i}_{R_1}$

- Zeigerdiagramm:



4.3 Leistung

- Mit

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

- Momentanleistung:

$$p(t) = u(t) i(t) \quad (46)$$

- Wirkleistung:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \, dt \quad (47)$$

(über eine Periode gemittelt)

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) \, dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \hat{u} \hat{i} \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \right] \, dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \hat{u} \hat{i} \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \frac{2\pi}{\omega} + 0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \end{aligned}$$

- Wirkleistung :

$$P = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (48)$$

$$= UI \cos(\varphi) \quad (49)$$

$$[P] = \text{W (Watt)}$$

– Effektivwerte

$$U = U_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T (u(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

$$I = I_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T (i(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (51)$$

- Leistungsfaktor

$$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos(\varphi)$$

- Insbesondere ist $P = 0$ für Kondensator und Spule.

- Blindleistung :

$$Q = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \sin(\varphi_u - \varphi_i) \quad (52)$$

$$= UI \sin(\varphi) \quad (53)$$

$$[Q] = \text{var (voltage ampere relative)}$$

- Insbesondere

$$Q = -UI < 0 \text{ für Kondensator}$$

$$Q = +UI > 0 \text{ für Spule}$$

- Schaltung heißt für

$$Q < 0 : \text{kapazitiv} \quad (54)$$

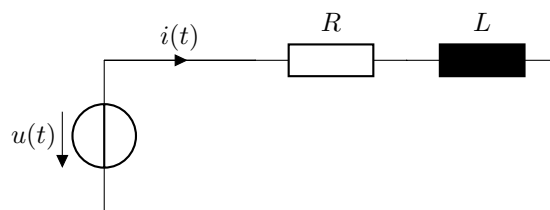
$$Q > 0 : \text{induktiv} \quad (55)$$

- Scheinleistung

$$S = (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} = UI \quad (56)$$

$$[S] = \text{VA (Volt – Ampere)}$$

4.3.1 Beispiel



- Gegeben:

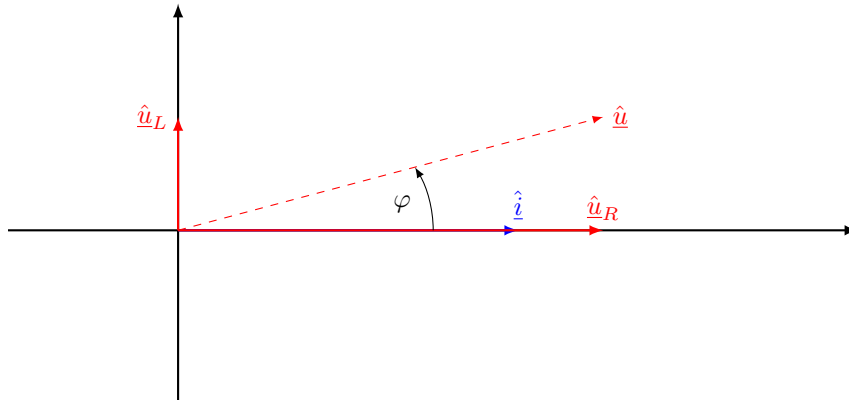
$$\hat{u} = 220\text{V}$$

$$R = 100\Omega$$

$$L = 0.5\text{H}$$

$$f = 50\text{Hz}$$

- Starte mit $\hat{i} = \hat{i}_L = \hat{i}_R$
 - Zeichne relativ dazu $\hat{u}_L, \hat{u}_R$
 - Zeichne $\hat{u} = \hat{u}_R + \hat{u}_L$
- Zeigerdiagramm:



- Aus Zeichnung:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\hat{u}_L}{\hat{u}_R} \right)$$

- Es ist

$$i(t) = i_R(t) = i_L(t)$$

und NUR deshalb

$$\hat{i} = \hat{i}_R = \hat{i}_L$$

- Damit

$$\begin{aligned} \hat{u}_R &= R\hat{i} \\ \hat{u}_L &= \omega L\hat{i} \end{aligned}$$

- Phasenwinkel:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L \hat{i}}{R \hat{i}} \right) = 57.5^\circ$$

- Aus rechtwinkligem Dreieck:

$$\begin{aligned} \hat{u}_R &= \hat{u} \cos(\varphi) = 118\text{V} \\ \hat{u}_L &= \hat{u} \sin(\varphi) = 186\text{V} \end{aligned}$$

- Wichtig: Es gilt NICHT $\hat{u} = \hat{u}_R + \hat{u}_L$ (Kirchhoffsche Regeln sind nicht gültig für Amplituden)

- Strom

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_R}{R} = 1.18\text{A}$$

- Leistungen:

$$P = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos(\varphi) = 69.8\text{W} \quad (\neq 0 : \text{ohmsch})$$

$$P = U_R I = \frac{1}{2} \hat{u}_R \hat{i}$$

$$Q = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \sin(\varphi) = 109.6\text{var} \quad (> 0 : \text{induktiv})$$

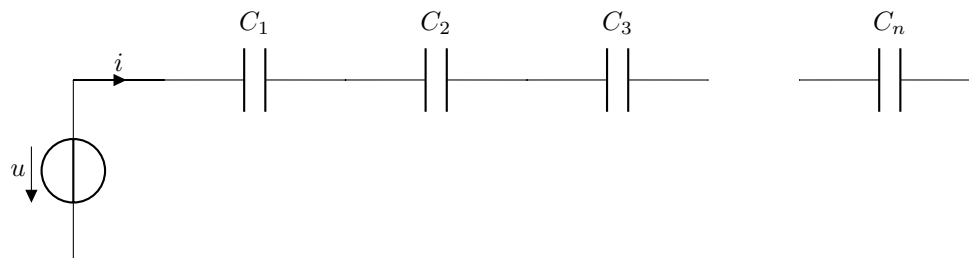
$$Q = U_L I = \frac{1}{2} \hat{u}_L \hat{i}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 130\text{VA}$$

4.4 Schaltungen von Kondensatoren und Spulen

4.4.1 Serien-/Reihenschaltung

1. Kondensatoren



- Es gilt

$$\hat{u}_1 = X_{C_1} \hat{i}, \quad \hat{u}_2 = X_{C_2} \hat{i} \dots$$

- Da die Phasenverschiebung an allen Kondensatoren gleich ist, gilt

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{u}_1 + \dots + \hat{u}_n \\ &= (X_{C_1} + \dots + X_{C_n}) \hat{i} \\ &= X_{\text{ges}} \hat{i} \end{aligned}$$

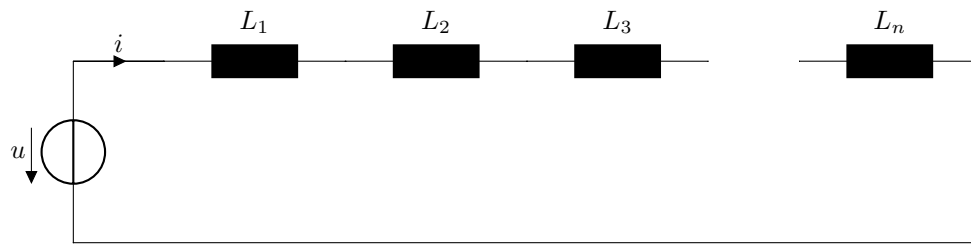
- Damit

$$X_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n X_{C_i}$$

bzw. mit $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (57)$$

2. Spulen



- Es folgt wie oben

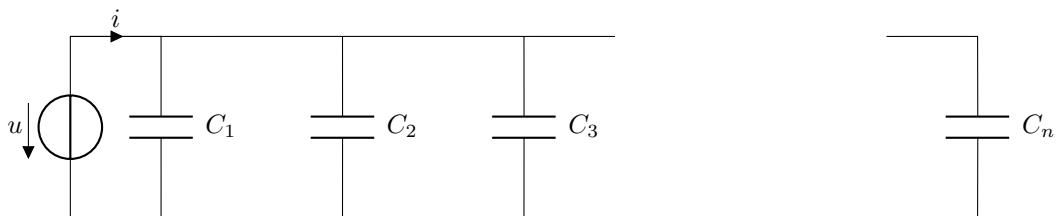
$$X_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n X_{L_i}$$

bzw. mit $X_L = \omega L$

$$L_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n L_i \quad (58)$$

4.4.2 Parallelschaltung

1. Kondensatoren



- Es gilt

$$\hat{i}_1 = \frac{1}{X_{C_1}} \hat{u}_1, \quad \hat{i}_2 = \frac{1}{X_{C_2}} \hat{u}_1 \dots$$

- Da die Phasenverschiebung an allen Kondensatoren gleich ist, gilt

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \hat{i}_1 + \dots + \hat{i}_n \\ &= \left(\frac{1}{X_{C_1}} + \dots + \frac{1}{X_{C_n}} \right) \hat{i} \\ &= \frac{1}{X_{\text{ges}}} \hat{i}\end{aligned}$$

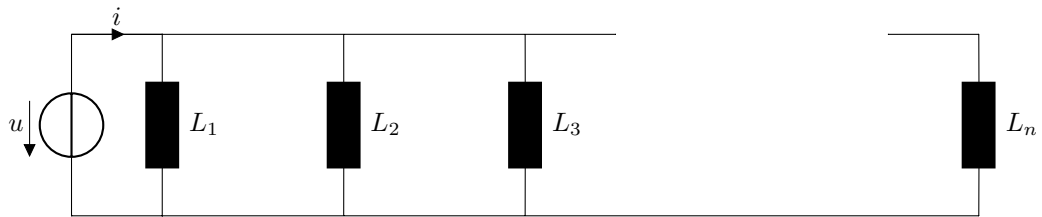
- Damit

$$\frac{1}{X_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{C_i}}$$

bzw. mit $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (59)$$

2. Spulen



- Es folgt wie oben

$$\frac{1}{X_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{L_i}}$$

bzw. mit $X_L = \omega L$

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (60)$$

5 Wechselspannung komplex

5.1 Einschub: komplexe Zahlen

- Komplexe Zahl:

$$\underline{z} = a + jb \quad (61)$$

- gekennzeichnet durch Unterstrich
- $a = \operatorname{Re}(\underline{z})$: Realteil ($a \in \mathbb{R}$)
- $b = \operatorname{Im}(\underline{z})$: Imaginärteil ($b \in \mathbb{R}$)
- j : imaginäre Einheit ($j^2 = -1$). Wir verwenden einfach $j = \sqrt{-1}$

- Polardarstellung:

$$\underline{z} = r e^{j\varphi} = r (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) \quad (62)$$

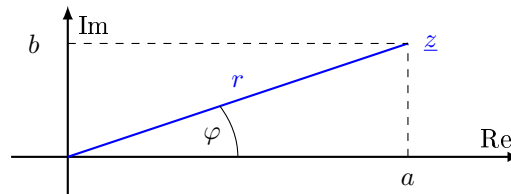
- Betrag:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\underline{z}| \quad (63)$$

- Phase:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{z})}{\operatorname{Re}(\underline{z})}\right) \quad (64)$$

- In komplexer Ebene:



- komplexe Konjugation:

$$\underline{z} = a + jb = r e^{j\varphi}$$

$$\underline{z}^* = a - jb = r e^{-j\varphi} \quad (65)$$

und damit

$$\underline{z} \underline{z}^* = r e^{j\varphi} r e^{-j\varphi} = r^2 = |\underline{z}|^2 \quad (66)$$

- Brüche (Erweitern macht Nenner reell)

W

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} \\
&= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - b_2 a_1)] \\
\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} &= \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}
\end{aligned} \tag{67}$$

- Aus der Multiplikation folgt

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \Rightarrow \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i \tag{68}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} \Rightarrow \varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z \tag{69}$$

5.1.1 Beispiele

- Gesucht sind Real- und Imaginärteil sowie Polardarstellung

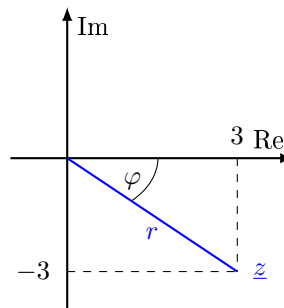
1. $\underline{z} = 3 + \frac{1}{j^{\frac{1}{3}}}$

$$\underline{z} = 3 + j(-3)$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-3}{3}\right) = -45^\circ$$

In komplexer Ebene:



$$2. \underline{z} = \frac{5}{3+j4}$$

$$\underline{z} = \frac{5(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)} = \frac{5(3-j4)}{25} = \frac{3}{5} - j\frac{4}{5}$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53.1^\circ$$

$$3. \underline{z} = \frac{3}{2e^{j30^\circ}}$$

$$\underline{z} = \frac{3}{2}e^{-j30^\circ} = \frac{3}{2}(\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ))$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - j\frac{3}{4}$$

$$|\underline{z}| = \frac{3}{2}$$

$$\varphi = -30^\circ$$

$$4. \underline{z} = -je^{j30^\circ}$$

$$\underline{z} = e^{j(-90^\circ)}e^{j30^\circ} = e^{-j60^\circ} = (\cos(-60^\circ) + j\sin(-60^\circ))$$

$$= \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\underline{z}| = 1$$

$$\varphi = -60^\circ$$

5. Winkel berechnen

$$\underline{z}_1 = 1 + j$$

$$\underline{z}_2 = 2 + j$$

- Hier ist

$$\varphi_1 = \arctan(1) = 45^\circ$$

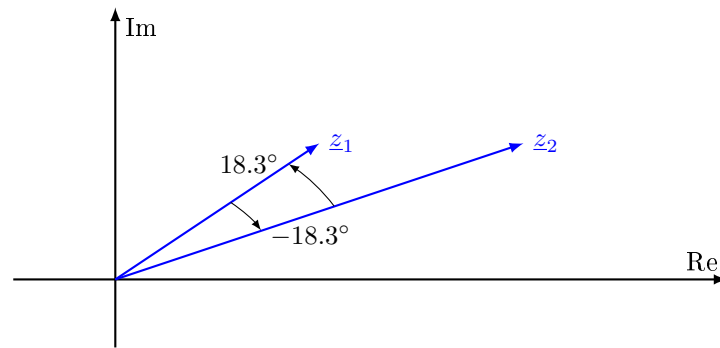
$$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.7^\circ$$

- Damit folgt für den Winkel zwischen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 18.3^\circ$$

$$\Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -18.3^\circ$$

- $\underline{z}_1$ ist vor $\underline{z}_2$:



6. Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen

$$\underline{z}_2 = \underline{w}\underline{z}_1$$

$$\underline{w} = 2 - j3$$

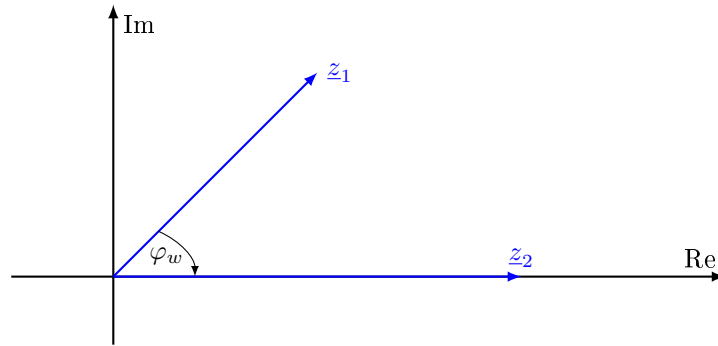
- Es ist

$$\underline{w} = \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = r_w e^{j\varphi_w}$$

und

$$\varphi_w = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -56.3^\circ$$

- Skizziere prinzipielle Lage von $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$:



5.2 Komplexe Darstellung von Wechselgrößen

- Spannung und Strom

$$\underline{U}(t) = U e^{j\varphi_U} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t} \quad (70)$$

$$\underline{I}(t) = I e^{j\varphi_I} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t} \quad (71)$$

- U, I : Effektivwerte, Beträge von Spannung und Strom
- φ_U, φ_I : Phasenwinkel
- ω : Kreisfrequenz
- $\underline{U}, \underline{I}$: Zeiger des Effektivwertes (zeitunabhängiger Anteil von Spannung oder Strom)

- Im Folgenden wird meistens mit den Effektivwertzeigern gerechnet.

5.2.1 Zusammenhang mit reellen Größen

- Es ist

$$\underline{U}(t) = U \cos(\omega t + \varphi_U) + jU \sin(\omega t + \varphi_U)$$

- Identifiziere:

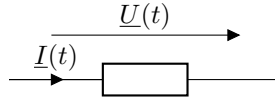
$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_U) = \sqrt{2} \cdot \text{Im}(\underline{U}(t)) \quad (72)$$

$$\hat{u} = \sqrt{2}U \quad (73)$$

- Die Definition mit $\sqrt{2}$ wird später bei der Leistung klar.

5.3 Komplexer Scheinwiderstand

- Es gilt im Allgemeinen der lineare Zusammenhang zwischen $\underline{U}$ und $\underline{I}$ an einem Bauteil



- Es ist

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \underline{Z} \in \mathbb{C} : \text{Impedanz, } [\underline{Z}] = \Omega \text{ (Ohm)} \quad (74)$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad \underline{Y} \in \mathbb{C} : \text{Admittanz, } [\underline{Y}] = \text{S (Siemens)} \quad (75)$$

- und damit

$$U e^{j\varphi_U} e^{j\omega t} = Z e^{j\varphi} I e^{j\varphi_I} e^{j\omega t}$$

$$U e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = Z I e^{j\varphi}$$

- Phasenverschiebung:

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$

- Zusammenhang zwischen Beträgen:

$$U = Z I$$

5.3.1 Blindwiderstand

- Blindwiderstand (Reaktanz):

$$X = |\text{Im}(\underline{Z})| \quad (76)$$

- Blindleitwert (Suszeptanz):

$$Y = \frac{1}{|\text{Im}(\underline{Z})|} \quad (77)$$

5.3.2 Ohmscher Widerstand

- Es gilt

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

- Impedanz ist rein reell

$$\underline{Z} = R \quad (78)$$

- Reaktanz:

$$X_R = 0$$

- Phasenverschiebung

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 0 \quad (79)$$

5.3.3 Kapazität

- Es gilt

$$\underline{I} = C \frac{d}{dt} \underline{U} = j\omega C \underline{U}$$

- Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} \quad (80)$$

- Reaktanz:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- Phasenverschiebung (Strom vor Spannung)

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = -90^\circ \quad (81)$$

5.3.4 Induktivität

- Es gilt

$$\underline{U} = L \frac{d}{dt} \underline{I} = j\omega L \underline{I}$$

- Impedanz

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ} \quad (82)$$

- Reaktanz:

$$X_L = \omega L$$

- Phasenverschiebung (Strom vor Spannung)

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 90^\circ \quad (83)$$

5.4 Kirchhoffsche Regeln

5.4.1 Für Gleichstrom

1. Knotenregel (Laufrichtung beachten)

$$\sum_k I_k = 0 \quad (84)$$

2. Maschenregel

$$\sum_k U_k = 0 \quad (85)$$

5.4.2 Für Wechselstrom mit $\omega = \text{konst.}$

- für Momentanwerte

$$\sum_k i_k(t) = 0, \quad \sum_k u_k(t) = 0 \quad (86)$$

- für komplexe Größen

$$\sum_k \underline{I}_k(t) = 0, \quad \sum_k \underline{U}_k(t) = 0 \quad (87)$$

- für Zeiger

$$\sum_k \hat{i}_k = 0, \quad \sum_k \hat{u}_k = 0 \quad (88)$$

5.4.3 Stromteiler- und Spannungsteilerregel

- Am Knoten

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

- In Masche

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}, \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

5.4.4 Reihen- und Parallelschaltung

- Reihenschaltung

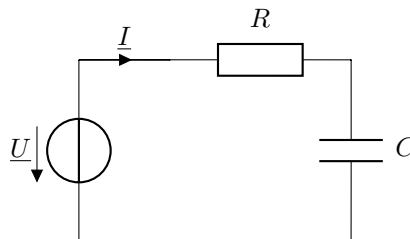
$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_k \underline{Z}_k, \quad \frac{1}{\underline{Y}_{\text{ges}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Y}_k} \quad (89)$$

- Parallelschaltung

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}, \quad \underline{Y}_{\text{ges}} = \sum_k \underline{Y}_k \quad (90)$$

5.5 Beispiele

5.5.1 Reihenschaltung



- Gegeben:

$$R = 100\Omega$$

$$C = 100\mu\text{F}$$

$$f = 50\text{Hz}$$

$$U = 100\text{V}$$

- Gesucht: $\underline{Z}_{\text{ges}}$, I , U_R , U_C , φ und Zeigerdiagramm

- Es ist

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_k \underline{Z}_k = R - j \frac{1}{\omega C} = (100 - j31.8) \Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-31.8}{100}\right) \approx -17.6^\circ$$

$$I = \frac{U}{Z_{\text{ges}}} = \frac{100\text{V}}{\sqrt{100^2 + 31.8^2} \Omega} = 0.95\text{A}$$

$$U_R = RI = 95\text{V}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = 30.2\text{V} \text{ (Achtung : } U_R + U_C \neq 100\text{V)}$$

- Anmerkung:

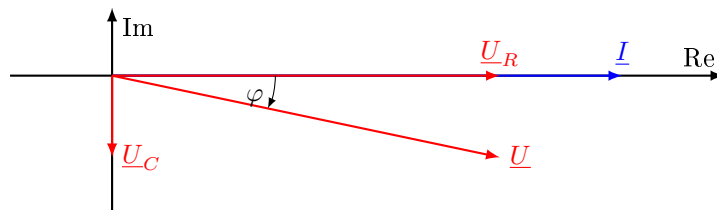
$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{U}{Z_{\text{ges}} e^{j\varphi}} = I e^{j\varphi_I} \rightarrow \varphi_I = -\varphi$$

und

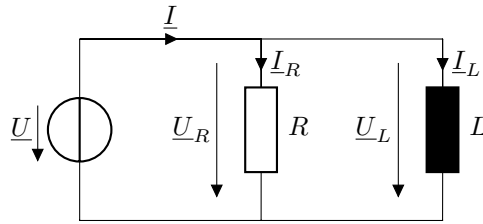
$$\underline{U}_R = R \underline{I}$$

$$\underline{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$$

- Zeigerdiagramm:



5.5.2 Parallelschaltung



- Gegeben:

$$R = 100\Omega$$

$$L = 0.2\text{H}$$

$$f = 50\text{Hz}$$

$$U = 100\text{V}$$

- Gesucht: $\underline{Z}_{\text{ges}}$, I , I_R , I_L , φ und Zeigerdiagramm

- Es ist

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{R^2(\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = (28.3 + j45)\Omega$$

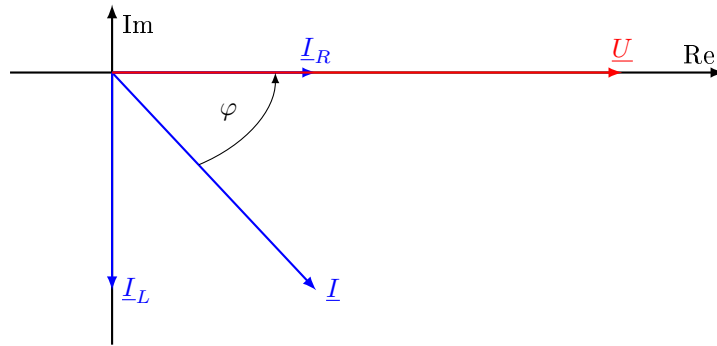
$$\varphi = \arctan\left(\frac{45}{28.3}\right) \approx 57.9^\circ$$

$$I = Y_{\text{ges}}U = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} U \approx 1.88\text{A} \quad (91)$$

$$I_R = \frac{1}{R}U = 1\text{A}$$

$$I_L = \frac{1}{\omega L}U \approx 1.6\text{A} \quad (\text{Achtung : } I_R + I_L \neq I)$$

- Zeigerdiagramm:



5.6 Leistung

- komplexe Scheinleistung

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* \quad (92)$$

- Denn

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_U} e^{j\omega t}$$

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_I} e^{j\omega t}$$

$$\underline{U} \underline{I}^* = UI \cos(\varphi_U - \varphi_I) + jUI \sin(\varphi_U - \varphi_I)$$

- Wirkleistung

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) \quad (93)$$

- Blindleistung

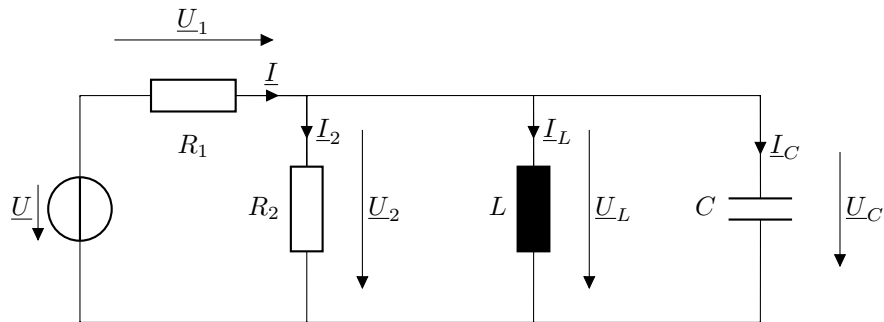
$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) \quad (94)$$

- Scheinleistung

$$S = |\underline{S}| \quad (95)$$

5.7 Ausführliche Beispiele

5.7.1 Beispiel 1

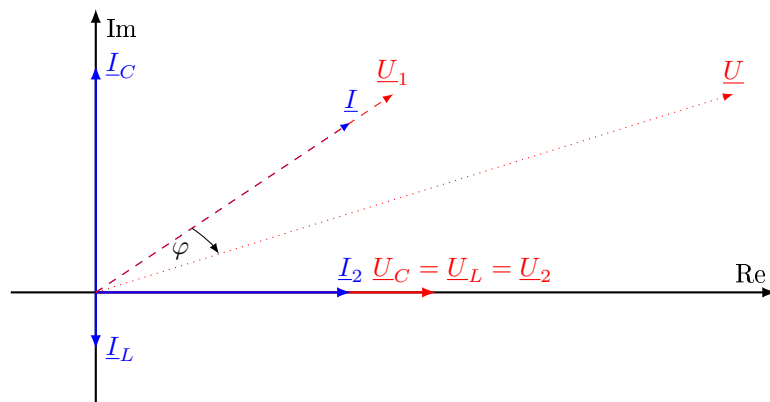


- Gegeben

$$\begin{aligned}
 U &= 100\text{V} \\
 R_1 &= 100\Omega, R_2 = 300\Omega \\
 C &= 20\mu\text{F}, L = 1\text{H} \\
 f &= 50\text{Hz}
 \end{aligned}$$

1. Zeigerdiagramm (mit $I_L < I_C$)

- Starte (weit weg von Spannungsquelle) mit $\underline{U}_C$
 - Zeichne relativ dazu $\underline{I}_C$
 - Zeichne $\underline{U}_L = \underline{U}_C$
 - Zeichne relativ dazu $\underline{I}_L$
 - Zeichne $\underline{U}_2 = \underline{U}_L$
 - Zeichne relativ dazu $\underline{I}_2$
 - Zeichne $\underline{I} = \underline{I}_2 + \underline{I}_L + \underline{I}_C$
 - Zeichne relativ dazu $\underline{U}_1$
 - Zeichne $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$
- Zeigerdiagramm:



- φ ist negativ $\rightarrow$ Schaltung ist ohmsch kapazitiv

2. Gesamtimpedanz berechnen

- Admittanz von R_2 , L , C

$$\begin{aligned}\underline{Y}_p &= \underline{Y}_2 + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C \\ &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\end{aligned}$$

- Gesamtimpedanz:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{ges}} &= \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_p} \\ &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ &= \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\right) - j\left(\frac{R_2^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{1 + R_2^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

- Am besten gleich Zahlenwerte einsetzen

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = (160 - j150) \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = (260 - j150) \Omega$$

3. Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}$ und $\underline{I}$

- Es gilt

$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{ges}} \underline{I}$$

- Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{Z}_{\text{ges}})}{\text{Re}(\underline{Z}_{\text{ges}})}\right) = \arctan\left(\frac{-150}{260}\right) \approx -29.8^\circ$$

4. Scheinleistung

W

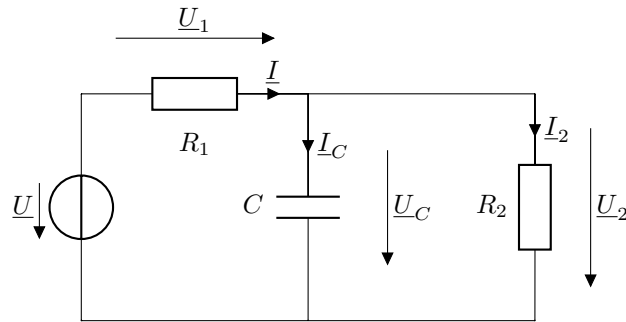
- Es gilt

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ges}}}\right)^* = \frac{U^2}{\underline{Z}_{\text{ges}}^*} = \frac{U^2}{Z_{\text{ges}}^2} \underline{Z}_{\text{ges}}$$

$$\underline{S} = (28.8 - j16.5) \text{ VA}$$

$$S = 33.2 \text{ VA}$$

5.7.2 Beispiel 2



- Gegeben

$$U = 100\text{V}$$

$$R_1 = 30\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$C = 40\mu\text{F}$$

$$f = 60\text{Hz (USA)}$$

- Gesucht: φ, I, S, P, Q
- Ersatzwiderstand:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C}$$

$$= \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + (R_2\omega C)^2} \right) - j \left(\frac{R_2^2\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2} \right)$$

$$= (48.3 - j5.5) \Omega$$

- Phase

$$\varphi = \arctan \left(\frac{-5.5}{48.3} \right) = -6.5^\circ$$

- Strom (Betrag)

$$I = \frac{U}{Z_{\text{ges}}} = 2.1\text{A}$$

- Scheinleistung (komplex)

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{U} \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \right)^* = \frac{U^2}{\underline{Z}_{\text{ges}}^*} = \frac{U^2}{Z_{\text{ges}}^2} \underline{Z}_{\text{ges}}$$

$$\underline{S} = (204 - j23) \text{VA}$$

- Wirkleistung

$$P = 204\text{W}$$

- Blindleistung

$$Q = -23\text{var}$$

$Q < 0$: kapazitiv

- Zusatz: Wie setzen sich Wirk- und Blindleistung zusammen?

– Spannungsteilerregel

$$\underline{U}_1 = \frac{R_1}{\underline{Z}_p + R_1} \underline{U} = \frac{R_1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_p + R_1} \underline{U} = \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \underline{U}$$

– Leistungen an

* R_1

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U}_1 \frac{\underline{U}_1^*}{R_1} = \frac{R_1}{\underline{Z}_{\text{ges}}^2} U^2 = 127\text{W}$$

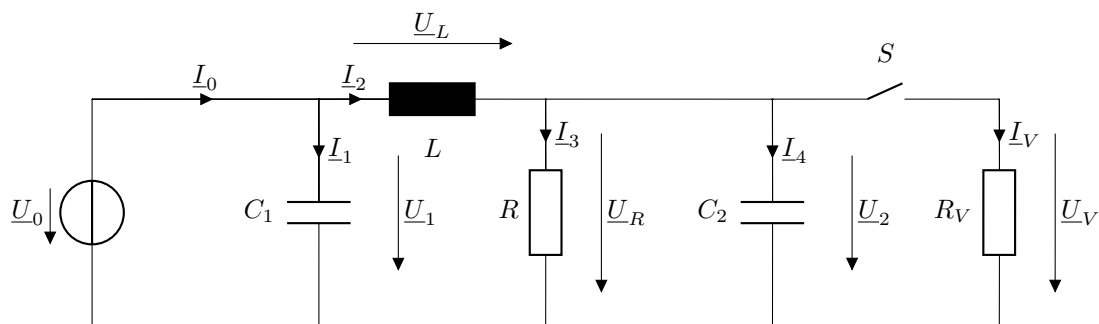
* R_2

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{U}_2 \frac{\underline{U}_2^*}{R_2} = \frac{\underline{Z}_p^2}{R_2 \underline{Z}_{\text{ges}}^2} U^2 = 77\text{W}$$

* C

$$\underline{S}_C = \underline{U}_C \underline{I}_C^* = \underline{U}_C \frac{\underline{U}_C^*}{-\frac{1}{j\omega C}} = -j \frac{\omega C \underline{Z}_p^2}{\underline{Z}_{\text{ges}}^2} U^2 = -23\text{var}$$

5.7.3 Beispiel 3



- Gegeben

$$X_L = 50\Omega$$

$$X_{C_1} = 100\Omega$$

$$X_{C_2} = 50\Omega$$

$$R = 50\Omega$$

$$f = 50\text{Hz}$$

- Der Schalter ist zunächst geöffnet ($\underline{I}_V = 0$) und es sei $\underline{U}_0 = 100\text{V}$
- Gesucht: L , C_2 , $\underline{Z}_{RC}$ (aus R , C_2), $\underline{Z}_2$ (aus R , C_2 , L), $\underline{I}_0$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, Phase φ zwischen $\underline{I}_0$ und $\underline{U}_0$, Amplitude $\hat{u}_2$ von $\underline{U}_2$, qualitatives Zeigerdiagramm

1. Blindwiderstände

$$X_L = \omega L \rightarrow L = \frac{1}{\omega} X_L = \frac{50\Omega}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 0.159\text{H}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega X_{C_2}} = 63.7\mu\text{F}$$

2. Impedanzen

$$\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_R \parallel \underline{Z}_{C_2} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_{C_2}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{C_2}}$$

$$= \frac{R(-jX_{C_2})}{R - jX_{C_2}} = \frac{RX_{C_2}}{R^2 + X_{C_2}^2} (X_{C_2} - jR)$$

$$= (25 - j25)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{RC}$$

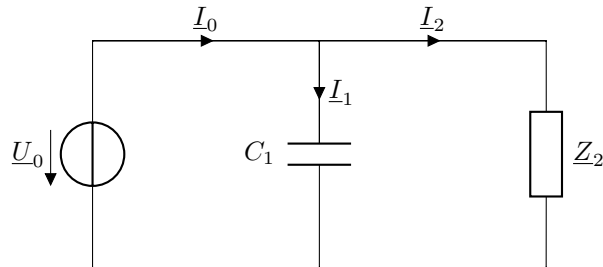
$$= jX_L + \frac{RX_{C_2}}{R^2 + X_{C_2}^2} (X_{C_2} - jR)$$

$$= \frac{1}{R^2 + X_{C_2}^2} (RX_{C_2}^2 + j(X_L(R^2 + X_{C_2}^2) - R^2 X_{C_2}))$$

besser gleich mit Zahlen:

$$\underline{Z}_2 = j50\Omega + (25 - j25)\Omega = (25 + j25)\Omega$$

3. Ersatzschaltung



$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = \frac{100\text{V}}{(25 + j25)\Omega} = (2 - j2)\text{A}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{C_1}} = j \frac{1}{X_{C_1}} \underline{U}_0 = j1\text{A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (2 - j)\text{A}$$

Achtung: Knotenregel gilt nicht für Beträge:

$$I_0 = \sqrt{5} \neq 1 + 2\sqrt{2} = I_1 + I_2$$

Alternativ:

- Bei Kenntnis von $\underline{I}_1$ oder $\underline{I}_2$ die anderen Ströme über Stromteiler berechnen
- Gesamtimpedanz $\underline{Z} = \underline{Z}_{C_1} \parallel \underline{Z}_2$ ausrechnen und $\underline{I}_0$ bestimmen.

4. Phase

$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{100}{2 - j}\Omega = 20(2 + j)\Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ$$

Alternative:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 - \varphi_i = -\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ$$

Schaltung ist ohmsch induktiv

5. Benötige $\underline{U}_2$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_R = \underline{U}_{C_1} - \underline{U}_L = \underline{U}_0 - \underline{U}_L$$

$$= \underline{U}_0 - jX_L I_2$$

$$= 100\text{V} - j50(2 - j2)\text{V} = -j100\text{V}$$

$$\underline{U}_2(t) = 100\text{V} \cdot e^{-j90^\circ} e^{j\omega t}$$

$$\hat{u}_2 = \sqrt{2} \cdot 100\text{V} = 141\text{V}$$

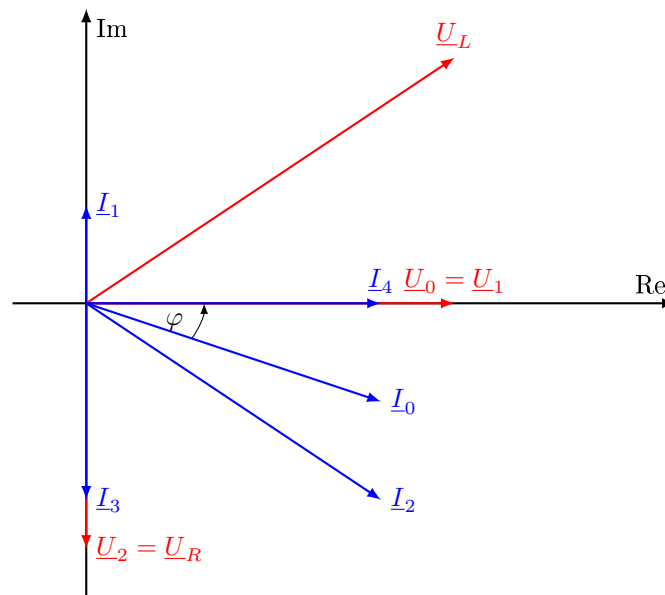
Alternative über Spannungsteiler

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{RC}} \underline{U}_0 = \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_2} \underline{U}_0 = \frac{1-j}{1+j} \underline{U}_0 = -j100\text{V}$$

Schnellste Alternative

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{RC} I_2 = (2 - j2)(25 - j25)\text{V} = -j100\text{V}$$

6. Zeigerdiagramm qualitativ



- Der Schalter wird nun geschlossen. Dabei gelte nun $R_V = 25\Omega$, $U_V = |\underline{U}_V| = 50\text{V}$ und $U_0 = |\underline{U}_0| = 150\text{V}$

- Gesucht: Wirkleistung P_0 der Quelle, Ersatzadmittanz $\underline{Y}_3$ von R , C_2 und R_V sowie die Blindleistungen Q_L , Q_0 und anschließend die Größe von X_{C_1} , damit $Q_0 = 0$ wäre.

1. Wirkleistung an den Widerständen

W

$$P_0 = P = U_V I_V + U_R I_3 = \frac{U_V^2}{R_V} + \frac{U_V^2}{R} = 150 \text{ W}$$

2. Ersatzadmittanz

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{\underline{Z}_{RC}} = \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{25(1-j)\Omega} = \frac{1}{50}(3+j) \text{ S}$$

3. Blindleistung Q_L

$$Q_L = \text{Im}(\underline{U}_L \underline{I}_2^*) = \text{Im}(j X_L I_2^2) = X_L I_2^2$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_3 \underline{U}_V \rightarrow I_2 = Y_3 U_V = \frac{\sqrt{10}}{50} 50 \text{ A} = \sqrt{10} \text{ A}$$

$$Q_L = 500 \text{ var}$$

4. Blindleistung Q_0

$$Q_0 = \text{Im}(\underline{U}_0 \underline{I}_0^*) = U_0^2 \text{Im}(\underline{Y}_{\text{ges}}^*)$$

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{jX_L + \frac{1}{\underline{Y}_3}} = \left(\frac{j}{100} + \frac{1}{j50 + \frac{50}{3+j}} \right) \text{ S}$$

$$= \left(\frac{j}{100} + \frac{1}{150}(1-j3) \right) \text{ S}$$

$$Q_0 = \left(-\frac{1}{100} + \frac{1}{50} \right) 150^2 \text{ var} = 225 \text{ var}$$

Alternative:

$$Q_0 = Q_{C_1} + Q_{C_2} + Q_L$$

$$= -U_1 I_1 - U_2 I_4 + Q_L$$

$$= -\frac{1}{X_{C_1}} U_0^2 - \frac{1}{X_{C_2}} U_V^2 + Q_L$$

$$= (-225 - 50 + 500) \text{ var} = 225 \text{ var}$$

5. Rechnung zu C_1 . Es muss gelten

$$Q_0 = \left(-\frac{1}{X_{C_1}} + \frac{1}{50\Omega} \right) 150^2 \text{V}^2 = 0$$

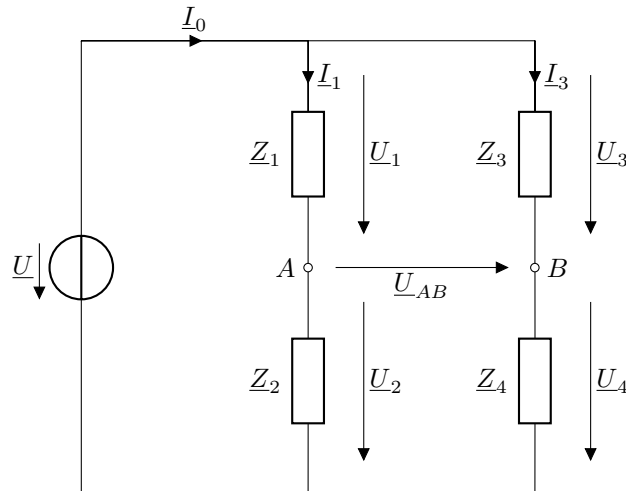
$$\rightarrow X_{C_1} = 50\Omega$$

Alternative:

$$\frac{1}{X_{C_1}} U_0^2 = 450 \text{var}$$

$$\rightarrow X_{C_1} = 50\Omega$$

5.8 Brückenschaltung



- Die Wheatstonesche Brücke ermöglicht eine genaue Messung von Impedanzen durch einen Spannungsabgleich
- Betrachtung für $U_{AB} = 0$:

– Maschenregel:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_{AB} = \underline{U}_3$$

$$\underline{U}_4 + \underline{U}_{AB} = \underline{U}_2$$

– Daraus folgt

$$\underline{Z}_1 I_1 = \underline{Z}_3 I_3$$

$$\underline{Z}_4 I_3 = \underline{Z}_2 I_1$$

– und damit

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

- Abgleichbedingung:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

- In Polardarstellung mit $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$:

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

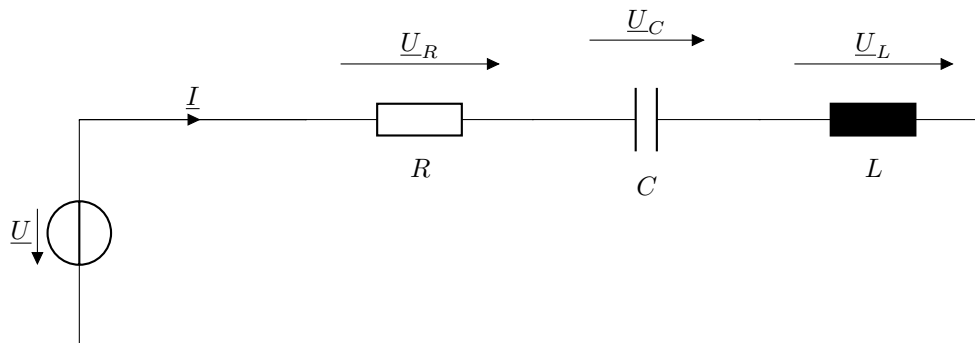
$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

5.9 Schwingkreise

- Man benötigt mindestens zwei Energiespeicher (L und C)
- Dann kann in einem System Energie zwischen den beiden Speichern hin- und hertransportiert werden.
- Schwingkreise werden hauptsächlich in der Nachrichtentechnik zur Erzeugung bestimmter Frequenzen (Sender) und als Filter zur Selektierung einzelner Frequenzen aus einem Frequenzgemisch eingesetzt (Abstimmung der Empfangsfrequenz beim Rundfunk).
- Bei hohen Frequenzen (MHz-Bereich) werden auch Resonanzen zwischen elektrischen und mechanischen Energiespeichern genutzt. Beispielsweise werden Quarzkristalle piezoelektrisch angeregt. Sie schwingen dann mit ihrer mechanischen Eigenfrequenz. Dieses Prinzip wird u.a. in Uhren und in Computern angewendet.

5.9.1 Reihenschwingkreis

- Schaltbild



- Maschenregel:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L$$

ableiten:

$$\frac{d}{dt}\underline{U} = R \frac{d}{dt}\underline{I} + \frac{1}{C}\underline{I} + L \frac{d^2}{dt^2}\underline{I}$$

- Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} \underline{I} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} \underline{I} + \frac{1}{CL} \underline{I} = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \underline{U} \quad (96)$$

- Ohne anliegende Spannung ($U = 0$) erhalten wir eine Lösung mit dem Ansatz $\underline{I}(t) = Ae^{\lambda t}$. Einsetzen liefert

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

und damit

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

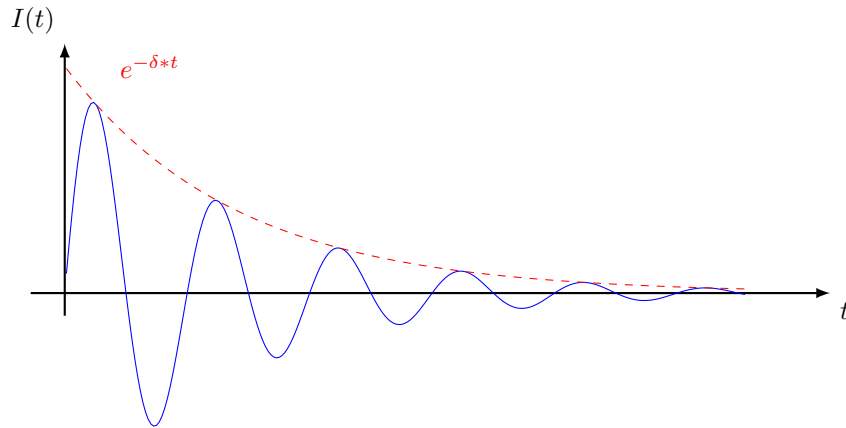
- Wir setzen $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Für $\omega_0^2 > \delta$ ist der Term unter der Wurzel negativ. Wir erhalten dann

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

und

$$\underline{I}(t) = e^{-\delta t} \left(A_1 e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} + A_2 e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} \right)$$

- Wir sehen, dass die Lösung eine gedämpfte Schwingung beschreibt



- Die Dämpfung wird hierbei durch die Dämpfungskonstante δ beschrieben.
- Im Grenzfall $R \rightarrow 0$ schwingt die Stromstärke mit der Kreisfrequenz ω_0 . Dies ist die sogenannte Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingkreises.
- Mit den beiden Größen ω_0 und δ haben wir die Differentialgleichung in der Form

$$\ddot{\underline{I}} + 2\delta \dot{\underline{I}} + \omega_0^2 \underline{I} = \frac{1}{L} \dot{\underline{U}}$$

wobei der Punkt eine Ableitung nach der Zeit anzeigt.

Erzwungene Schwingung

- Wir betrachten nun den Fall, dass die Wechselspannungsquelle eingeschaltet ist:

$$\underline{U}(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

- Einsetzen in obige Differentialgleichung liefert

$$\frac{d^2}{dt^2} \underline{I} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} \underline{I} + \frac{1}{CL} \underline{I} = \frac{1}{L} j\omega U_0 e^{j\omega t}$$

- Neben der obigen Lösung (der homogenen Differentialgleichung), müssen wir nun aufgrund des zusätzlichen, von $\underline{I}$ unabhängigen Terms, die sogenannte partikuläre Lösung der Differentialgleichung finden. Hierfür machen wir den Ansatz

$$\underline{I}(t) = I e^{j\omega t}$$

- Einsetzen liefert:

$$I \cdot \left(-\omega^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{CL} \right) = \frac{1}{L} j\omega U_0$$

und damit

$$I = \frac{U_0}{R + \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)}$$

- Die Gesamtlösung lautet damit

$$\underline{I}(t) = e^{-\delta t} \left(A_1 e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \delta} \cdot t} + A_2 e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \delta} \cdot t} \right) + \frac{U_0}{R + \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)} e^{j\omega t}$$

- Der vordere Teil verschwindet aufgrund der Dämpfung nach endlicher Zeit. Der zweite Teil beschreibt die erzwungene Schwingung des Schwingkreises.
- Der Schwingkreis schwing dann mit der von der Spannungsquelle vorgegebenen Frequenz.
- Wir betrachten den zweiten Teil von $\underline{I}$ genauer:

- Mit der Ersatzimpedanz

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R + j \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L \right)$$

sieht man

$$\underline{I}(t) = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{Z}_{\text{ges}}}$$

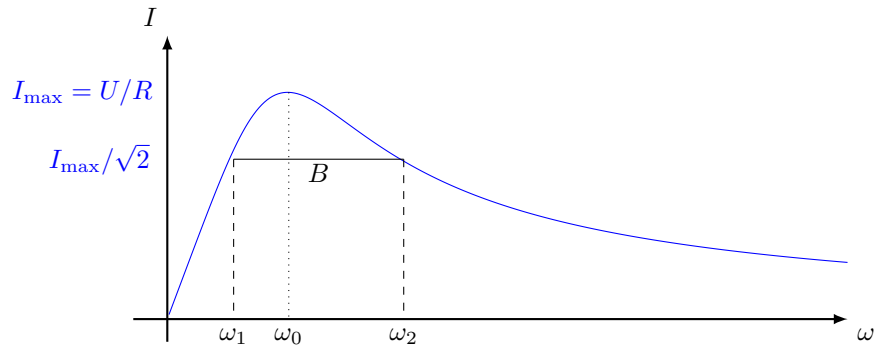
- Weiterhin wird für $\omega = \omega_0$ wird der Imaginärteil von $\underline{Z}_{\text{ges}}$ Null und damit der Betrag der effektiven Stromstärke

$$I = \frac{U}{Z_{\text{ges}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}}$$

für $\omega = \omega_0$ maximal:

$$I_{\text{max}} = \frac{U_0}{R}$$

- Die Amplitude, mit der die Stromstärke schwingt, hängt beim Schwingkreis also von der Frequenz ω ab, mit der die Spannungsquelle die Schwingung erzwingt.
- Ohne Dämpfung ($\delta = 0$ bzw. $R = 0$) kommt es zur sogenannten Resonanzkatastrophe, bei der die Stromstärke so lange anwächst, bis die Schaltung kaputt geht.
- Für technische Anwendung relevant ist der Bereich, in dem die Stromstärke größer ist als $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. Dieser wird Bandbreite B genannt.



- Die Güte des Schwingkreises beschreibt, wie schnell die gespeicherte Energie aufgrund der Dämpfung verloren geht. Sie ist definiert als

$$Q = 2\pi \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Verlust in einer Periode}} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L \hat{i}^2}{\int_0^T R i(t) u(t) dt} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L \hat{i}^2}{R \hat{i}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} \right)} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\delta}$$

oder auch

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{B}$$

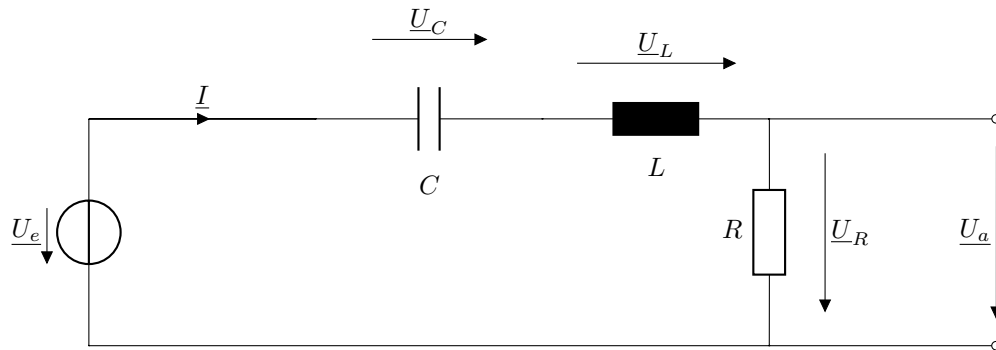
- Betrachten wir zum Schluss die Leistung:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{U^2}{\underline{Z}_{\text{ges}}^*} = U^2 \frac{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Bei ω_0 ist die Blindleistung Null und es ist $P_{\omega_0} = \frac{1}{R} U^2$ (dies gilt nur für diesen Schwingkreis).

Anwendung

- Man kann Reihenschwingkreise als Frequenzfilter einsetzen. Hat man ein Eingangssignal U_e , das verschiedene Frequenzkomponenten enthält, so lässt sich mit einem Reihenschwingkreis gezielt ein schmaler Frequenzbereich herausfiltern:



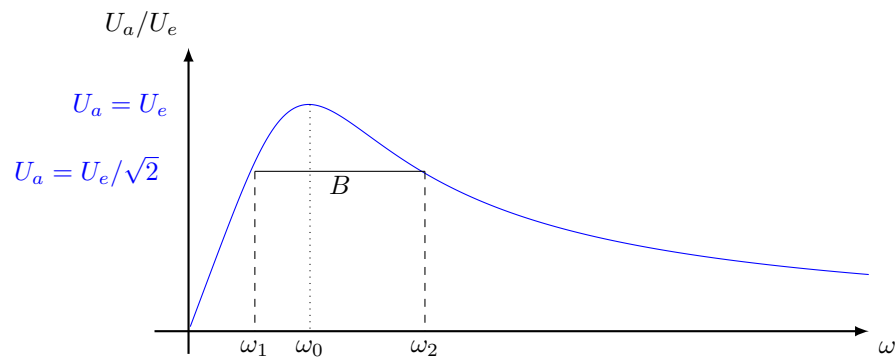
- Für die Ausgangsspannung gilt

$$\underline{U}_a = \frac{R}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \underline{U}_e$$

bzw.

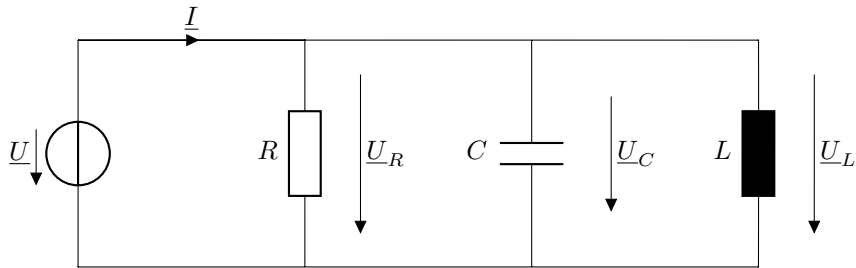
$$U_a = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} U_e$$

- Man sieht, dass die Ausgangsspannung frequenzabhängig ist und nur für $\omega = \omega_0$ gleich der Eingangsspannung ist.
- Nur für Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz ω_0 wird die Eingangsspannung nahezu ohne Dämpfung durchgelassen



5.9.2 Parallelschwingkreis

- Analog zum Reihenschwingkreis kann man auch einen Parallelschwingkreise betrachten.
- Schaltbild



- Knotenregel

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L$$

ableiten:

$$\frac{d}{dt}\underline{I} = \frac{1}{R} \frac{d}{dt}\underline{U} + C \frac{d^2}{dt^2}\underline{U} + \frac{1}{L}\underline{U}$$

- DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}\underline{U} + \frac{1}{CR} \frac{d}{dt}\underline{U} + \frac{1}{CL}\underline{U} = \frac{1}{C} \frac{d}{dt}\underline{I} \quad (97)$$

- Lösung analog zu oben.

- Betrachte $\underline{I}$:

- Ersatzadmittanz:

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

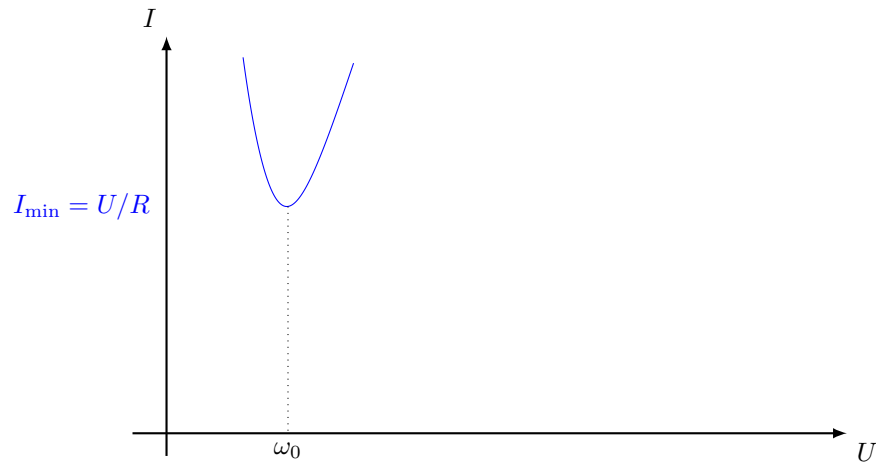
für $\omega = \omega_0$ wird der Imaginärteil Null.

- Strom

$$I = Y_{\text{ges}} U = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} U$$

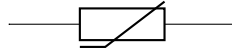
wird minimal für $\omega = \omega_0$

- Skizze

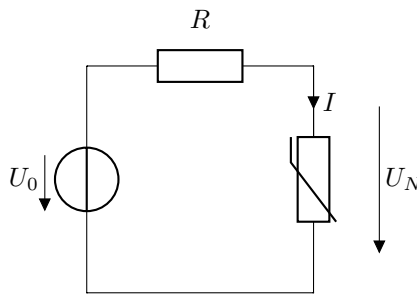


6 Nichtlineare Bauteile

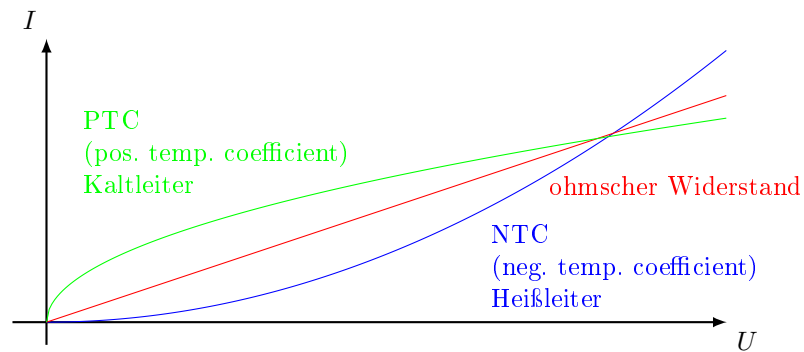
- In der Realität weisen alle elektrischen Bauelemente ein nichtlineares Verhalten in der Strom-Spannungs-Kennlinie auf.
- Diese Kennlinie bzw. das Kennlinienfeld muss zuerst gemessen werden.
- Schaltsymbol für nichtlineares Bauteil:



- Einfache Schaltung für Zweipol:

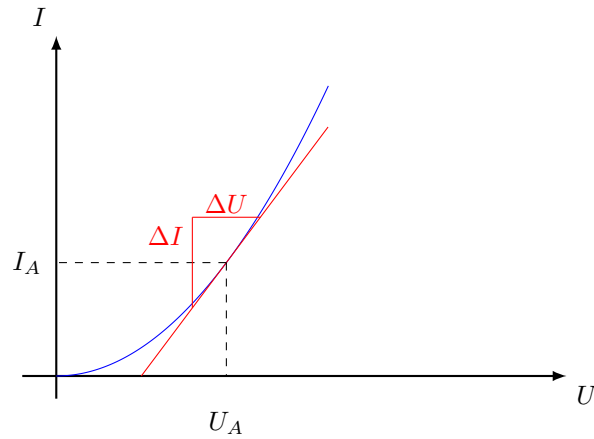


- Typische Ergebnisse:



- Ein Netzwerk, das mindestens einen nichtlinearen Widerstand enthält, wird als nichtlineares Netzwerk definiert.

6.1 Statischer / Differentieller Widerstand



- Statischer Widerstand

$$R_s = \frac{U_A}{I_A} \quad (98)$$

– ist der Wert des Widerstandes in jedem Punkt der Strom-Spannungs-Kennlinie (SSK)

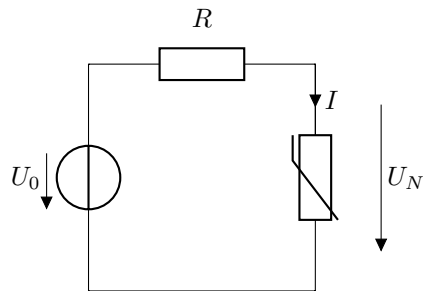
- Differentieller Widerstand

$$R_d = \frac{dU}{dI} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (99)$$

– ist der Widerstand, der einem kleinen Arbeitsbereich auf der Kennlinie zugeordnet ist (Tangentensteigung)

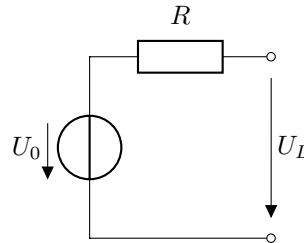
- R_d bestimmt man meist näherungsweise graphisch (ansonsten bräuchte man die Formel $I(U)$)
- Es gilt $R_s \geq 0$, während R_d auch negativ sein kann.

6.2 Arbeitspunkt und Arbeitsgerade

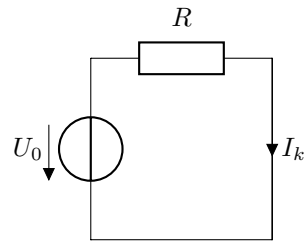


- Um unsere bekannten Methoden verwenden zu können, müssen wir die Kennlinie um einen bestimmten Punkt linearisieren.
- Bestimme Arbeitsgerade (Bauteil abklemmen und kurzschließen)
 - Leerlauf (hier: $U_L = U_0$)

W



- Kurzschluss (hier: $I_k = \frac{U_0}{R}$)

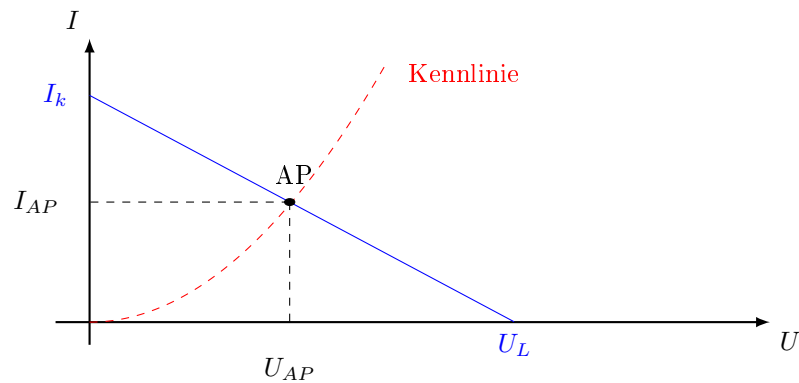


- Oder Arbeitsgerade aus MR:

$$U_0 = IR + U_N$$

$$I = -\frac{1}{R}U_N + \frac{U_0}{R} = I_k \left(1 - \frac{U_N}{U_L}\right) \quad (100)$$

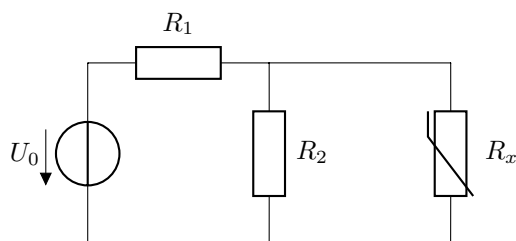
- Arbeitsgerade und Kennlinie einzeichnen



- Der Schnittpunkt ergibt den für diese Spannung sich einstellenden Arbeitspunkt (I_{AP}, U_{AP}) , d.h. diese Spannung und dieser Strom herrschen am nichtlinearen Bauteil.

- Wenn der AP gefunden ist, kann eine Linearisierung um diesen durchgeführt werden, d.h. es wird dann anstatt mit der nichtlinearen Kennlinie mit der Tangenten weitergearbeitet.
- Dazu wird dann auch ein lineares Ersatzschaltbild aufgestellt.

6.2.1 Beispiel



- Gegeben

$$U_0 = 15\text{V}$$

$$R_1 = 30\Omega$$

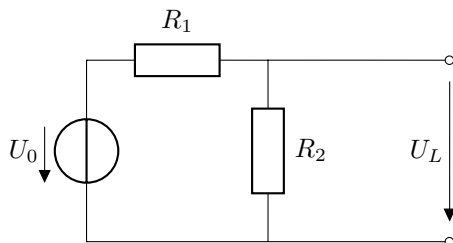
$$R_2 = 60\Omega$$

$$R_x\text{--Kennlinie}$$

1. Arbeitsgerade

W

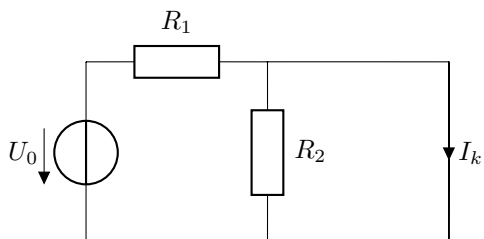
- Leerlauf:



mit Spannungsteiler:

$$U_L = U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = 10\text{V}$$

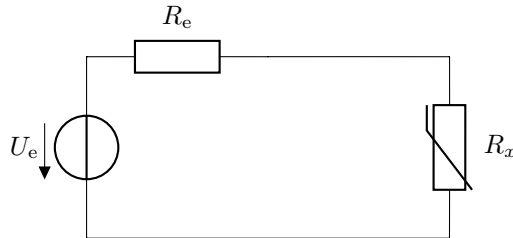
- Kurzschluss



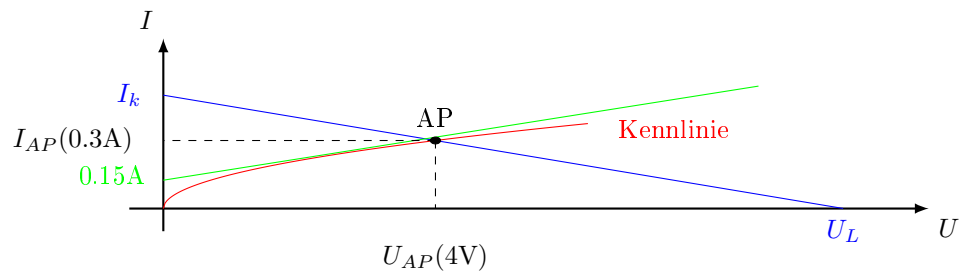
ablesen:

$$I_k = I = \frac{U_0}{R_1} = 0.5\text{A}$$

- Man macht im Prinzip die Konstruktion einer Ersatzspannungsquelle ($R_e = U_L/I_k$) und betrachtet mit dieser anschließend das nichtlineare Bauteil



2. Arbeitspunkt, Kennlinie linearisieren



- statischer Widerstand:

$$R_s = \frac{U_{AP}}{I_{AP}} = \frac{4\text{V}}{0.3\text{A}} = 13.3\Omega$$

- differentieller Widerstand (ebenfalls ablesen):

$$R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{4\text{V}}{0.15\text{A}} = 26.6\Omega$$

- linearisierte Kennlinie:

$$I = 0.15\text{A} + \frac{1}{26.6\Omega}U \quad (101)$$

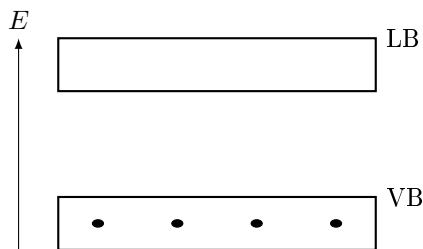
- allgemein:

$$I = I_{AP} \left(1 - \frac{R_s}{R_d} \right) + \frac{1}{R_d}U$$

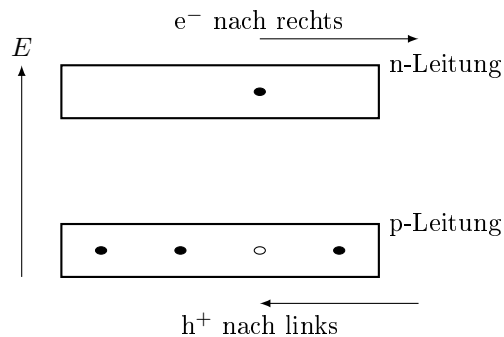
7 Halbleiter

7.1 Überblick

- Sind vor allem Elemente der 4. Hauptgruppe des Periodensystems (C, Si, Ge, Sn, Pb). Technisch wichtig sind Silizium und Germanium.
- Tetraederförmig aufgebaut
- 4 Außenelektronen, die alle an kovalenten Bindungen beteiligt sind, d.h. alle Außenelektronen sind in Valenzband (VB):



- Bei höheren Temperaturen können sie in das leere Leitungsband (LB) springen (zwischen VB und LB gibt es eine Energielücke)
- Diese Elektronen sowie die entstehenden Löcher im VB tragen dann zum Stromfluss bei:

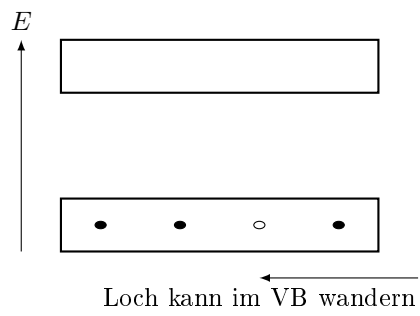


- Die Leitfähigkeit ist also temperaturabhängig und steigt mit zunehmender Temperatur

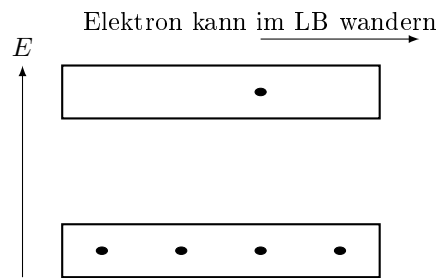
W

7.2 Dotierung

- Gezielte Verunreinigung von Halbleitern mit Elementen der
 - 3. Hauptgruppe (Al, Ga, Zn) → ein Elektron zu wenig: p-dotiert

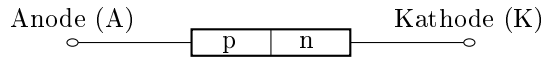


- 5. Hauptgruppe (P, As, Sb) → ein Elektron zu viel: n-dotiert

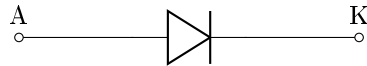


8 Dioden

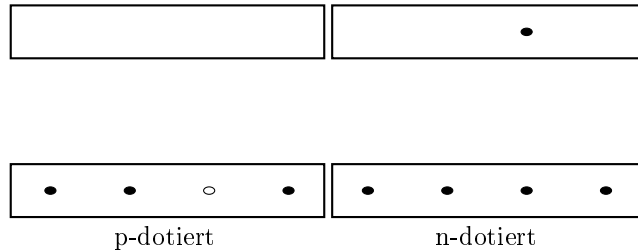
- Bringe p- und n-dotierte Halbleiter zusammen $\rightarrow$ pn-Übergang = Diode (neues Bauteil)



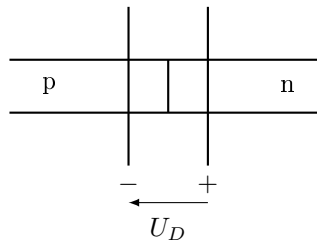
- Schaltsymbol



- Betrachtung des pn-Übergangs:



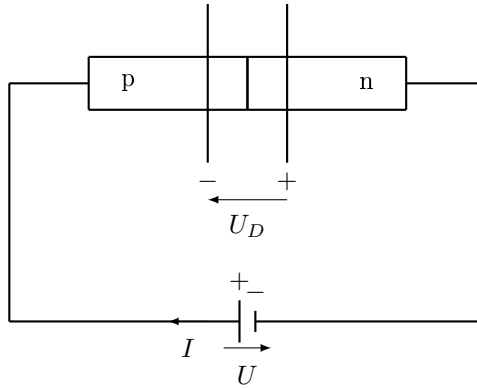
- Elektronen aus dem LB von n-dotierter Seite wandern nach links (Diffusionsstrom)
- Führt zu einer Sperrschicht



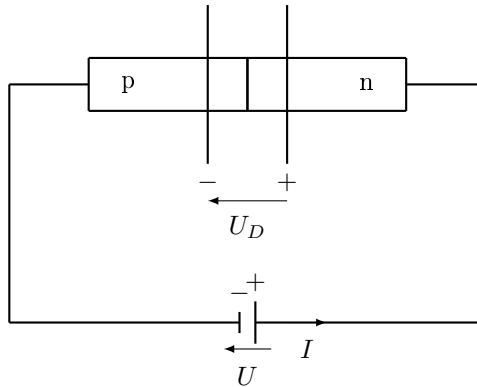
- Die Sperrschicht/Raumladungszone hindert die Elektronen am Wandern nach links bzw. Löcher am Wandern nach rechts.
- Der Diffusionsstrom fließt, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat.
- typische Werte:

$$\begin{aligned} \text{Si : } & U_D \approx 0.6 - 0.7\text{V} \\ \text{Ge : } & U_D \approx 0.2 - 0.3\text{V} \\ \text{GaAs : } & U_D \approx 1.4 - 2.9\text{V} \end{aligned}$$

- Anlegen einer Spannung:
 - Durchlassrichtung: Sperrschicht wird kleiner und für $U > U_D$ fließt ein Strom



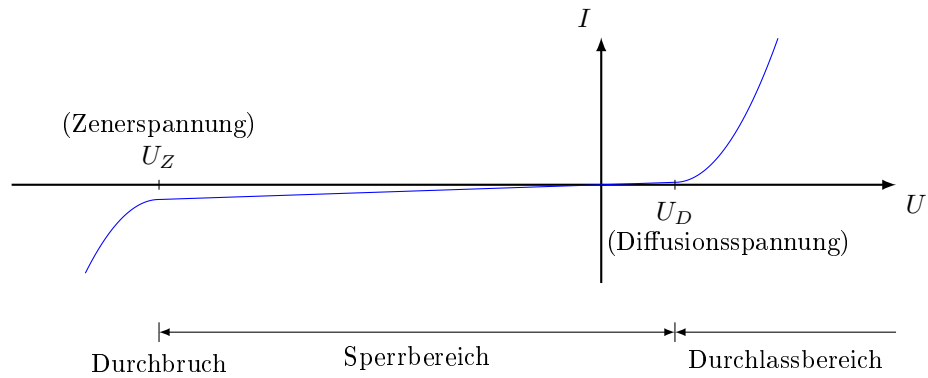
- Sperrrichtung: Diode wird hochohmiger, sperrt



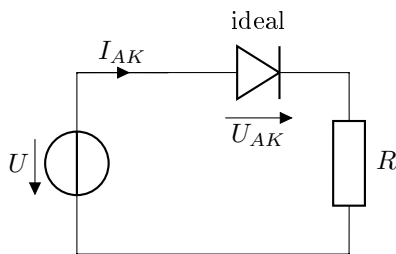
- Anmerkung:
 - Bei negativen Spannungen fließt zunächst (fast) kein Strom durch die Diode.
 - Jedoch wird ab einer gewissen negativen Spannung die Feldstärke im Halbleiter so groß, dass durch die Energie im elektrischen Feld weitere Ladungsträger freigesetzt werden.
 - Die aufgrund der entstehenden Verluste einsetzende Erwärmung bedingt eine weitere thermisch bedingte Freisetzung von Ladungsträgern.
 - Der Vorgang wird als Lawinen- oder Zener-Durchbruch bezeichnet.
 - Dabei gilt $U_Z \propto \frac{1}{d}$ mit der Dotierungskonzentration d .

8.1 Kennlinienfeld

- Messung erfolgt wie bei nichtlinearen Bauteilen

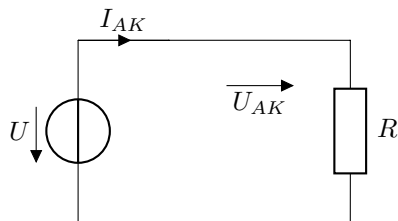


8.2 Ideale Diode



- Die ideale Diode ist ein hypothetisches Bauteil.

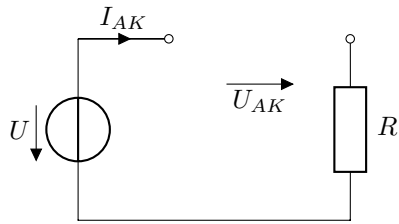
1. $U > 0$



- Diode in Durchlassrichtung
- Strom fließt wie eingezeichnet
- Diode im Kurzschluss, also $I_{AK} = \text{konst.}$, $U_{AK} = 0$ (hier ist $I_{AK} = \frac{U}{R}$)

W

2. $U < 0$

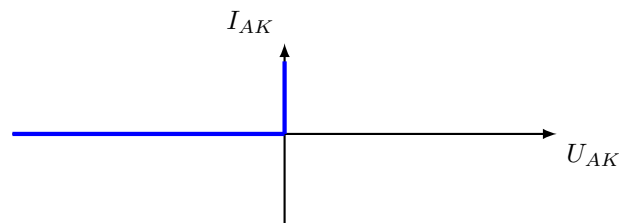


- Diode in Sperrrichtung
- Es fließt kein Strom
- Diode als Unterbrecher, also $I_{AK} = 0$, $U_{AK} = \text{konst}$ (hier ist $U_{AK} = U < 0$, d.h. Pfeile umdrehen)

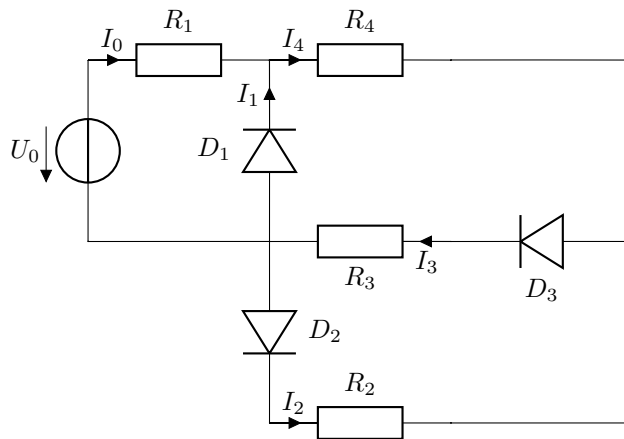
W

3. Kennlinie:

W



8.2.1 Beispiel



- Die Dioden D_1 , D_2 , D_3 sind ideal.
- Gegeben:

$$U_0 = 12\text{V}$$

$$R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 80\Omega$$

- Gesucht: Alle Ströme und Spannungen

- Rechnung:

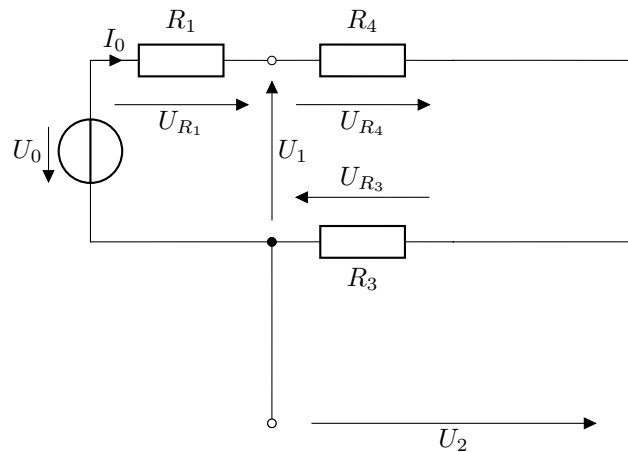
- Ausgehend von I_0 gilt

$$I_1 = I_2 = 0$$

- und mit Knotenregel:

$$I_0 = I_3 = I_4$$

- Schaltbild:



- Ströme:

$$I_0 = I_3 = I_4 = \frac{U_0}{3R} = 0.05\text{A}$$

- Spannungen:

$$U_{R_1} = U_{R_3} = U_{R_4} = I_0 R = \frac{U_0}{3} = 4\text{V}$$

- Mit Maschenregel:

$$U_{D_2} = -U_{R_3} = -4\text{V}$$

$$U_{D_1} = U_{R_1} - U_0 = -8\text{V}$$

- Es gilt also:

- * Spannungen an sperrenden Dioden < 0
- * Ströme ≥ 0
- * Spannungen an Widerständen ≥ 0

- Detaillierte Betrachtung:

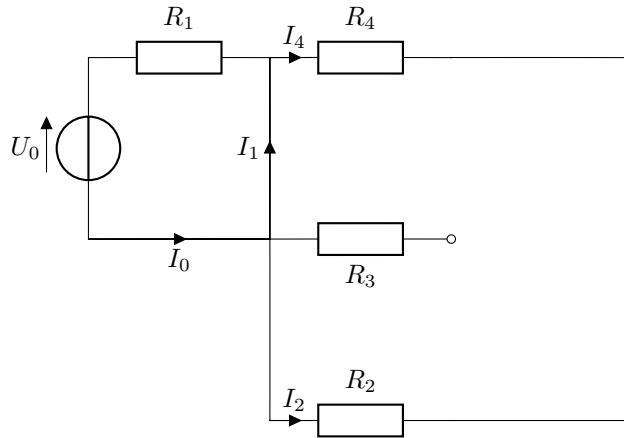
1. Falls $I_1 > 0$

- Dann folgt $U_{D_1} = 0$ und mit MR $U_{R_1} = U_0$

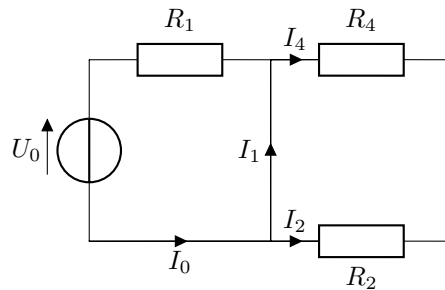
- Dann fiele also auch die gesamte Leistung der Quelle $P = U_0 I$ am Widerstand R_1 ab.
Alle anderen Ströme müssten Null sein.
- Insbesondere $I_4 = 0$ und damit über KR $I_0 = I_4 - I_1 = -I_1 < 0$ (Widerspruch)

- Rechnung für $U_0 < 0$

- Richtung von I_0 ändert sich.
- Es kann fließen: I_1, I_2, I_4
- Schaltbild:



- Übersichtlicher:



- Strom nimmt Weg des geringsten Widerstandes. Also:

$$I_0 = I_1 = \frac{U_0}{R} = 0.15\text{A}$$

- Und damit:

$$U_{R_1} = U_0 = 12\text{V}$$

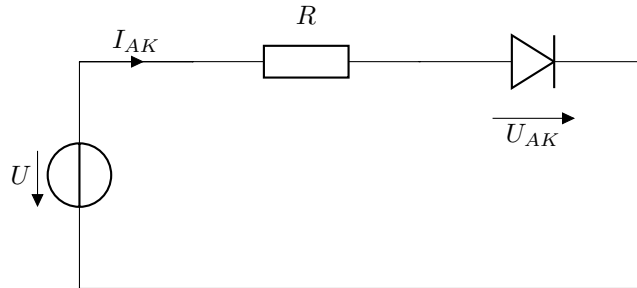
$$I_2 = I_3 = I_4 = 0$$

$$U_{D_1} = U_{D_2} = U_{D_3} = 0$$

$$U_{R_2} = U_{R_3} = U_{R_4} = 0$$

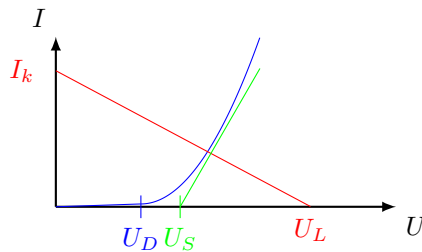
8.3 Reale Diode

1. Messung der Kennlinie

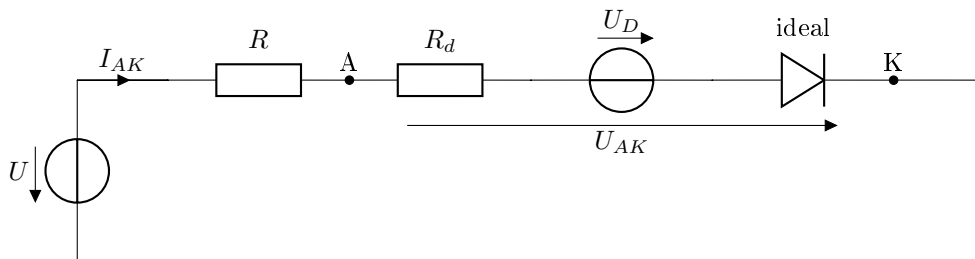


2. Arbeitsgerade und Kennlinie in gleiches Schaubild einzeichnen

3. Linearisierung im Arbeitspunkt

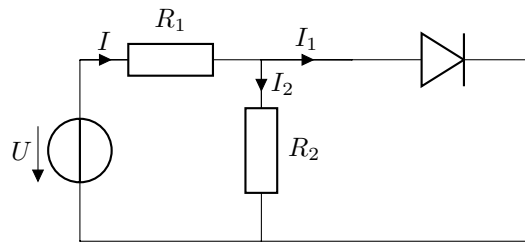


- Schwellenspannung: U_S (für uns ist immer $U_S = U_D$)
- Linearisierte Kennlinie:
 - $U_{AK} < U_D$: $I_{AK} = 0$
 - $U_{AK} = U_D$: Übergang vom Sperr- zum Durchlassbereich
 - $U_{AK} > U_D$: $I_{AK} = \frac{1}{R_d} (U_{AK} - U_D)$ mit $\frac{1}{R_d} = \left. \frac{dI_{AK}}{dU_{AK}} \right|_{AP}$ (Messtechnisch wird R_d aus der Sekantensteigung abgeschätzt)
- Ersatzschaltbild:



- Sperrrichtung ($U < U_D$): $I_{AK} = 0$
- Durchlassrichtung ($U > U_D$): $U_{AK} = R_d I_{AK} + U_D$ bzw. $I_{AK} = \frac{1}{R_d} (U_{AK} - U_D)$

8.3.1 Beispiel



- Gegeben (Linearisierung schon durchgeführt):

$$U = 12\text{V}$$

$$R_1 = 30\Omega$$

$$R_2 = 10\Omega$$

$$U_D = 1\text{V}$$

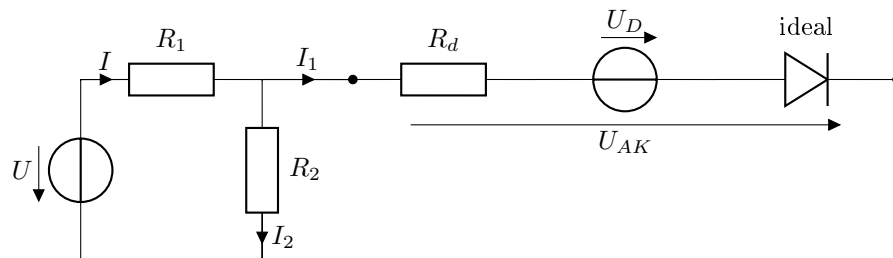
$$R_d = 0.5\Omega$$

- Gesucht: I_1 , I_2 , I

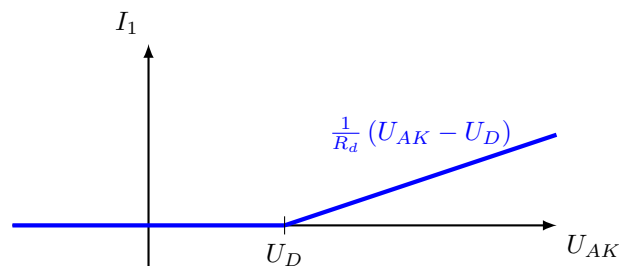
1. Sonderfall: Diode ist ideal

- Hier ist Betrieb in Durchlassrichtung
- Diode kurzschließen
- $I_2 = 0$, $I = I_1 = \frac{U}{R_1} = 0.4\text{A}$

2. Linearisiertes Bild:



und Skizze



3. Ströme berechnen

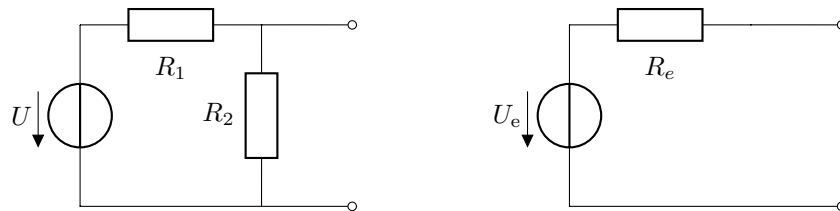
- Mit MR und KR ist aufwendig
- Mit Überlagerungssatz ist nicht ganz so aufwendig
- Mit Ersatzspannungsquelle ist bester Weg

W

W

W

4. Ersatzspannungsquelle:



- Leerlauf:

$$U_L = U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

und

$$U_L = U_e$$

Damit

$$U_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = 3V$$

- Kurzschluss:

$$I_k = I_1 = \frac{U}{R_1}$$

und

$$I_k = \frac{U_e}{R_e}$$

Damit

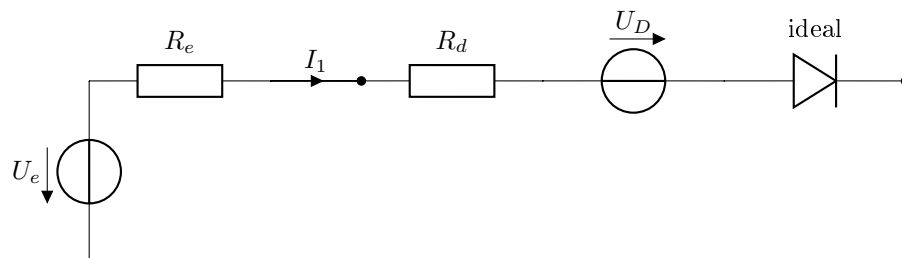
$$R_e = \frac{U_e}{U} R_1 = 7.5\Omega$$

beziehungsweise direkt

$$R_e = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 7.5\Omega$$

- Also

W



- Maschenregel:

$$U_e = (R_e + R_d) I_1 + U_D$$

$$I_1 = 0.25\text{A}$$

- Verwende I_1 in Ausgangsschaltung
 - Maschenregel

W

$$U_2 = U_{AK} = R_d I_1 + U_D = R_2 I_2$$

$$I_2 = 0.1125\text{A}$$

- Knotenregel:

$$I = I_1 + I_2 = 0.3625\text{A}$$

5. Arbeitspunkt

- Diode ist linearisiert um Arbeitspunkt, der sich bei gegebenem U , R_1 , R_2 einstellt

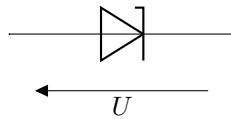
W

$$I_{AP} = I_1 = 0.25\text{A}$$

$$U_{AP} = R_d I_1 + U_D = 1.125\text{V}$$

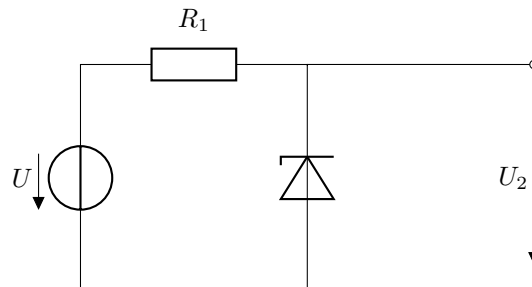
8.4 Zenerdioden

- Schaltsymbol:

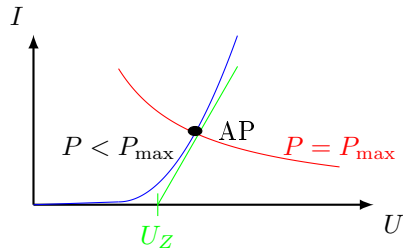


- Wird in Sperrrichtung betrieben
- Nutzt Effekt, dass die Durchbruchspannung U_Z nahezu unabhängig vom Strom ist und dient damit zur Spannungsstabilisierung (hier ist $U_2 = U_Z = \text{konstant}$, sobald U_1 einen Grenzwert überschreitet):

W



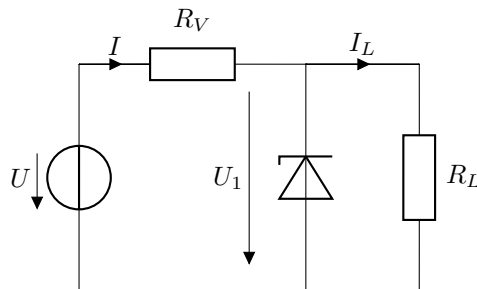
- Übersteht Durchbruch unbeschadet, falls Maximalstrom bzw. Maximalleistung $P_{\max}$ nicht überschritten wird.
- Linearisierung:



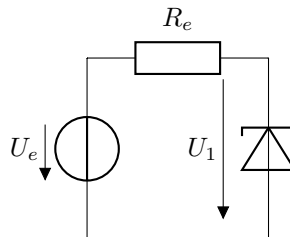
- $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$ ist im Allgemeinen kleiner als in Durchlassrichtung
- Leistung:
 - Es gibt eine maximale Leistung $P_{\max} = UI$
 - $I = \frac{P}{U}$ (Hyperbellast)
 - Je nach gewähltem AP ist die Diode im zulässigen oder unzulässigen Arbeitsbereich bei gegebenem $P_{\max}$.

W

8.4.1 Zenerdiode bei Last



- Ersatzspannungsquelle



- Leerlauf:

$$U_1 = U_L = \frac{R_L}{R_V + R_L} U$$

und

$$U_1 = U_e$$

Damit

$$U_e = \frac{R_L}{R_V + R_L} U$$

- Kurzschluss:

$$I_k = \frac{U}{R_V}$$

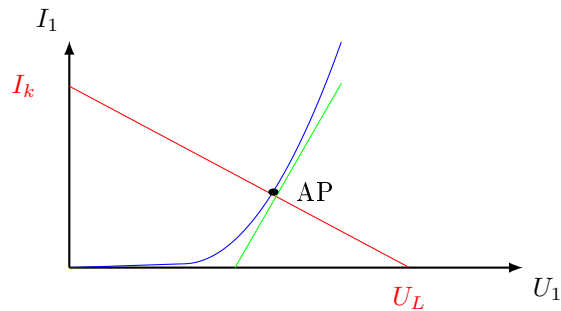
und

$$I_k = \frac{U_e}{R_e}$$

Damit

$$R_e = \frac{R_L R_V}{R_L + R_V}$$

- Dann wieder linearisieren



- Jetzt kann eine Verschiebung des Arbeitspunktes im linearisierten Bild durchgeführt werden.
- Das kann nicht beliebig gemacht werden, da eine eventuelle Abweichung von realer Kennlinie zu groß werden kann.

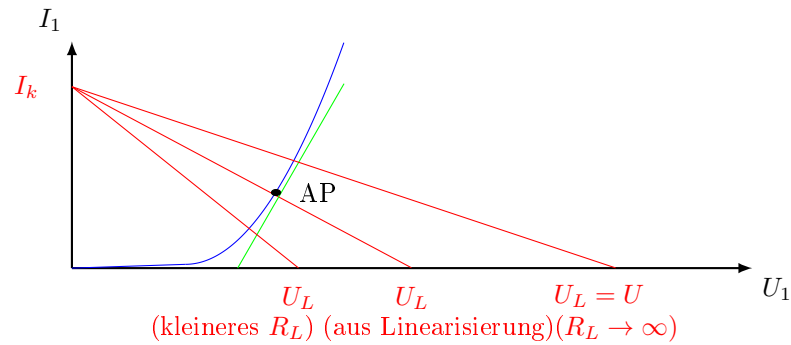
8.4.2 Verschiebung des Arbeitspunktes

1. $R_V = \text{konst.}$, $U_V = \text{konst.}$, variere Lastwiderstand R_L (wichtigster Fall)

W

$$I_k = \frac{1}{R_V} U = \text{konst.}$$

$$U_L = \frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_L}} U$$



- Genau genommen, müsste man am Schnittpunkt der neuen Arbeitsgeraden mit der nichtlinearen Kennlinie erneut linearisieren.
- Ist die Abweichung allerdings nicht zu groß, kann man den Arbeitspunkt auf der linearisierten Kennlinie verschieben und mit demselben differentiellen Widerstand R_d wie zuvor rechnen.
- Wähle Arbeitsgerade so, dass Diode nicht überbelastet wird.

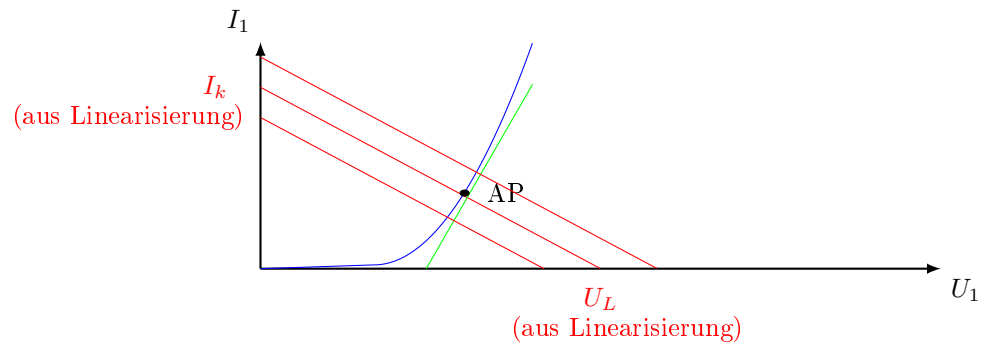
2. $R_V = \text{konst.}$, $R_L = \text{konst.}$, variere Eingangsspannung U

W

$$I_k = \frac{1}{R_V} U \propto U$$

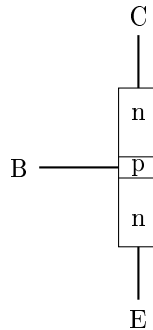
$$U_L = \frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_L}} U \propto U$$

- Also Parallelverschiebung der Arbeitsgeraden

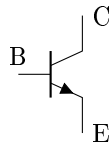


9 Transistoren

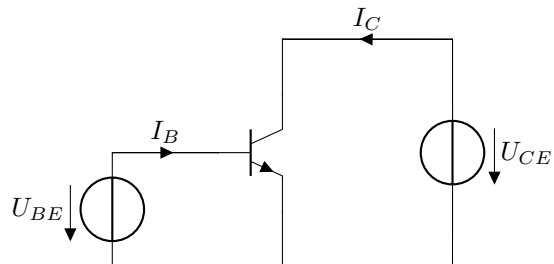
- npn-Bipolartransistor (es findet sowohl Elektronen- als auch Löcherleitung statt):



- Schaltsymbol:



- Spannungen:



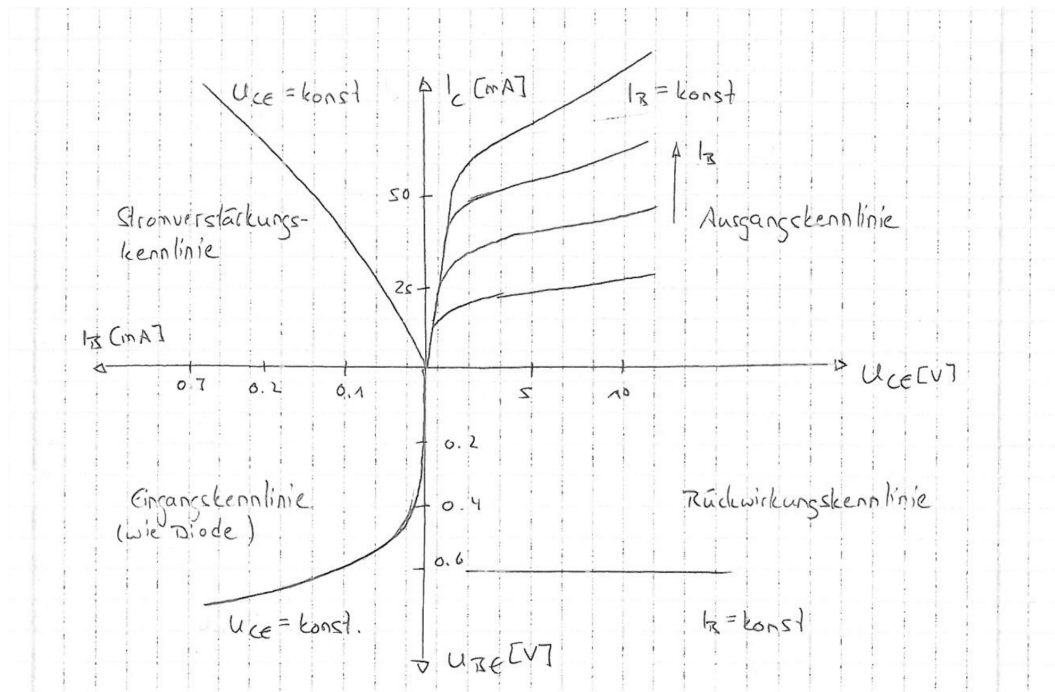
- Die Elektroden werden Emitter (E), Basis (B) und Kollektor (C) genannt.
- Man kann sich einen Transistor als Reihenschaltung zweier Dioden vorstellen, von denen die Basis-Emitter-Diode in Durchlassrichtung und die Basis-Kollektor-Diode in Sperrrichtung betrieben wird, d. h. beim npn-Transistor gilt $U_{BE} > 0$ und $U_{CE} > 0$
- Funktionsweise:
 - Im BE-Kreis fließt ein Strom
 - Elektronen von E rekombinieren mit Löchern in B
 - Ist die Dicke der Basis gering genug, werden Elektronen durch U_{CE} an den Kollektor gezogen

- Das führt zu einem Strom in den Kollektor, wobei I_C mit I_B steigt.
- In der Regel ist $I_C > I_B$ (Stromverstärkung)
- Im Folgenden wird der Bipolartransistor ausschließlich in Emitterschaltung betrachtet. Das heißt der Emitteranschluss ist Bezugspunkt für Eingangsspannung U_{BE} und Ausgangsspannung U_{CE} .

9.1 Kennlinienfeld

- Durchmessen von Basisstrom I_B , Kollektorstrom I_C , Basis-Emitter-Spannung U_{BE} , Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} liefert ein 4-Quadranten-Kennlinienfeld:

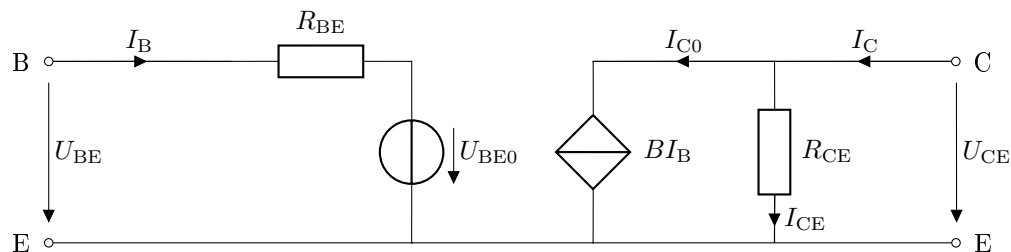
W



9.2 Linearisiertes Gleichstrom-ESB

Ersatzschaltbild:

W



- Größen:
 - R_{BE} : Basis-Emitter-Widerstand
 - U_{BE0} : Basis-Emitter-Diffusionsspannung
 - $\diamond$: Stromverstärker
 - B : Verstärkungsfaktor
 - R_{CE} : Kollektor-Emitter-Widerstand
- Oft auftretender Spezialfall: $R_{CE} \rightarrow \infty$, d.h. $I_{CE} = 0$ und $I_C = I_{C0} = BI_B$
- Kennlinien (mit MR / KR):
 - Ausgangskennlinie:

$$I_C(U_{CE}) = BI_B + \frac{U_{CE}}{R_{CE}} \quad I_B = \text{konst}$$
 - Stromverstärkungskennlinie:

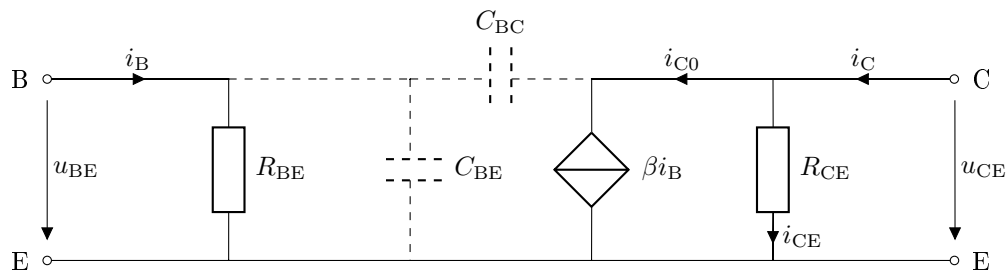
$$I_C(I_B) = BI_B + \frac{U_{CE}}{R_{CE}} \quad U_{CE} = \text{konst}$$
 - Eingangskennlinie:

$$I_B(U_{BE}) = \frac{U_{BE}}{R_{BE}} - \frac{U_{BE0}}{R_{BE}} \quad (\text{Diodenkennlinie})$$

9.3 Linearisiertes Wechselstrom-ESB

Ersatzschaltbild:

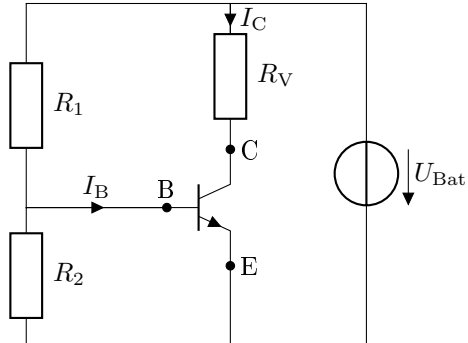
W



- C_{BE} : Basis-Emitter-Kapazität (wird erst bei sehr hohen Frequenzen wirksam)
- C_{BC} : Basis-Kollektor-Kapazität (ist bei mittleren Frequenzen vernachlässigbar)
- β : Wechselstromverstärkung (i.A. $\beta \neq B$)
- Wir lassen im Folgenden beide Kapazitäten weg.

9.4 Beispiel

Transistor als Schalter:



- Daten:

$$\begin{aligned}U_{\text{Bat}} &= 24\text{V} \\ R_V &= 400\Omega \\ R_2 &= 500\Omega \\ U_{BE0} &= 0.5\text{V} \\ B &= 250 \\ R_{BE} &= 100\Omega \\ R_{CE} &= 10\text{k}\Omega \text{ (immer hochohmig)}\end{aligned}$$

- Gesucht: R_1 so, dass $P = 1\text{W}$ an R_V abfällt
- Vorgehensweise

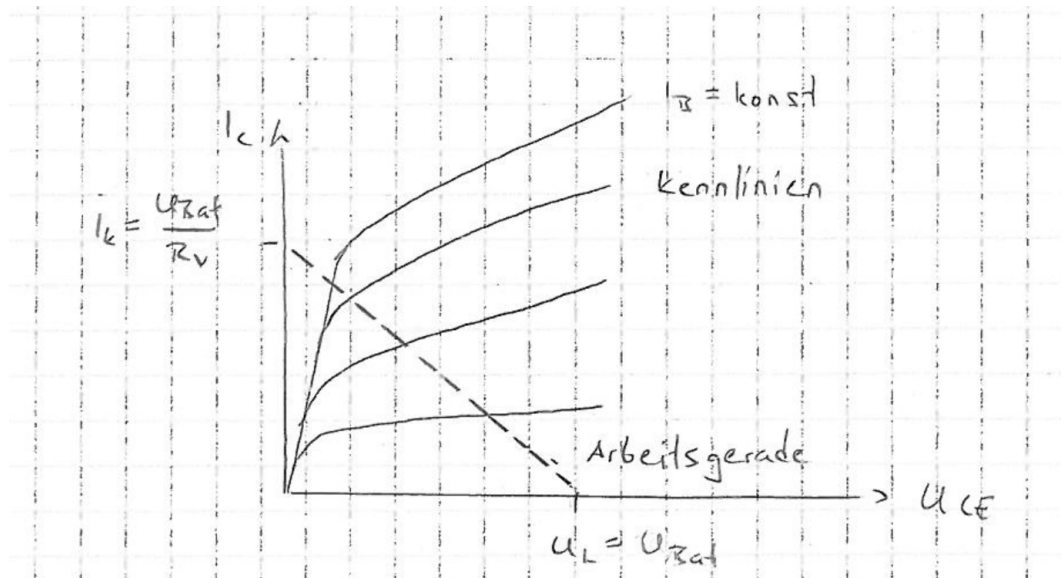
W

1. Arbeitsgerade
 2. AP1 bestimmen
 3. R_1 bestimmen
 4. Leistungen (optional)
 5. Bestimmung der Größen für anderen AP2 (optional)
 6. Diskussion
1. Arbeitsgerade im Kennlinienfeld skizzieren
 - Arbeitsgerade im Ausgangskennlinienfeld, d.h. $I_C(U_{CE})$
 - Maschenregel

$$U_{\text{Bat}} = U_{R_V} + U_{CE} = R_V I_C + U_{CE}$$

$$I_C = \frac{1}{R_V} (U_{\text{Bat}} - U_{CE})$$

- Hier wird die Gleichung $I_C(U_{CE})$ aufgestellt.
- Geht aber auch klassisch über U_L und I_k
 - Leerlaufspannung zw. C und E: $U_L = U_{\text{Bat}}$
 - Kurzschlussstrom zwischen C und E: $I_k = \frac{U_{\text{Bat}}}{R_V}$
- Es gibt unendlich viele Arbeitspunkte:



2. AP1 festlegen

- Man braucht eine Bedingung, um einen AP festzulegen
- Hier: Leistung am Verbraucher soll $P = 1\text{W}$ sein
- Suche $I_{\text{AP1}} = I_C$ und $U_{\text{AP1}} = U_{CE}$ so, dass genau dies gilt.
- Also

$$P = I_C U_{R_V} = I_C^2 R_V \rightarrow I_C = \sqrt{\frac{P}{R_V}} = 50\text{mA}$$

$$U_{CE} = U_{\text{Bat}} - I_C R_V = 4\text{V}$$

- Damit sind I_B und U_{BE} (über Kennlinienfeld) festgelegt.

3. Wie muss R_1 gewählt werden, damit dies gilt?

- Linearisiertes ESB

- Ganz allgemein kann die Eingangsleistung vernachlässigt werden.

5. Größen für anderen AP2

- Leistung im Verbraucher sei nun $P = 0.25\text{W}$
- Es kann genau gleich vorgegangen werden:

$$I_C = \sqrt{\frac{P}{R_V}} = 25\text{mA}$$

$$U_{CE} = U_{\text{Bat}} - I_C R_V = 14\text{V}$$

$$I_B = \frac{1}{B} \left(I_C + \frac{U_{CE}}{R_{CE}} \right) = 0.094\text{mA}$$

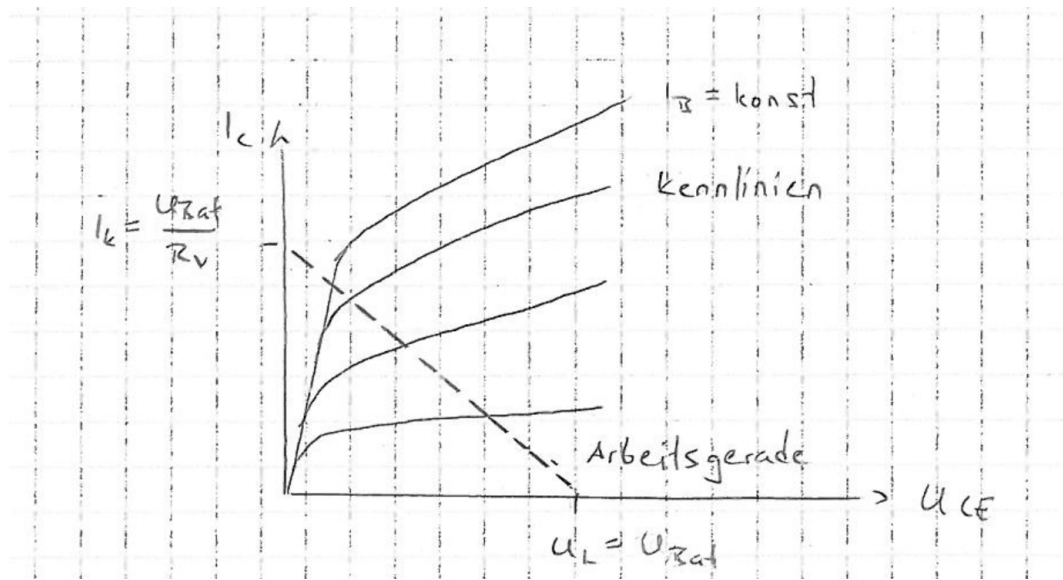
$$I_1 = I_B + \frac{U_{BE0} + R_{BE} I_B}{R_2} = 1.11\text{mA}$$

$$R_1 = \frac{U_{\text{Bat}} - (I_B R_{BE} + U_{BE0})}{R_1} = 21.1\text{k}\Omega$$

$$P_T = (R_{BE} I_B + U_{BE0}) I_B + U_{CE} I_C = 0.048\text{mW} + 350\text{mW}$$

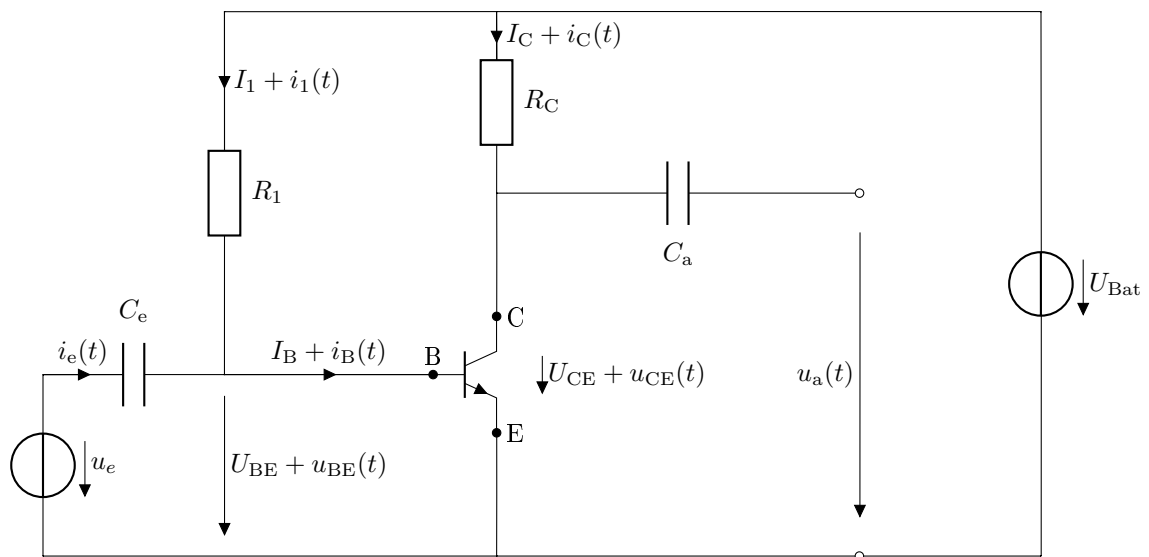
6. Diskussion:

- Durch Einstellung von R_1 (als Potentiometer) kann der Verbraucher R_V als „Ein“ (AP1) oder „Aus“ (AP2) geschaltet werden.
- Prinzipiell ist die Steigung im AP1 deutlich größer, d.h. R_{CE} sollte deutlich kleiner als im AP2 sein:



9.5 Beispiel

- Wechselstromverstärker:



- Annahmen:

- $R_{CE} = \infty$

- $C_{BC} = C_{BE} = 0$
- C_e, C_a sehr groß (auch für kleine Frequenzen leitend)

- Gegeben:

$$\begin{aligned}U_{\text{Bat}} &= 12\text{V} \\ R_C &= 150\Omega \\ R_{BE} &= 100\Omega \\ U_{BE0} &= 0.8\text{V} \\ B &= 150 \\ \beta &= 200\end{aligned}$$

- Gesucht:

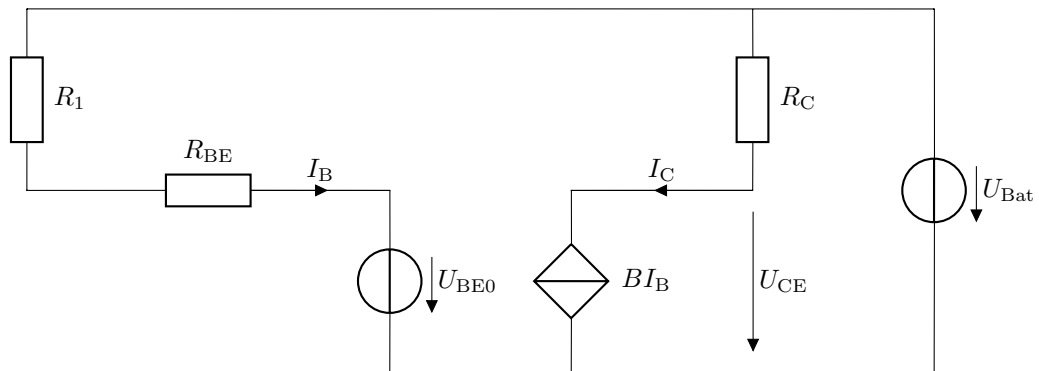
- Korrekter Arbeitspunkt (Gleichstromfall)
- Ausgangssignal $u_a(t)$ in Abhängigkeit von $u_e(t)$
- Verstärkungsfaktoren

- Ersatzschaltbilder sind lineare Schaltungen $\rightarrow$ Überlagerungsprinzip

W

1. Wechselspannungsquelle kurzschließen ($u_e(t) = 0$)

- C_e, C_a unterbrechen den Stromkreis
- Ersetze Transistor durch Gleichstrom-ESB



- Bestimme R_1 so, dass $U_{CE} = \frac{1}{2}U_{\text{Bat}}$
- Maschenregel:

$$U_{\text{Bat}} = U_{BE0} + I_B (R_1 + R_{BE})$$

- Maschenregel:

$$U_{\text{Bat}} = R_C I_C + U_{CE} = R_C B I_B + U_{CE}$$

- I_B eliminieren:

$$R_1 = \frac{BR_C (U_{\text{Bat}} - U_{BE0})}{U_{\text{Bat}} - U_{CE}} - R_{BE}$$

$$= 42\text{k}\Omega - 100\Omega$$

$$= 41.9\text{k}\Omega$$

- R_{BE} kann also prinzipiell vernachlässigt werden, R_1 ist hochohmig
- Berechne AP:

$$I_{B,\text{AP}} = \frac{U_{\text{Bat}}}{2BR_C} = 0.267\text{mA}$$

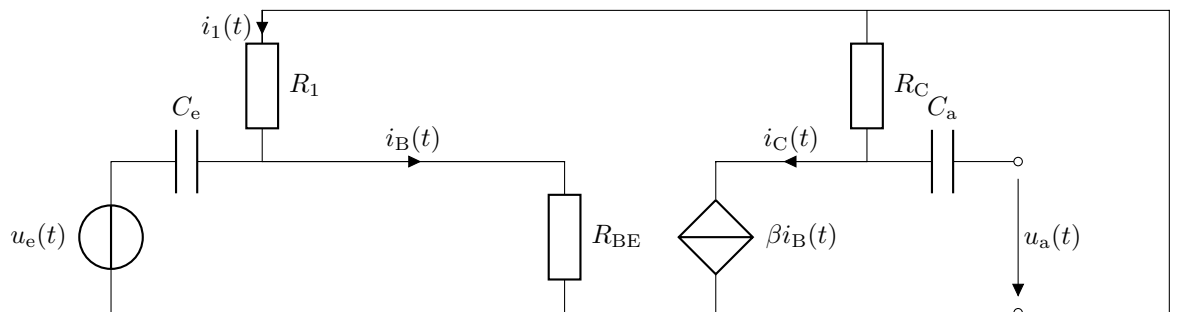
$$U_{BE,\text{AP}} = I_{B,\text{AP}} R_{BE} + U_{BE0} = 0.827\text{V}$$

$$U_{CE,\text{AP}} = \frac{1}{2} U_{\text{Bat}} = 6\text{V}$$

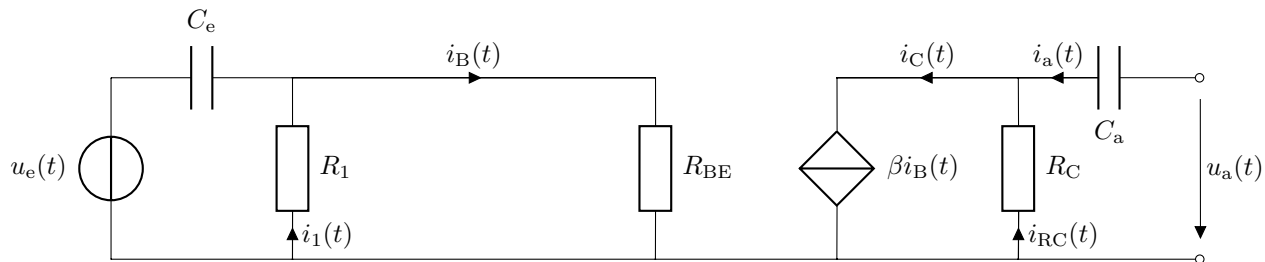
$$I_{C,\text{AP}} = BI_B = 40\text{mA}$$

2. Gleichspannungsquelle kurzschließen ($U_{\text{Bat}} = 0$)

- Ersetze Transistor durch Wechselstrom-ESB:



- übersichtlicher:



- Zur Berechnung der Spannungsverstärkung:

– Ausgang soll nicht belastet werden ($i_a(t) = 0$)

W

– Maschenregel:

$$u_{CE} = -R_C i_{RC} = -R_C i_C = -R_C \beta i_B$$

und

$$u_e = R_{BE} i_B$$

– Also

$$u_a = u_{CE} = -\beta \frac{R_C}{R_{BE}} u_e = -300 u_e$$

• Zur Berechnung der Stromverstärkung:

– Ausgang wird kurzgeschlossen ($i_{RC}(t) = 0$)

W

– Damit

$$i_a = i_C = \beta i_B$$

und

$$i_B = \frac{R_1}{R_1 + R_{BE}} i_e$$

– Also

$$i_a = \beta \frac{R_1}{R_1 + R_{BE}} i_e \approx \beta i_e = 200 i_e$$

3. Verstärkungsfaktoren

W

• Spannungsverstärkung:

$$\nu_u = \frac{u_a}{u_e} = -300$$

• Stromverstärkung:

$$\nu_i = \frac{i_a}{i_e} = 200$$

• Leistungsverstärkung:

$$\nu = |\nu_u \nu_i| = 60000$$

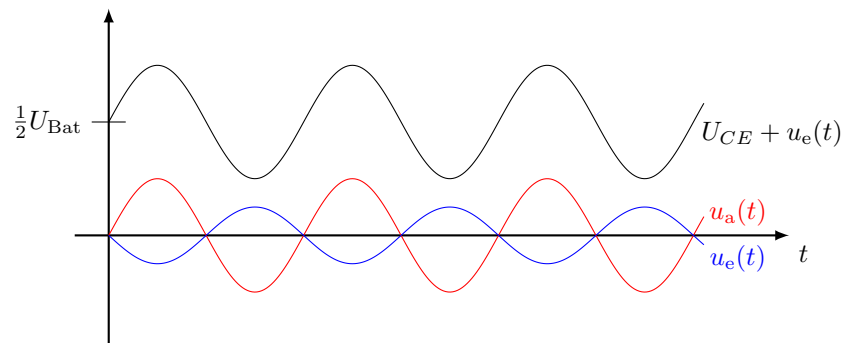
4. Überlagerung

• Die Spannung zwischen C und E ist eine Mischgröße

$$U_{CE} + u_{CE}(t) = 6V - 300 u_e(t)$$

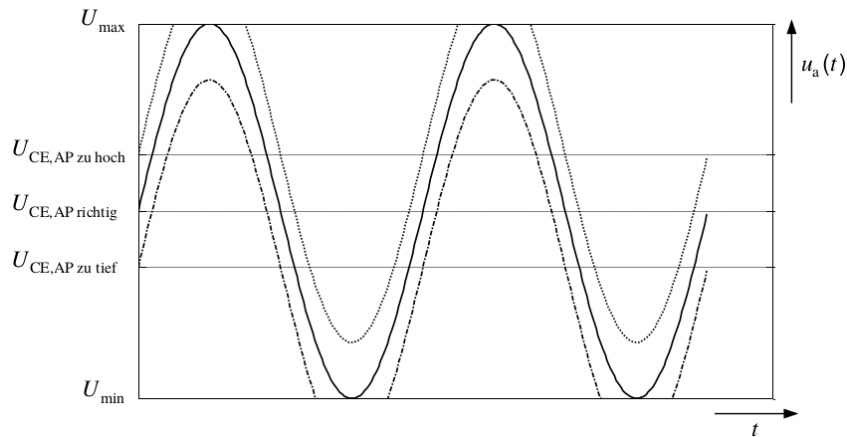
• Allerdings unterbricht C_a den Gleichstrom-Anteil bei $u_a(t)$, d.h. $u_a(t) = -300 u_e(t)$

• Mit $u_e(t) = \hat{u}_e \sin(\omega t)$:



5. Diskussion

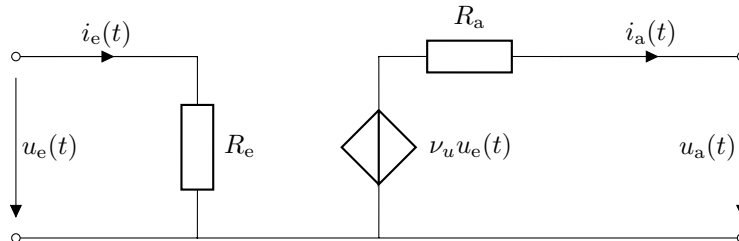
- Aussteuerbarkeit
 - Die gesamte Spannung $U_{CE} + u_{CE}(t) = U_{CE,AP} + \hat{u}_a \sin(\omega t)$ darf die Versorgungsspannung weder über- noch unterschreiten.
 - Um die maximale Aussteuerbarkeit zu gewährleisten, setze $U_{CE,AP} = \frac{1}{2}U_{\text{Bat}}$ (sonst kein harmonisches Signal)



- Warum C_e und C_a ?
 - Wird als Eingangssignal eine Mischgröße gewählt, dann könnte der Gleichstromanteil zu einem verzerrten Ausgangssignal oder zu einer Überlastung des Transistors führen. C_e koppelt diesen möglichen GS-Anteil aus.
 - Durch U_{Bat} entsteht im Transistor eine Mischgröße. Der GS-Anteil wird durch C_a ausgekoppelt.
- Frequenzen
 - Wird die Wechselstromverstärkerschaltung vollständig und unter Berücksichtigung der Kapazitäten berechnet, so ergeben sich zwei Grenzfrequenzen für den Betrieb des Wechselstromverstärkers: Die obere Grenzfrequenz f_o bzw. die obere Grenzkreisfrequenz ω_o und die untere Grenzfrequenz f_u bzw. die untere Grenzkreisfrequenz ω_u .
 - * Die obere Grenzfrequenz hängt maßgeblich vom Kollektorwiderstand R_C und der Basis-Kollektorkapazität C_{BC} (transistor-spezifisch) ab, und kann vereinfacht berechnet werden zu: $\omega_o = \frac{1}{R_C C_{BC}}$
 - * Die untere Grenzfrequenz ist maßgeblich abhängig von der (schaltungsspezifischen, nicht transistorspezifischen) Eingangskapazität C_e , sowie dem Gesamtersatzwiderstand R_e zwischen Basis und Emitter. Der Gesamtersatzwiderstand berechnet sich aus dem Wechselstromersatzschaltbild zu: $R_e = \frac{R_1 R_{BE}}{R_1 + R_{BE}}$. Die untere Grenzfrequenz berechnet sich dann zu: $\omega_u = \frac{1}{R_e C_e}$.
 - * Befindet sich die gewählte Arbeitsfrequenz der Verstärkerschaltung innerhalb dieser Grenzen, so kann der Einfluss der Kapazitäten vernachlässigt werden.

10 Operationsverstärker

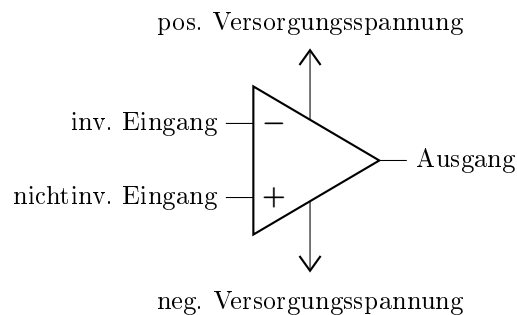
10.1 Einstufiger Wechselstromverstärker



- $\diamond$: gesteuerte Spannungsquelle
- Eingangskreis:
 - hochohmige Spannungsmessung (R_e sehr groß)
- Ausgangskreis:
 - ist reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_a
 - R_a sollte möglichst klein sein, damit viel Spannung von idealer Quelle $\diamond$ abgegriffen wird.
 - ν_u möglichst groß

10.2 Operationsverstärker

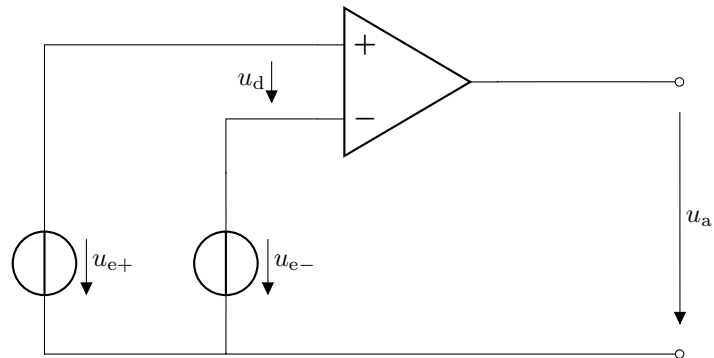
- Jetzt als Blackbox mit zwei Eingängen und einem Ausgang:



- Anmerkung für die Klausur: Beim Komparator ist + immer oben, sonst –

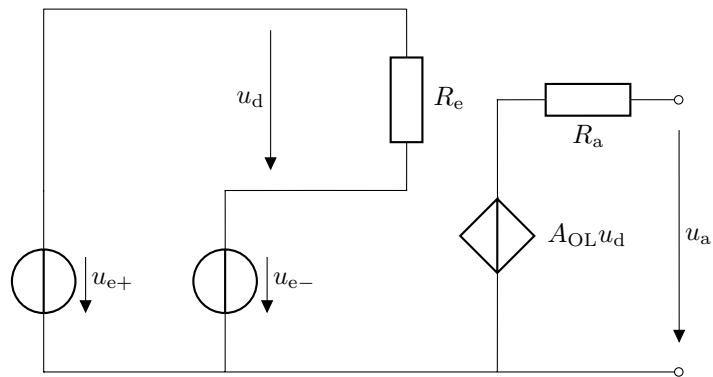
W

10.2.1 Open-Loop-Betrieb



- Ersatzschaltbild:

W



- Es gilt:

$$u_a = A_{OL} u_d = A_{OL} (u_{e+} - u_{e-})$$

und damit

$$u_a = \begin{cases} A_{OL} u_{e+} & u_{e-} = 0 \\ -A_{OL} u_{e-} & u_{e+} = 0 \end{cases}$$

wodurch sich die Invertierung erklärt.

10.2.2 Idealer Operationsverstärker

Für diesen gilt

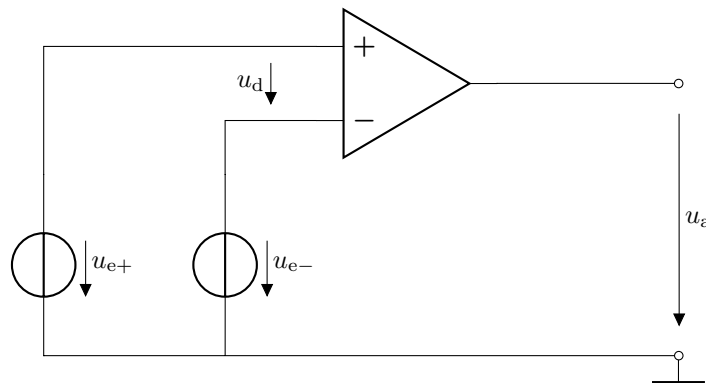
W

- Eingangswiderstand $R_e \rightarrow \infty$
- Ausgangswiderstand $R_a = 0$
- Leerlaufverstärkung $A_{OL} \rightarrow \infty$ (aber $A_{OL} u_d$ endlich, d.h. $u_d \approx 0$)

- Frequenzbereich $f = 0 \dots \infty \text{Hz}$.
- Der OP ist vollkommen symmetrisch (wenn $u_{e+} = u_{e-}$ ist, dann ist $u_a = 0$)
- Beim idealen OP tritt kein Rauschen und keine Temperaturabhängigkeit auf.
- Die Beziehung zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung ist linear.

10.3 Komparator

- Ist ein OP ohne Rückkopplung

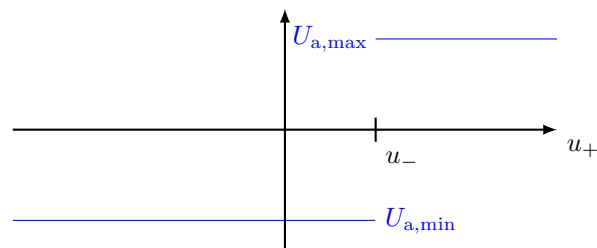


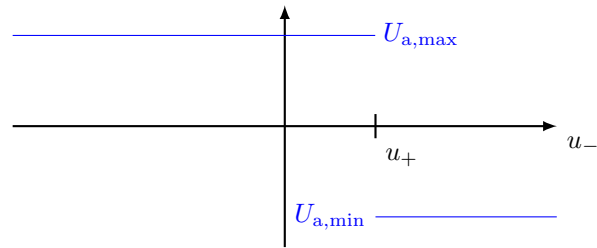
- Hier wird die Situation relativ einfach:

$$u_d > 0 : u_a \rightarrow \infty \quad \text{real} : u_a \rightarrow U_{a,\max} \quad (103)$$

$$u_d < 0 : u_a \rightarrow -\infty \quad \text{real} : u_a \rightarrow U_{a,\min} \quad (104)$$

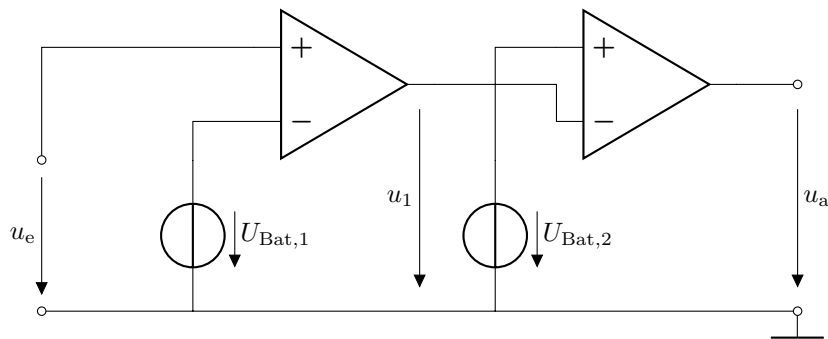
- Die Grenzen der Ausgangsspannung hängen von der Versorgungsspannung des OP ab.
- Typische Werte: VS-OP: $15\text{V} \rightarrow U_{a,\max} = -U_{a,\min} = 12\text{V}$
- Skizzen:





10.3.1 Beispiel

- Zwei Baugleiche OP mit $U_{\max} = 10\text{V}$, $U_{\text{Bat},1} = 4\text{V}$, $U_{\text{Bat},2} = 7\text{V}$:

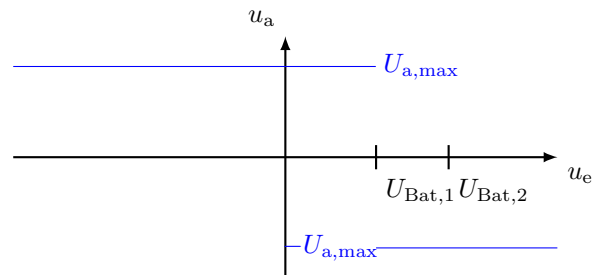


- Spannungen:

$$u_1 = \begin{cases} U_{\max} & u_e > U_{\text{Bat},1} \\ -U_{\max} & u_e < U_{\text{Bat},1} \end{cases}$$

$$u_a = \begin{cases} U_{\max} & U_{\text{Bat},2} > u_1 \\ -U_{\max} & U_{\text{Bat},2} < u_1 \end{cases}$$

- Skizze:

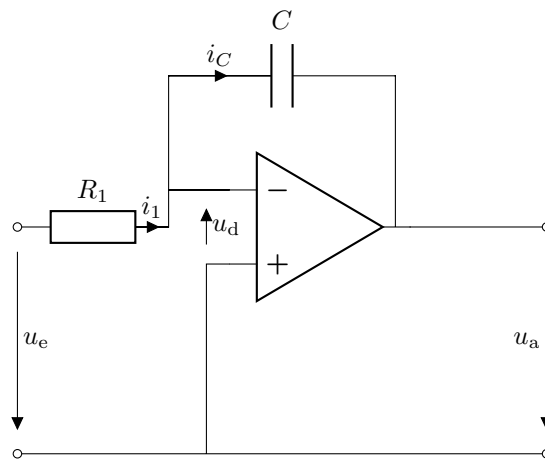


10.4 OP mit Rückkopplung

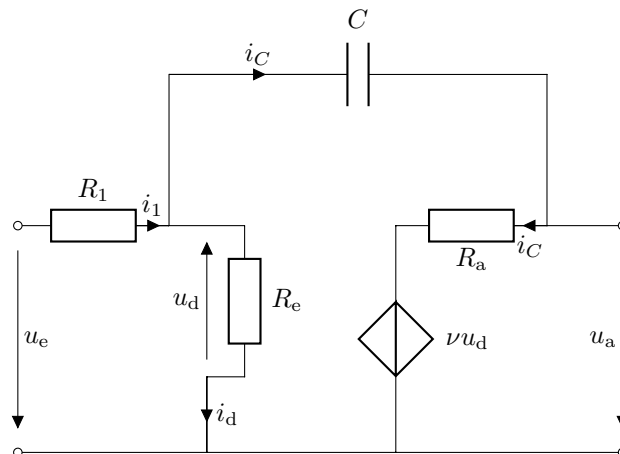
- Ausgangsspannung wird auf einen der Eingänge rückgekoppelt
 - +Eingang: Mitkopplung
 - –Eingang: Gegenkopplung
- $A_{OL} = \infty$ führt bei Gegenkopplung dazu, dass $u_d \approx 0$ gilt
- Es können sich dadurch dauerhaft Spannungswerte zwischen $U_{a,\min}$ und $U_{a,\max}$ einstellen.

W

10.4.1 Invertierender Integrierer



- Linearisiertes ESB (am Ausgang fließt kein Strom):



- Maschenregeln:

$$u_e + u_d - R_1 i_1 = 0$$

$$u_d + u_C + R_a i_C + \nu u_d = 0$$

$$R_a i_C + \nu u_d - u_a = 0$$

- Knotenregel:

$$i_1 = i_C + i_d$$

- Idealer OP:

- $R_e \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty, R_a = 0$
- Wegen $R_e \rightarrow \infty$: $i_d = 0$
- Wegen νu_d endlich: $u_d \approx 0$ und $i_C \neq 0$

- Maschenregeln:

$$u_e - R_1 i_1 = 0$$

$$u_C + \nu u_d = 0$$

$$\nu u_d - u_a = 0$$

- Knotenregel:

$$i_1 = i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

- Folglich:

$$\begin{aligned} u_a = \nu u_d = -u_C &= -\frac{1}{C} \int i_C dt \\ &= -\frac{1}{C} \int i_1 dt \\ &= -\frac{1}{CR_1} \int u_e dt \end{aligned} \tag{105}$$

- Integration von $u_e(t)$ und Invertierung durch das negative Vorzeichen.

Beispiele

- Gegeben:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10\text{k}\Omega \\ C &= 100\mu\text{F} \\ \text{VS} - \text{OP} &= 15\text{V} \end{aligned}$$

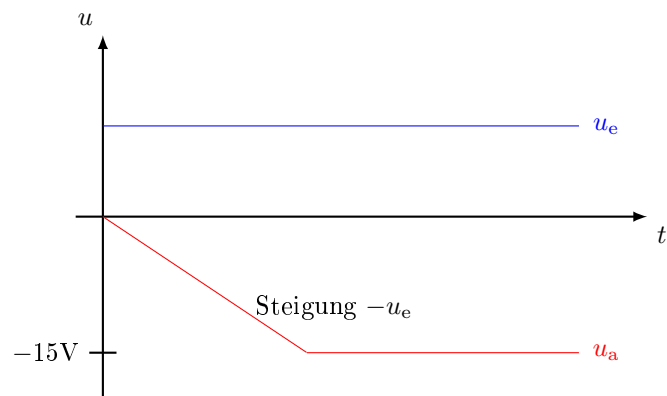
- Somit

$$-\frac{1}{CR_1} = -\frac{1}{10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = -1 \frac{1}{\text{s}}$$

1. $u_e(t) = u_e$ zeitlich konstant, $u_a(0) = 0$

$$u_a(t) = -1 \frac{1}{\text{s}} \int u_e dt = -u_e t \cdot \frac{1}{\text{s}} + c$$

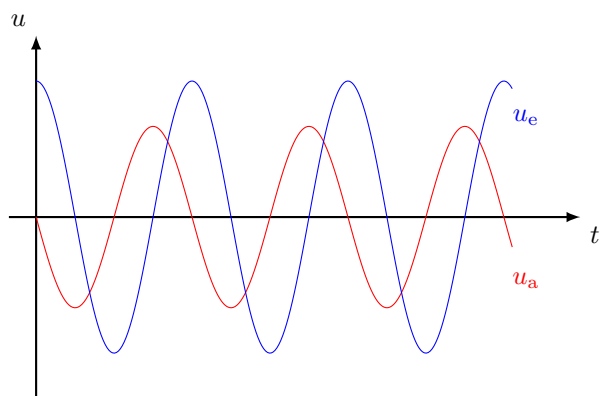
- $c = 0$, damit $u_a(0) = 0$
- u_a ist nach unten begrenzt durch VS-OP
- Skizze:



2. $u_e(t) = \hat{u}_e \cos(\omega t)$, $u_a(0) = 0$

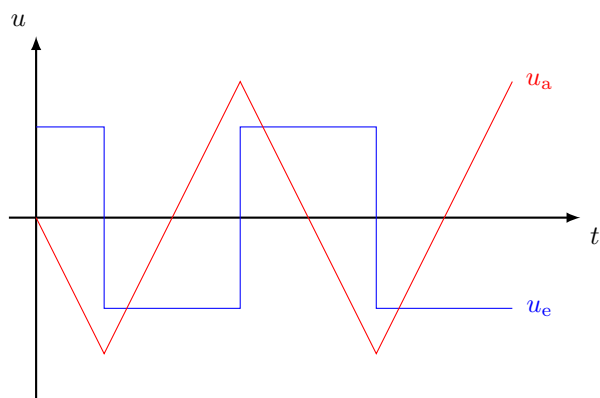
$$\begin{aligned} u_a(t) &= -1 \frac{1}{\text{s}} \int \hat{u}_e \cos(\omega t) dt \\ &= -\frac{\hat{u}_e}{\omega \cdot \text{s}} \sin(\omega t) + c \end{aligned}$$

- $c = 0$, damit $u_a(0) = 0$
- Immer ohne Grenzen integrieren
- Skizze:



3. Rechteckspannung

- Skizze:



- Einzelne konstante Intervalle betrachten:

$$0 \leq t \leq 2: \quad u_a(0) = 0$$

$$u_a(t) = -1 \frac{1}{s} \int 2V \, dt = -2 \frac{V}{s} \cdot t$$

$$u_a(2) = -4V$$

$$2 \leq t \leq 6: \quad u_a(t) = -1 \frac{1}{s} \int -2V \, dt = 2 \frac{V}{s} \cdot t + c = 2 \frac{V}{s} \cdot t - 8V$$

$$u_a(6) = 4V$$

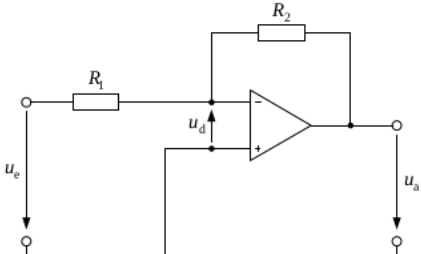
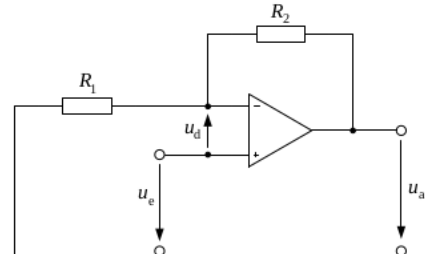
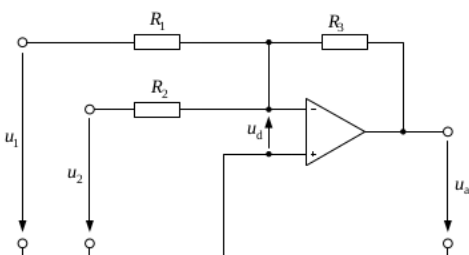
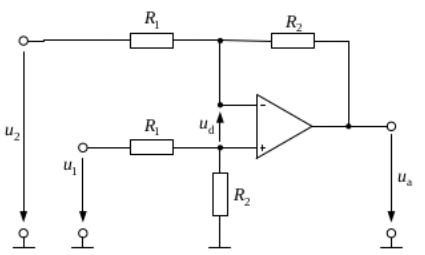
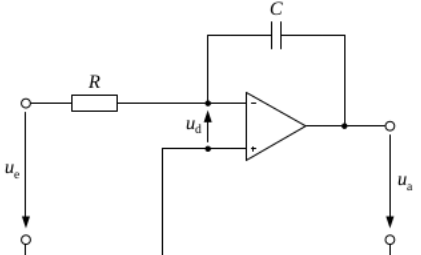
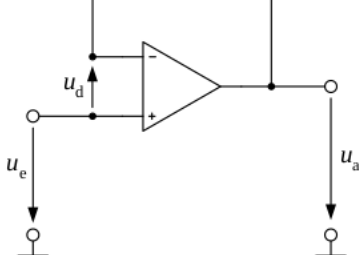
$$6 \leq t \leq 10: \quad u_a(t) = -1 \frac{1}{s} \int 2V \, dt = 2 \frac{V}{s} \cdot t + c = 2 \frac{V}{s} \cdot t + 16V$$

$$u_a(10) = -4V$$

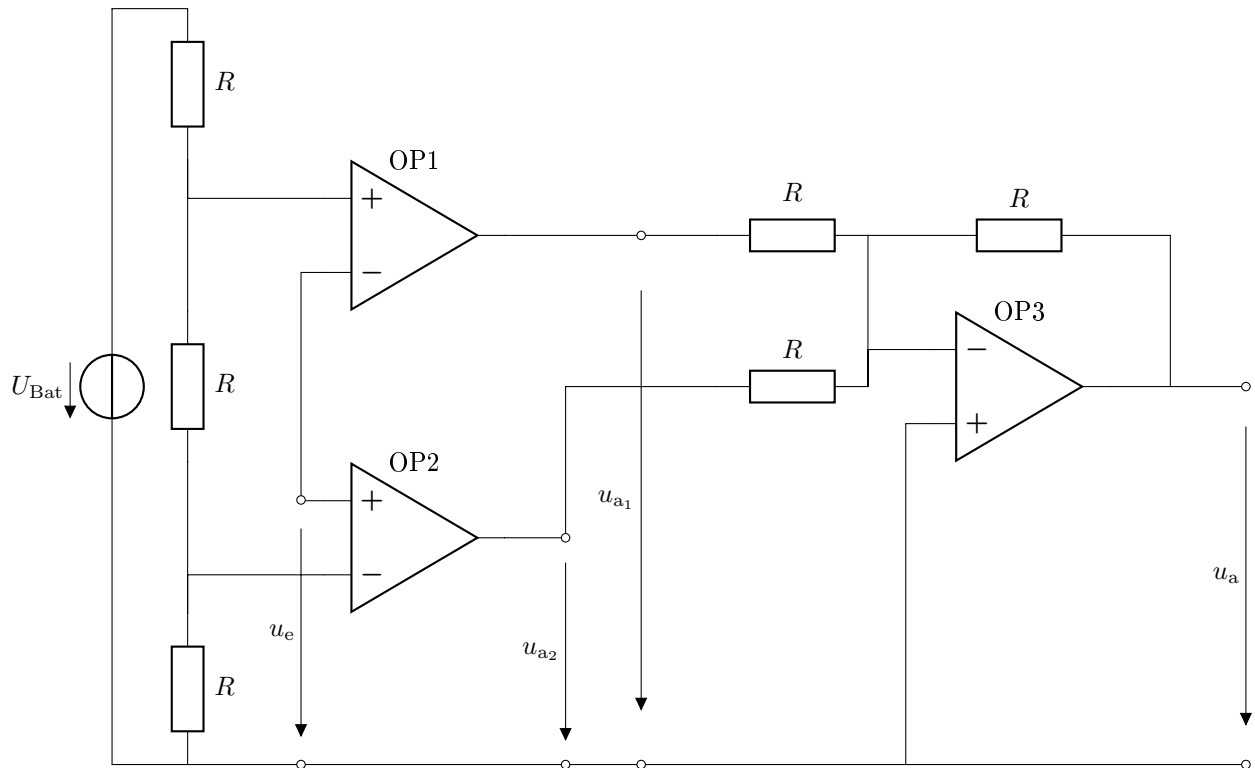
Rest ist klar

- Um ein dreieckförmiges Signal zu erhalten darf
 - $|u_e|$ nicht zu groß gewählt werden (hier $q \cdot 2s = 15V \rightarrow |u_e| \leq 7.5V$)
 - Die Periodenlänge nicht zu groß gewählt werden (hier $T = 8s \rightarrow 2V \cdot \frac{T}{4} = 15V \rightarrow T \leq 30s$)
 - Der Vorfaktor $\frac{1}{CR_1}$ nicht zu groß werden (hier $f \cdot 2V \cdot 2s = 15V \rightarrow f \leq 3.75Hz \rightarrow \frac{1}{CR_1} \leq 3.75 \frac{1}{s}$)

10.4.2 Andere Schaltungen mit Gegenkopplung

Invertierender Verstärker:  $u_a = u_e \cdot \left(-\frac{R_2}{R_1} \right)$	Nichtinvertierender Verstärker:  $u_a = u_e \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$
Invertierender Summierer:  $u_a = -R_3 \cdot \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} \right)$	Subtrahierer:  $u_a = \frac{R_2}{R_1} \cdot (u_1 - u_2)$
Integrierer:  $u_a(t) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t u_e(\tau) \cdot d\tau$	Impedanzwandler:  $u_a = u_e$

10.5 Beispiel



- Drei baugleiche OP mit VS-OP: 15V $\rightarrow U_{a,\max} = -U_{a,\min} = 12\text{V}$. Außerdem $U_{\text{Bat}} = 15\text{V}$

1. Grundsaltungen

- OP1 und OP2 als Komparator
- OP3 als invertierender Addierer

2. Spannungen:

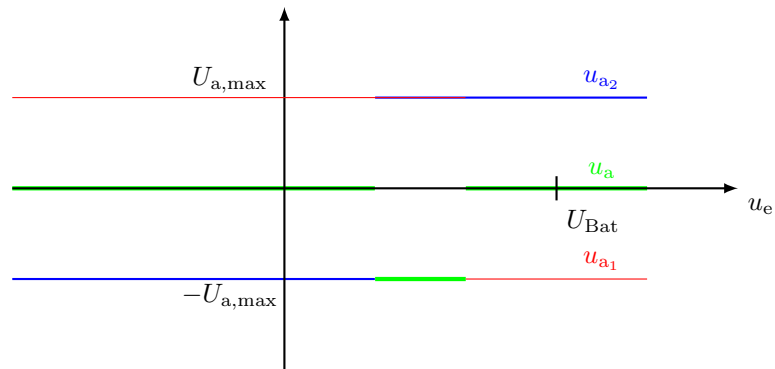
- Die linken drei Widerstände bilden einen Spannungsteiler
- OP1:
 - nichtinvertierender Eingang: $\frac{2}{3}U_{\text{Bat}}$
 - invertierender Eingang: u_e
 - $u_{d1} = \frac{2}{3}U_{\text{Bat}} - u_e$
- OP2:
 - nichtinvertierender Eingang: u_e
 - invertierender Eingang: $\frac{2}{3}U_{\text{Bat}}$

$$- u_{d2} = u_e - \frac{1}{3}U_{\text{Bat}}$$

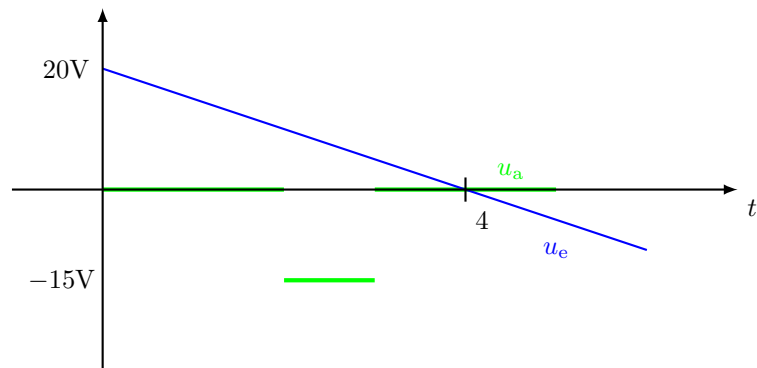
- OP3:

$$- u_a = -(u_{a1} + u_{a2}). \text{ Aber: } u_a \text{ wird abgeschnitten bei } U_{a,\text{max}}, U_{a,\text{min}}$$

- Skizze:



- Mit $u_e(t) = 20\text{V} - 5\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot t$



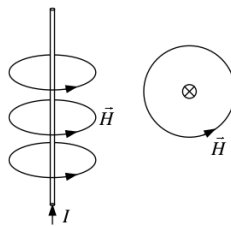
11 Gleichstrommaschine

- Eine elektrische Maschine lässt sich sehr vereinfacht als Energiewandler beschreiben, welche eine elektrische Leistung in eine mechanische Leistung umwandelt. Die Richtung des Energieflusses legt die Betriebsart Motor oder Generator fest.

11.1 Vorbemerkung: Elektromagnetismus

- Strom erzeugt Magnetfeld
 - Speziell Leiterschleife:

W



- Mit einer Spule kann also ein Magnetfeld im Stator der Gleichstrommaschine erzeugt werden.
- Im Vakuum gilt zwischen magnetischer Feldstärke $\vec{H}$ und magnetischer Flussdichte $\vec{B}$: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
- Zeitliche Änderung von magnetischem Fluss induziert Spannung

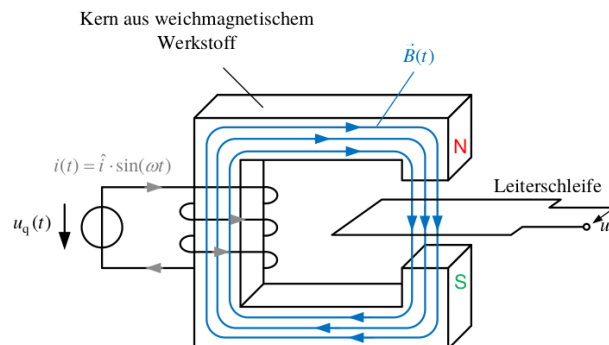
W

- Magnetischer Fluss:

$$\Phi = \int \int \vec{B} \, d\vec{A} \quad (106)$$

- Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife (N Windungen) führt zu einer Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$



- Änderung der Fläche: Bewegungsinduktion oder Generator-Prinzip.
- Änderung von B : Ruheinduktion oder Transformator-Prinzip.
- Beim Generator kann nun ein Verbraucher angeschlossen werden $\rightarrow$ „Strom wird induziert“

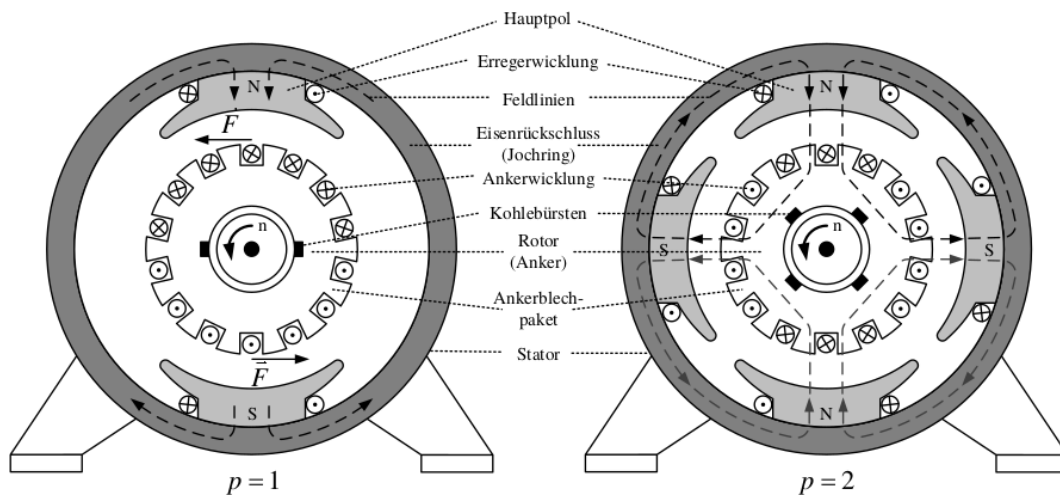
- Bewegte Ladung erfährt Kraft

W

- Lorentzsches Kraftgesetz
- Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld:

$$\vec{F} = Il\vec{e} \times \vec{B} \quad (107)$$

11.2 Gleichstrommaschine



- Eine stromdurchflossene Spule im Magnetfeld (dies ist der Anker) erfährt Lorentzkraft.
- Diese führt zu einem elektrisch induzierten Drehmoment $M_{el} \propto I_A$

$$M_{el} = c\Phi I_A \quad (1) \quad (108)$$

- M_{el} : elektrisch induziertes Drehmoment
- c : Maschinenkonstante
- Φ : Magnetischer Fluss

- Der magnetische Fluss wird durch ein (äußeres) Magnetfeld „erzeugt“. Dieses entsteht durch

- einen Permanentmagneten

$$\Phi = \text{konstant} \quad (109)$$

- oder eine andere Spule (d.h. fremderregt)

$$\Phi \propto B \quad (110)$$

- Die Maschinenkonstante ist durch den Aufbau der Maschine gegeben (Anzahl Wicklungen im Anker N und Polpaarzahl p)

$$c = \frac{2N}{\pi}p \quad (111)$$

- Im Ankerkreis wird wegen der Rotation eine Spannung induziert $U_{\text{ind}} \propto \Omega$

$$U_{\text{ind}} = c\Phi\Omega \quad (2) \quad (112)$$

- U_{ind} : induzierte Spannung
- Ω : Drefrequenz.

- Mit Drehzahl n gilt

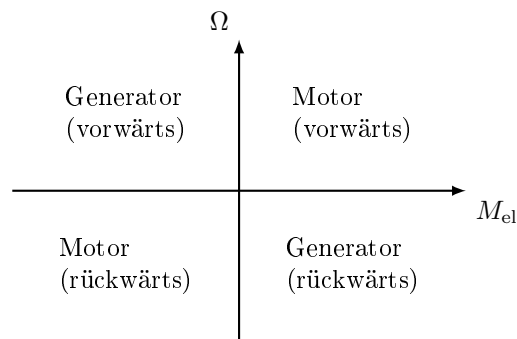
$$\Omega = 2\pi n \quad (113)$$

- Die Gleichungen (1) und (2) sind die Grundgleichungen der GSM

11.3 Betriebsarten

- Drehrichtung und Moment geben die Betriebsart vor

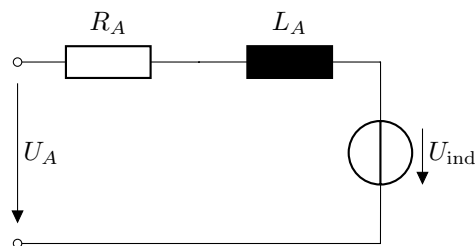
W



11.4 ESB des Ankers

- Ersatzschaltbild des Ankers:

W



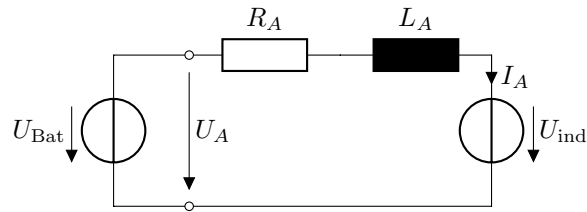
- R_A : Ankerwiderstand (beschreibt Verluste im Anker, niederohmig)

– L_A : Induktivität der Ankerspule (im stationären Betrieb: Kurzschluss L_A)

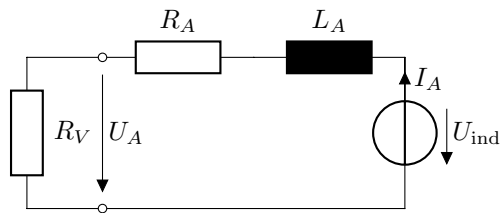
- Unterschiedliche Stromrichtung:

W

– Motorbetrieb:



– Generatorbetrieb:



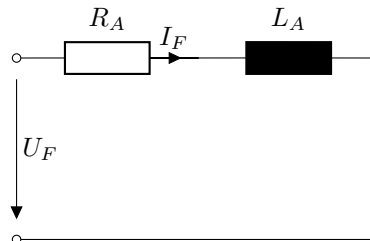
11.5 Magnetfelderzeugung

1. Permanentmagnet

- Hier kann der Fluss Φ nicht geändert werden.

2. Fremderreger

- Ersatzschaltbild:



- Bei stationärem Betrieb: L_F Kurzschluss und B (in L_F) ist konstant

- Mit $B \propto L_F$:

$$\Phi \propto I_F \quad (4) \quad (114)$$

- Mit $U_F = R_F I_F$:

$$U_F \propto I_F \quad (5) \quad (115)$$

11.6 Kennlinie

- Verwende

$$M_{\text{el}} = c\Phi I_A$$

$$U_{\text{ind}} = c\Phi\Omega$$

im ESB:

$$U_A = \pm I_A R_A + U_{\text{ind}}$$

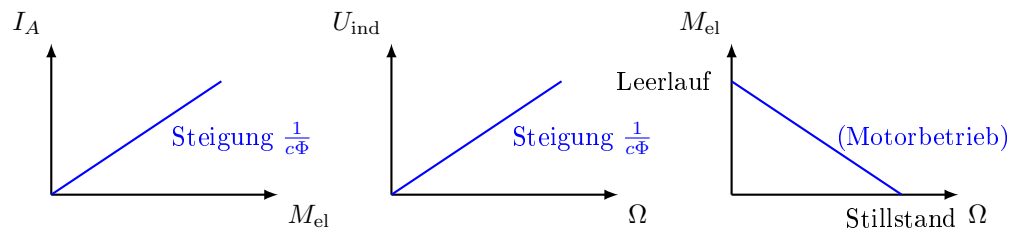
$$= \pm \frac{M_{\text{el}}}{c\Phi} R_A + c\Phi\Omega$$

- Damit ist (mit $-$ für Motor und $+$ für Generator):

$$\Omega = \frac{U_A}{c\Phi} \mp \frac{R_A}{(c\Phi)^2} M_{\text{el}} \quad (3) \quad (116)$$

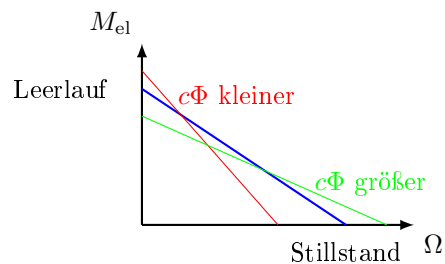
- Kennlinien:

W



11.7 Drehzahlstellverfahren

- Feldsteuerung: Änderung von $(c\Phi)$ (durch Variation des Erregerstromes):



- Spannungssteuerung: Parallelverschiebung der Ω - M -Kennlinie durch Variation der Ankerspannung U_A
- Widerstandssteuerung: Änderung der Steigung der Ω - M -Kennlinie durch Einbringen eines zusätzlichen Widerstandes R_V in den Ankerkreis.

11.8 Leistungsfluss

- Gesamte elektrische Leistung

$$P_{\text{el}} = P_{\text{auf}} = P_A + P_F = U_A I_A + U_F I_F$$

- Statorverluste

$$P_{\text{Cu},F} = P_{V,F}$$

- Ankerlesitung

$$P_A = U_A I_A$$

- Ankerverluste

$$P_{\text{Cu},A} = P_{V,A} = R_A I_A^2$$

- Induzierte mechanische Leistung:

$$P_{\text{mech},i} = \Omega M_{\text{el}} = U_i I_A$$

- Reibungsverluste:

$$P_{\text{Rbg}} = \Omega M_{\text{Rbg}}$$

- Abgegebene Leistung

$$P_{\text{mech}} = P_{\text{ab}} = \Omega M$$

$$= P_{\text{auf}} - P_{\text{Cu},F} - P_{\text{Cu},A} - P_{\text{Rbg}}$$

11.9 Wirkungsgrad

- Definition:

$$\eta = \frac{\text{genutzte Leistung}}{\text{gesamte aufgebrachte Leistung}}$$

(Dies folgt aus der Definition über energien. Im stationären Betrieb gilt dies auch für Leistungen)

- Motorbetrieb:

$$\eta = \frac{\text{mechanische Nutzleistung}}{\text{gesamte elektrische Leistung}}$$

$$= \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{el}}} = \frac{P_{\text{mech}}}{P_A + P_F}$$

- Generatorbetrieb:

$$\eta = \frac{\text{elektrische Nutzleistung}}{\text{mechanische Leistung}} = \frac{\text{elektrische Nutzleistung}}{\text{gesamte elektrische Leistung}}$$

$$= \frac{P_A}{P_A + P_{A,V} + P_F}$$

11.10 Beispiel: Fremderregte GM als Motor

- Daten im Nennbetrieb:

$$U_N = 300\text{V}$$

$$P_{\text{mech},N} = 29\text{kW}$$

$$M_N = 140\text{Nm}$$

$$R_A = 0.5\Omega$$

$$P_{A,V} = 5\text{kW}$$

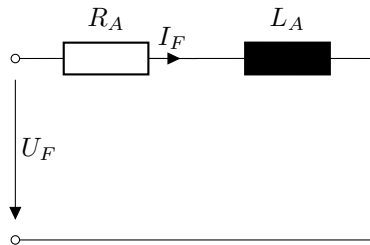
$$U_F = 200\text{V}$$

$$R_F = 50\Omega$$

stationär / nur Ankerverluste

- Fremderreger:

W

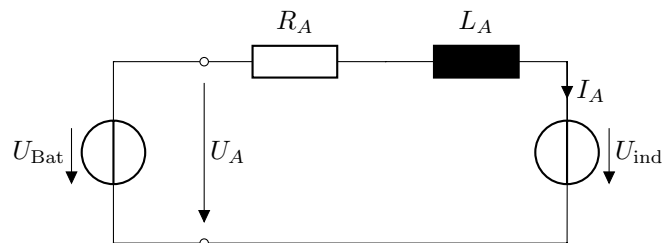


- Stationär, Gleichstrom, d.h. L_F kurzgeschlossen

$$P_F = I_F U_F = \frac{1}{R_F} U_F^2 = 0.8\text{kW}$$

- Im Nennbetrieb:

W



- Strom

$$P_{A,V} = U_A I_N = R_A I_N^2 \rightarrow I_N = 100\text{A}$$

- Ankerleistung

$$P_A = U_N I_N = 30\text{kW}$$

- gesamte elektrische Leistung

$$P_{\text{el}} = P_A + P_F = 30.8 \text{ kW}$$

- Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{\text{mech},N}}{P_{\text{el}}} = 94.2\%$$

- induzierte Spannung (– bei Motorbetrieb):

$$U_{\text{ind}} = U_N - R_A I_N = 250 \text{ V}$$

- Konstante $c\Phi$

$$M_N = (c\Phi) I_N \rightarrow c\Phi = 1.4 \text{ Vs}$$

- Drehzahl

$$U_{\text{ind}} = (c\Phi) \Omega = (c\Phi) 2\pi n \rightarrow n = 1705 \frac{1}{\text{min}}$$

3. Nicht im Nennbetrieb

$$\Omega = \frac{U_A}{c\Phi} - \frac{R_A}{(c\Phi)^2} M_{\text{el}}$$

- Leerlaufdrehzahl ($M_{\text{el}} = 0$)

$$n_L = \frac{U_A}{c\Phi} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{60\text{s}}} = 2046 \frac{1}{\text{min}}$$

- Stillstands Drehmoment ($\Omega = 0$)

$$M_{\text{still}} = \frac{U_A}{R_A} c\Phi = 840 \text{ nN}$$

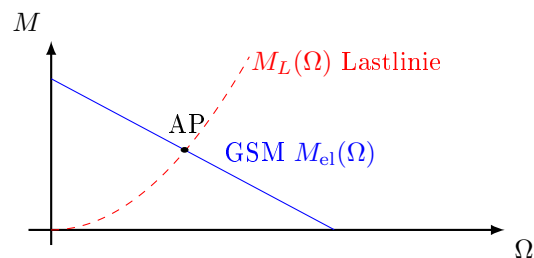
- Stillstandsstrom:

$$I_{A,\text{still}} = \frac{U_A}{R_A} = 600 \text{ A}$$

also starke Belastung für Ankerkreis.

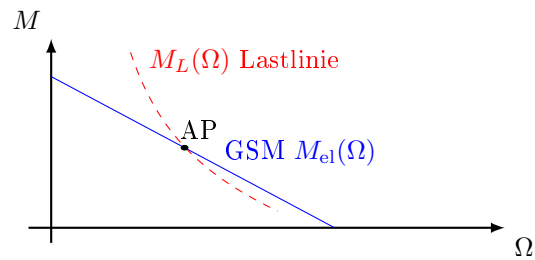
11.11 Stabilität des Arbeitspunktes

- Achtung: hier umgekehrte Achsen
- stabiler AP:



- Wird Ω größer, dann
 - * sinkt M_{el}
 - * steigt M_L
 - * das reduziert wieder Ω
- Wird Ω kleiner, dann
 - * sinkt M_L
 - * steigt M_{el}
 - * das erhöht wieder Ω

- instabiler AP:



- Wird Ω größer, dann
 - * wird $M_L < M_{\text{el}}$
 - * wird Ω noch größer
- Wird Ω kleiner, dann
 - * wird $M_L > M_{\text{el}}$
 - * wird Ω noch kleiner

12 Asynchronmaschine

- Stator wird mit Drehstrom versorgt
 - Erzeugt ein Drehfeld mit Drehzahl n_{sync}
 - Induziert im Rotor eine Spannung
 - Strom fließt
 - Magnetfeld des induzierten Rotorstromes und Magnetfeld des Stators erzeugen eine Kraft auf den Rotor
 - Rotor dreht sich
 - Im Motorbetrieb bleibt Rotordrehzahl aufgrund von Reibung kleiner als n_{sync}

- Synchrongeschwindigkeit

$$\Omega_{sync} = \frac{2\pi f_1}{p} \quad (117)$$

- f_1 : Frequenz des Drehfeldes
- p : Polpaarzahl

- Im Betrieb

$$\Omega \neq \Omega_{sync}$$

(erklärt die Bezeichnung Asynchronmaschine)

- Schlupf

$$s = \frac{\Omega_{sync} - \Omega}{\Omega_{sync}} \quad (118)$$

- Motor:

$$\Omega < \Omega_{sync}, \quad 0 < s < s_k \quad (119)$$

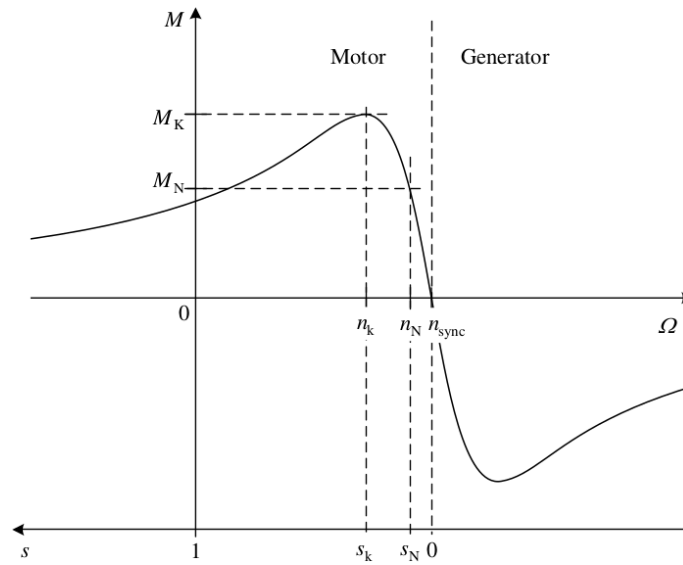
$$\Omega > \Omega_{sync}, \quad -s_k < s < 0 \quad (120)$$

12.1 Kennlinie

- Klosssche Formel

$$M = \frac{2M_K}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (121)$$

- Graphisch:



12.2 Leistungsfluss

- Gesamte elektrische Leistung

$$P_{\text{el}} = 3U_{\text{Str}}I_{\text{Str}} \cos \varphi = P_{\text{auf}}$$

- Verluste an Stator und Rotor (ohmsche Verluste, Ummagnetisierung, Wirbelströme)

$$P_{V,S} = P_{\text{Fe},S} + P_{\text{Cu},S}$$

$$P_{V,R} = P_{\text{Fe},R} + P_{\text{Cu},R}$$

- Verlustleistung

$$P_V = P_{V,R} + P_{V,S}$$

- Luftspaltleistung

$$P_{\delta} = M_{\text{el}}\Omega_{\text{sync}} = P_{\text{auf}} - P_{V,S}$$

- Mechanische Leistung

$$P_{\text{mech},i} = M_{\text{el}}\Omega = P_{\delta} - P_{V,R}$$

- Reibungsverluste

$$P_{\text{Rbg}} = M_{\text{Rbg}}\Omega$$

- Nutzbare mechanische Leistung

$$P_{\text{mech}} = M\Omega = P_{\text{ab}}$$

$$= P_{\text{auf}} - P_{V,S} - P_{V,R} - P_{\text{Rbg}}$$