

Einführung in die Festigkeitslehre

1. Festigkeitsberechnung allgemein

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \sigma_{zul} = \frac{K}{S} \qquad \sigma \leq \sigma_{zul} \Rightarrow \frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$$

F= Kraft [N] , äußere Belastung

A= Querschnitt [mm²]

σ = Spannung $\left[\frac{N}{mm^2} \right]$

S= Sicherheitsbeiwert

K= Werkstoffkennwert

Grundaufgaben:

- a) F ist gesucht: Lastbegrenzung
- b) A ist gesucht: Dimensionierung
- c) K ist gesucht: Werkstoffauswahl
- d) S ist gesucht Sicherheitsanalyse

2. Zugbelastung (VL 1)

Zum Beispiel: Belastung eines **geraden prismatischen Stabes**, der an seinem oberen Ende eingespannt ist. Gewicht unten wirkt Kraft ($F=m \cdot g$) aus.

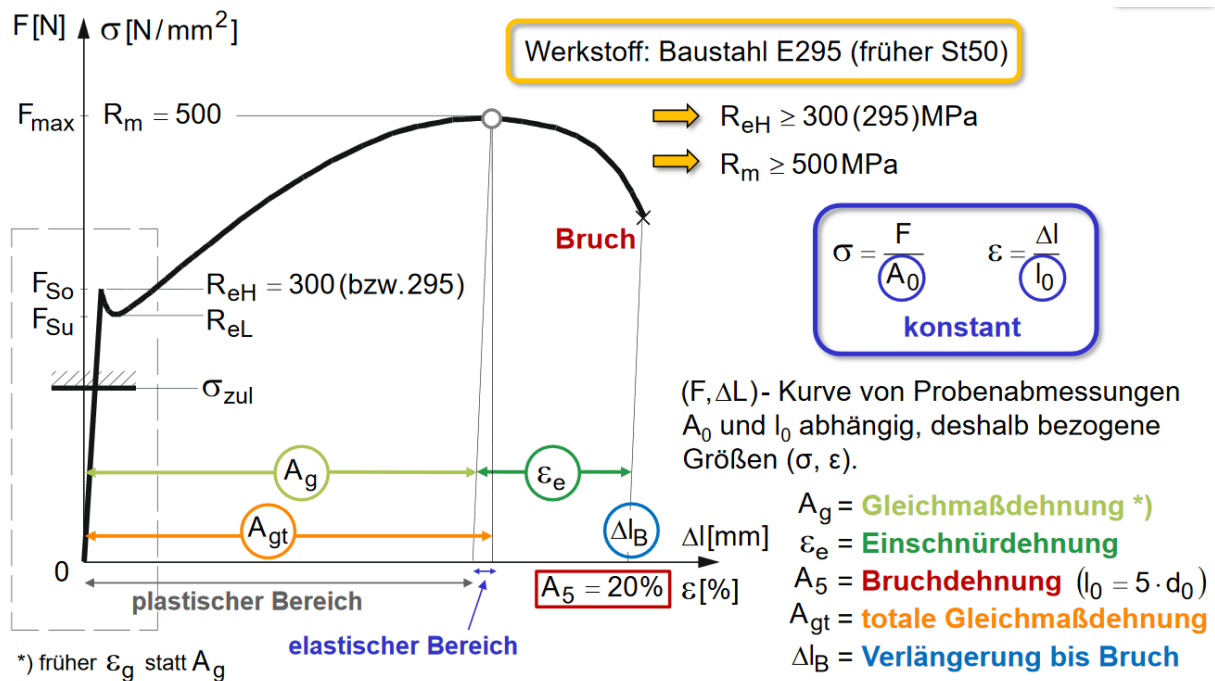
Kraft ist gleichmäßig über den ganzen Stab verteilt

Berechnung der Spannung erfolgt über: $\sigma = \frac{F}{A}$

Zugversuch für zähe Werkstoffe:

- Zylindrische Probe, wird stetig zunehmend gedehnt, bis zum Bruch → Zugkraft F wird in Abhängigkeit von der Verlängerung Δl gemessen
- Zu Beginn: steiler linearer Anstieg → Kraft ~ Verlängerung (hier ist die Verformung elastisch)
- Zu jedem Zeitpunkt des Versuches, gibt es diesen elastischen Anteil, der so groß ist wie der am Anfang (=die Entlastungslinie)
- Danach Übergang zum Fließen (plastischer Werkstoffzustand)
- Steigerung der Kraft → Verfestigung des Werkstoffes → Kurve verläuft immer flacher, bis Hochpunkt erreicht wird
 - Bis hierher ist die Querschnittsverminderung gleichmäßig über den Stab verteilt
- Einschnürung
 - Konzentration auf den schwächsten Punkt im Querschnitt
 - Ertragbare Last F sinkt
 - Bruch

- Kraft-Verlängerungsdiagramm ist abhängig vom Werkstoff → allgemeines Diagramm:
Spannungs- Dehnungs- Diagramm



Zugfestigkeit R_m :

Höchste ertragbare Last, ab der keine elastische Dehnung mehr möglich ist

$$R_m = \frac{F_{max}}{A_0}$$

Streckgrenze R_e :

Höchste ertragbare Last ohne jegliche plastische Verformung (R_{eH} : obere Streckgrenze, aus der folgt:

R_{eL} : untere Streckgrenze)

$$R_{eH} = \frac{F_{s0}}{A_0} \quad R_{eL} = \frac{F_{su}}{A_0}$$

Bruchdehnung A :

$$A = \frac{\Delta l_B}{l_0} \cdot 100(\%)$$

Brucheinschnürung Z (Querschnittsverminderung):

$$Z = \frac{A_0 - A_B}{A_0} \cdot 100(\%)$$

Das Elastizitätsmodul (Hooke'sches Gesetz):

Im elastischen Bereich gilt: $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \text{const.}$ Das E-Modul bezeichnet, den Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung im elastischen Zustand. → je kleiner E ist, desto elastischer ist der Werkstoff

Dehnung:

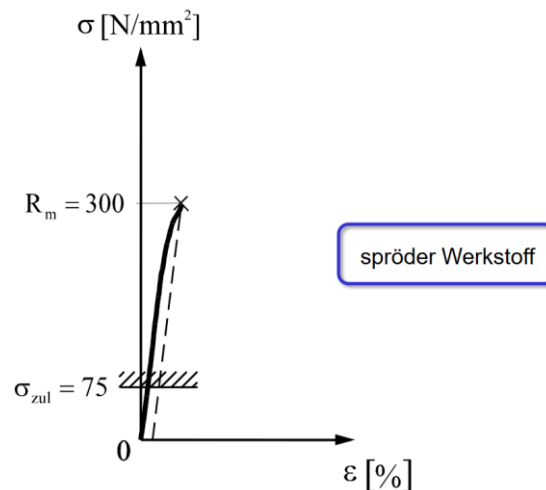
$$\text{Längsdehnung: } \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{Querdehnung: } \varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$$

$$\varepsilon_l \sim \varepsilon_q \Rightarrow \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l} = -\mu$$

Die Querkontraktionszahl (μ) stellt den Proportionalitätsfaktor zwischen den Längs- und der Querdehnung dar. Sie ist negativ, da sich der Querschnitt verkleinert, während sich die Länge vergrößert.

Druckversuch mit einem spröden Werkstoff:

Spröde bedeutet: Werkstoff hat keine plastische Verformung, es kommt direkt zum Bruch und der Stab schnürt sich nicht ein.



Sicherheit:

Zähe Werkstoffe: Gegen Versagensart Fließen: $S_F=1,5$
Gegen Bruch: $S_B=2$

Spröde Werkstoffe: $S_B=4$

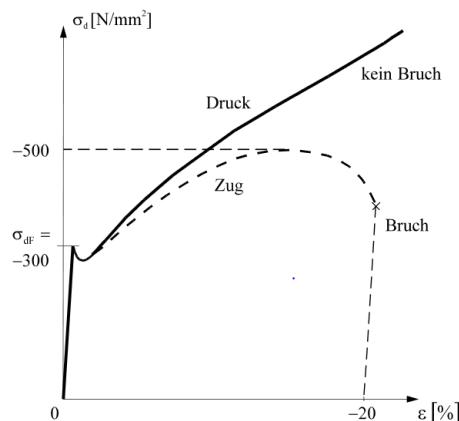
3. Druckbelastung (VI 2)

Stab ist auf fester Unterlage angebracht und Gewicht mit der Masse m wirkt auf ihn ein

$$\sigma_d = -\frac{F}{A}$$

Zähe Werkstoffe:

Spannungs-Dehnungsdiagramm bei Druckbelastung, wobei Druck eigentlich negativ sein sollte und nur Zug positiv:



- Zunächst identischer (punktsymmetrisches Verlauf) zur Zugbelastung
 - steiler, linearer Anstieg bis zum Erreichen der Druckfließgrenze σ_{dF} = Ende des elastischen Zustandes
 - Ende des elastischen Zustandes hat den gleichen Betrag, wie Streckgrenze bei Zug
 - Fließbereich: stetig ansteigende Kurve
 - Probe wird mehr oder weniger „plattgedrückt“, d.h. kein Bruch
 - keine Druckfestigkeit, kein A , kein Z
- E-Modul und Querkontraktionszahl μ sind gleich, wie beim Zug

Spröde Werkstoffe:

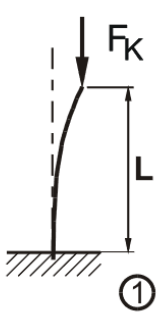
- Zunächst stimmt auch hier der Verlauf der Kurve mit der Zugbelastung überein
- Allerdings ist die ertragbare Spannung bis zum Bruch viel größer (meist ca. 4 mal so groß)
- Danach: Probe bricht, nach überwiegender elastischer Verformung, durch Risse

Sicherheit:

Für die Versagensarten Bruch und Fließen, werden die gleichen Sicherheitsbeiwerte, wie beim Zug verwendet.

Knicken:

Vier eulerschen Knickfälle:

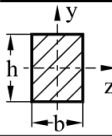
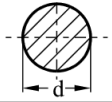
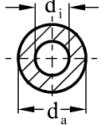
Knickfall (nach Euler)				
Knicklast F_K	$\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$

1. Fall: Feste Einspannung unten, oben ohne äußere Führung oder Einspannung
2. Fall: Stab ist an beiden Seiten gelenkig gelagert → kann nicht zur Seite ausweichen, aber Stabenden können sich verdrehen
3. Fall: Stab ist oben gelenkig, unten fest eingespannt
4. Fall: das untere Ende ist fest eingespannt, das ober vertikal geführt

Die Knicklast F_K hängt ab von:

- Geometrie des Stabes (hohe Knicklast, bei kleiner Länge)
- Elastizitätsmodul (Knicklast ist höher bei höherem E-modul)
- Trägheitsmoment I
- Einspannung, bzw. Führung

Axiales Trägheitsmoment I :

Rechteckquerschnitt		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$
Kreisquerschnitt		$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$
Kreisringquerschnitt		$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$

Berechnung der Knickspannung:

$$\sigma_K = -\frac{F_K}{A}$$

$$\sigma_{Kzul} = \frac{\sigma_K}{s_k} = -\frac{F_K}{A \cdot s_k}$$

Sicherheit:

Beim Knicken wird ein hoher Sicherheitswert, von 2,5 bis 5 ausgewählt.

Schlankheitsgrad:

Größe des Querschnitts allein ist nicht entscheidend, sondern Schlankheitsgrad λ , d.h. die Form des Querschnitts

$$\lambda \sim L \Rightarrow \lambda = L \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} \Rightarrow \lambda^2 = L^2 \cdot \frac{A}{I}$$

Prinzipiell: Schlanke Stäbe versagen vorwiegend durch Knicken, durchdrungene Stäbe durch Fließen.

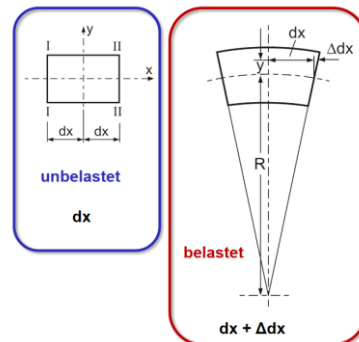
4. Biegebelastung (VI 3)

Statt einem geraden prismatischen Stab, wird hier ein Balken betrachtet → Kräfte greifen senkrecht zu seiner Achse an, statt in Richtung seiner Achse → Biegebeanspruchung

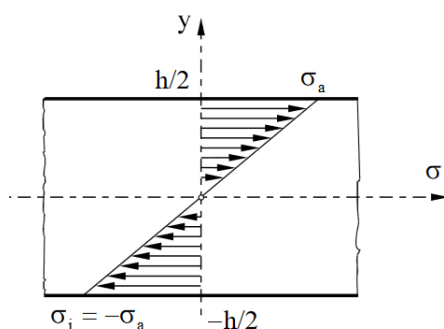
Balken ist auf zwei Lagern angebracht. Da eines der beiden Lager ein verschiebliches Lager ist, kann der Balken keine axialen Kräfte aufnehmen

Verformung:

Kleiner Balkenausschnitt:



- Im unverformten Zustand haben alle Fasern zwischen den parallelen Querschnitten I-I und II-II die gleiche Länge, nämlich $2dx$
- Belasteter Zustand:
 - Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Balkenachse
 - Faser an der Krümmungsaußenseite werden länger, Faser an der Krümmungsinnenseite werden kürzer
 - Faser in der Mitte behalten Länge bei, da keine Axialkraft wirkt
- Sei y der Abstand zwischen der Achse und einer beliebigen Faser, so ist die Länge der Faser im unverformten Zustand: dx und im verformten Zustand: $dx + \Delta dx$
- $\frac{\Delta dx}{y} = \frac{dx}{R} \Rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y}{R}$ (R ist der mittlere Krümmungsradius)
- Da der Ausdruck $\frac{\Delta dx}{dx}$ die Dehnung beschreibt ergibt sich die Gleichung: $\varepsilon = \frac{y}{R}$
- Mithilfe des Hooke'schen Gesetzes ergibt sich folgende Formel: $\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{R} \cdot y$
- Die Spannung ist in der Mitte des Balkens 0 und nimmt zu den Rändern hin entweder zu oder ab: oberer Querschnittshälfte wird auf Zug belastet, untere auf Druck



$$\sigma_a = \frac{E \cdot h}{2 \cdot R}$$

$$\sigma_i = -\frac{E \cdot h}{2 \cdot R}$$

- Die Spannungslosen Fasern heißen neutrale Fasern

Die Spannung ist abhängig von:

- E-Modul
- Von der Koordinate des Querschnitts
- Von R = die Größe der Verformung

Lagerkräfte L:

Es soll ein Gleichgewicht herrschen:

$$\sum F_x = 0$$

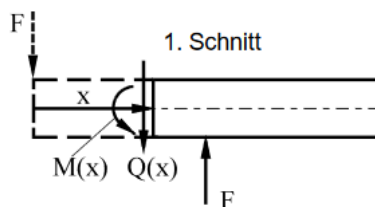
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Im System treten jedoch nur Kräfte in y-Richtung auf:

$$2F - 2L = 0 \Rightarrow F = L$$

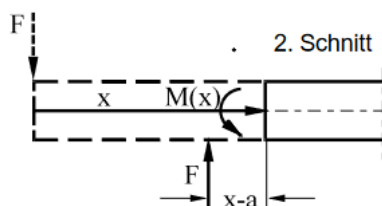
Biegemoment im Balken:



a) $0 \leq x \leq a$:

Querkraft: $Q(x) = F$

Biegemoment: $M(x) = F \cdot x$



b) $a \leq x \leq l/2$:

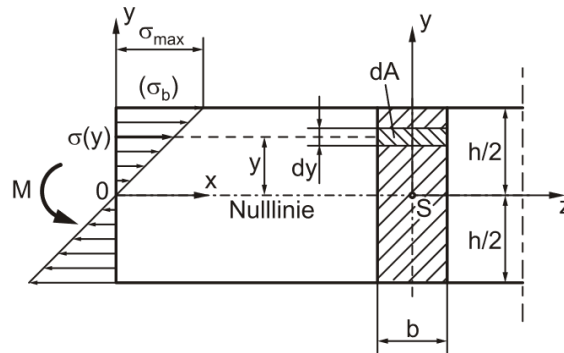
Querkraft: $Q(x) = F - F = 0$

Biegemoment: $M(x) = F \cdot x - F \cdot (x - a) = F \cdot a$

- ➔ Da $F = -F$ heben sich die Kräfte gegenseitig auf
- ➔ Aus dem Abstand zur Schnittstelle $x \cdot F$ ergibt sich das Biegemoment in a)
- ➔ Aus dem Abstand zur Schnittstelle $(x-a) \cdot -F$ ergibt sich das zweite Biegemoment (a ist hierbei der Abstand zwischen den beiden Kräften)
- ➔ Das maximale Biegemoment entsteht zwischen den Lagern: $M_{max} = F \cdot a$

Zusammenhang zwischen der Spannung und dem Biegemoment

Schnitt zwischen den Lagern, dh. M ist maximal und Querkraft $Q=0$:



Momentengleichgewicht ist notwendig:

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

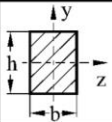
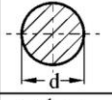
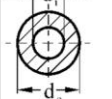
- ➔ Schnittmoment M muss mit der Momentenwirkung in der Schnittfläche $x=0$ im Gleichgewicht stehen
- ➔ Da M und die Spannungen der Schnittfläche gegenseitig drehen wollen, muss das äußere Moment gleich dem inneren Moment sein

Berechnung des inneren Moments:

- Innerer Moment: Zug- und Druckspannungen suchen den Querschnitt um die x -Achse zu drehen
- Anteil dM , den $\sigma(y)$ in einem beliebigen Abstand y zur x -Achse liefert
- $F = dA \cdot \sigma(y)$, wobei dA einem Flächenelement entspricht, dessen Höhe möglichst klein gewählt wird, sodass die Spannung konstant innerhalb des Flächenelements ist, die Breite ist dabei beliebig
- $dM = \sigma(y) \cdot dA \cdot y \Rightarrow M = \int_A \sigma(y) \eta y \cdot dA$
- Dies gilt für Proben, deren Biegeachse einer Symmetrieachse entsprechen

Bestimmung der z -Achse, wenn keine Symmetrie vorliegt:

- Die Summe aller teils positiven, teils negativen werden in der z -Achse zu 0, auch Nulllinie genannt.
- Hierfür wird das Flächenträgheitsmoment verwendet
- $M = \frac{E}{R} \cdot I_z$ oder: $M = \frac{\sigma(y)}{y} \cdot I_z$
- Daraus folgt: $\sigma(y) = \frac{M}{I_z} \cdot y$
- Dafür muss jeweils nur das maximale Biegemoment bestimmt werden.
- $\frac{I_z}{y_{max}}$ wird auch bezeichnet als W_b (=Widerstandsmoment) in mm^3
- Maximale Biegespannung: $\sigma_b = \frac{W_b}{M_b}$

		Verformungs- berechnung	Spannungs- berechnung
Rechteckquerschnitt		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ (Biegung um z)	$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$
Kreisquerschnitt		$I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$ (Biegung senkr. zur Achse)	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$
Kreisringquerschnitt		$I = \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$ (Biegung senkr. zur Achse)	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$

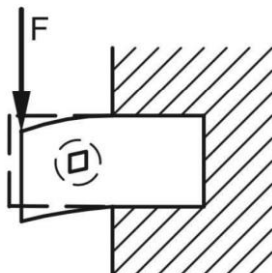
Zulässige Spannung:

- Spröde Werkstoffe:
 - Es gibt nur einen Biegeversuch für spröde Werkstoffe:
 - Nicht nötig, da Zug- und Druckersuche bereits genügend Auskunft geben
 - Biegefestigkeit: $\sigma_{bB} = \frac{M_{bmax}}{w_b}$, Sicherheitsbeiwert bei Bruch: $S_B=4$
- Zähe Werkstoffe:
 - Keine Biegefestigkeit
 - Biegefließgrenze: $\sigma_{bF} = Re$ (*Re bei Druck*), Sicherheitsbeiwert für Fließen: $S_F=1,5$
 - Gibt es auch bei spröden Werkstoffen

5. Schub (VL 4)

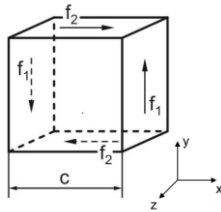
Verformung:

- Gleiche Belastung wie in 4., Länge l wird immer weiter reduziert
- Dadurch nimmt bei gleichbleibender Belastung die Spannung ab
- Kraft muss trotzdem aufgenommen werden → Schubbeanspruchung
- Folge der Querkraft die in 4. Vernachlässigt werden durfte
- Würfelement nimmt bei der Verformung Rautenform an
- Verzerrung der Gestalt durch Winkeländerung
→ Diese Winkeländerung γ
- Keine Längenänderungen



Spannungsberechnung:

- Beanspruchung durch Biegemoment kann vernachlässigt werden



- Kräfte am Würfелеlement:
 - $\sum F_y = f_1 - f_1 = 0$
 - Aber da $M_z \neq 0$ ist, muss auch f_2 wirken
 - $f_1 = f_2$
 - Kräfte sind nicht senkrecht zur Schnittfläche, sondern greifen in der Schnittebene (tangential) an
 - Schubspannung: $\tau = \frac{F}{A}$
- Zugeordnete Schubspannungen:
 - liegen in aufeinander senkrecht stehenden Schnittflächen
 - stehen senkrecht auf der Schnittkante
 - sind gleich groß, auch wenn Flächen nicht gleich groß sind
- Schubspannungen haben Maximum im Inneren

Der Schubmodul:

- Das Verhältnis $\frac{\tau}{\gamma}$ ist konstant und wird als der Schubmodul G bezeichnet
- $\tau = G \cdot \gamma$
- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$

Zulässige Spannung:

- Es wird nur gegen Bruch gerechnet $\rightarrow$ Scherfestigkeit $\tau_{ab} = \frac{F_{max}}{A_0}$
- Sicherheitsbeiwert: $S_B = 2$ für Stahl

6. Torsion (VL 5)

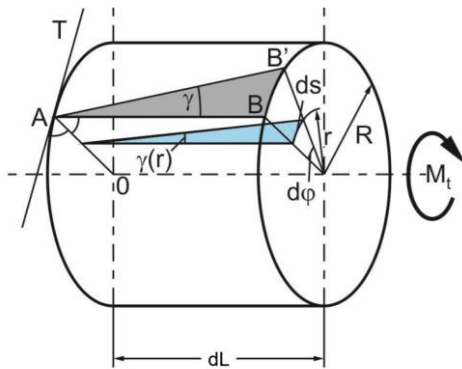
Verformung:

- Berechnung von kreiszylindrischen Stäben (Kreis- und Ringquerschnitt)
- Einseitig eingespannter Stab auf den ein Kräftepaar wirkt
- Kräftepaar liegt außerhalb der Ebene der Stabachse
- Torsionsmoment verdreht benachbarte Querschnittsebenen gegeneinander

Spannungsermittlung:

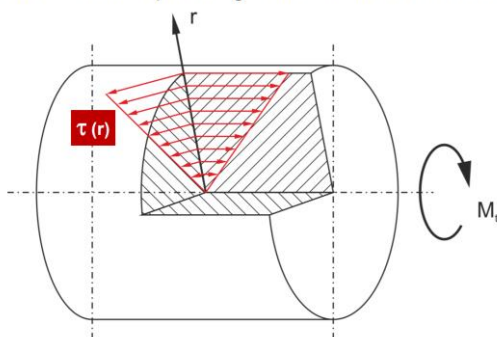
- Kräfte greifen über Hebelarm $a/2$ an
- Torsionsmoment: $M_t = F \cdot a$
- Jeder Querschnitt ist gleich beansprucht

- In den Querschnitten entsteht eine Schubbeanspruchung mit entsprechenden Schubspannungen



- Stabelement mit der Länge dl und dem Radius R
- Unter Belastung durch das Torsionsmoment wird der rechte Querschnitt gegen den linken um $d\varphi$ verdreht
- Mantellinie geht von AB zu AB' über $\rightarrow$ Winkeländerung zwischen Mantellinie und Tangente um den Winkel γ (Schiebung)
- Spezifische Verdrehung: $\omega = \frac{\varphi}{L}$
- $d_s = r \cdot d\varphi$ und $d_s \approx dl \cdot \gamma(r)$
- Integration über die gesamte Stablänge: $r \cdot \varphi = \gamma(r) \cdot l$
- Das heißt die Schiebung beträgt: $\gamma(r) = \frac{\varphi}{l} \cdot r$
- Maximale Schubspannung (ergibt sich aus Elastizitätsgesetz): $\tau_{max} = \frac{G \cdot \varphi}{l} \cdot R$
- Das heißt maximale Spannung ist auf der Mantelfläche
- Neben diesen Schubspannungen noch weitere zugeordnete Schubspannungen...
- Diese wirken in den Richtungen der beiden Schenkel des rechten Winkels der sich durch die Schiebung geändert hat
- Schubspannungen wirken in tangentialer und axialer Richtung

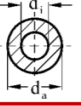
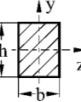
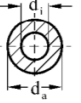
Zugeordnete Schubspannungen an einem Torsionsstab



Zusammenhang zwischen Torsionsmoment und Schubspannungen:

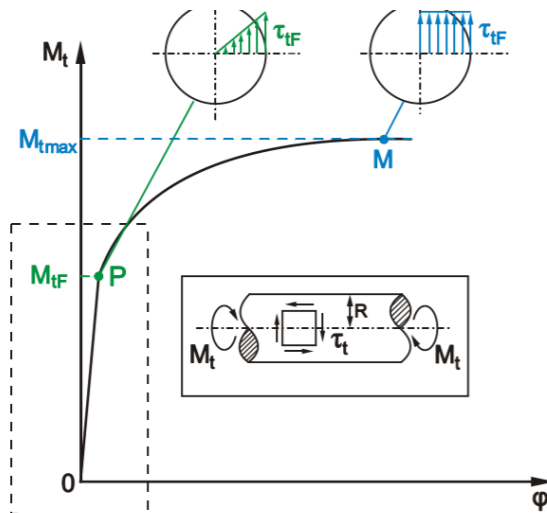
- Innere Torsionsmoment:
 - Integration...
 - Führt zur Gleichung: $M = \frac{G \cdot \varphi \cdot I_p}{1} \Rightarrow M = \frac{r \cdot I_p}{r}$
 - Für die Spannung gilt also: $\tau(r) = \frac{M}{I_p} \cdot r$
 - Die maximale Spannung herrscht wieder an der Manteloberfläche

- Aus ihr folgt Widerstandsmoment $W_t = \frac{I_p}{r_{max}}$
- Daraus folgt die maximale Schubspannung ist: $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$
- Berechnung des Verdrehungswinkels: $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$

polar	Kreisquerschnitt		$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
	Kreisringquerschnitt		$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$
axial	Rechteckquerschnitt		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$
	Kreisquerschnitt		$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$
	Kreisringquerschnitt		$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)$

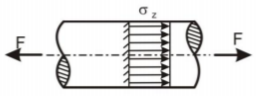
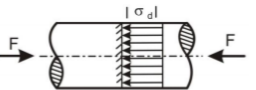
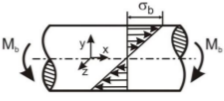
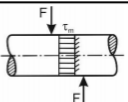
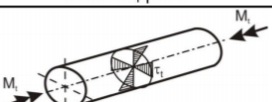
Zulässige Spannung:

- Torsionsfließgrenze: $\tau_{tF} = \frac{M_{tF}}{W_t}$, bei Stahl: $\tau_{tF} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_e$ und bei GG: $\tau_{tF} = 0,58 R_e$
- Torsionsfestigkeit: $\tau_{tB} = \frac{M_{tmax}}{W_t}$, was ungefähr R_m entspricht
- Zähe Werkstoffe: Fließen und Bruch
- Spröde: nur Bruch
- $S_F = 1,5$ und $S_B = 2$ bzw 4 für GG



Torsionsversuch DIN 1602

Zusammenfassung der Grundbelastungsfälle:

Grundbelastungsfälle		
Beanspruchung	Spannungsverteilung	Maximalspannung
Zug		$\sigma_z = \frac{F}{A}$
Druck		$\sigma_d = -\frac{F}{A}$
Biegung		$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$
Schub		$\tau_m = \frac{F}{A}$ (mittlere Schubspannung)
Torsion		$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$

Beanspruchungsart	Spannung	Werkstoffkennwert		
		Bezeichnung	Zeichen	Ersatzwert bei Stahl
Zug	$\sigma = \frac{F}{A}$	Streckgrenze; Fließgrenze 0,2-Dehngrenze Zugfestigkeit	R_e $R_{p0,2}$ R_m	
Druck ¹⁾	$\sigma_d = \frac{F}{A}$	Druckfließgrenze (Stauchgrenze) Druckfestigkeit	σ_{dF} σ_{dB}	R_e bzw. $R_{p0,2}$
Biegung	$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$	Biegefließgrenze Biegefestigkeit	σ_{bF} σ_{bB}	R_e bzw. $R_{p0,2}$
Schub	$\tau = \frac{F}{A}$	Scherfestigkeit	τ_{aB}	$(0,65-0,75) R_m$
Torsion	$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$	Torsionsfließgrenze Torsionsfestigkeit	τ_{tF} τ_{tB}	$0,58 R_e$ bzw. $0,58 R_{p0,2}$ R_m

Werkstoff Lastfall	duktil		spröd
	Fließen	Bruch	Bruch
Zug	R_e/S_F	R_m/S_B	R_m/S_B
Druck	$-R_e/S_F$	—	$-\sigma_{dB}/S_B$
Knicken	$-F_K/A \cdot S_K$	—	$-F_K/A \cdot S_K$
Biegung	R_e/S_F	—	σ_{bB}/S_B
Schub	—	$0,7 \cdot R_m/S_B$	—
Torsion	$0,58 \cdot R_e/S_F$	R_m/S_B	R_m/S_B
Sicherheitsbeiwerte	$1,2 \div 2$	$2 \div 3$	$4 \div 9$
typisch*	1,5	2	4

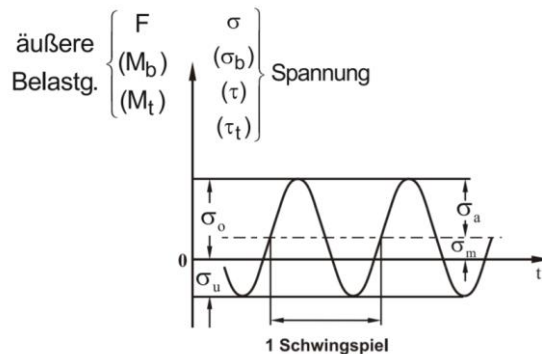
* $S_K = 2,5 \div 5$ (3,5)

7. Schwingende Belastung

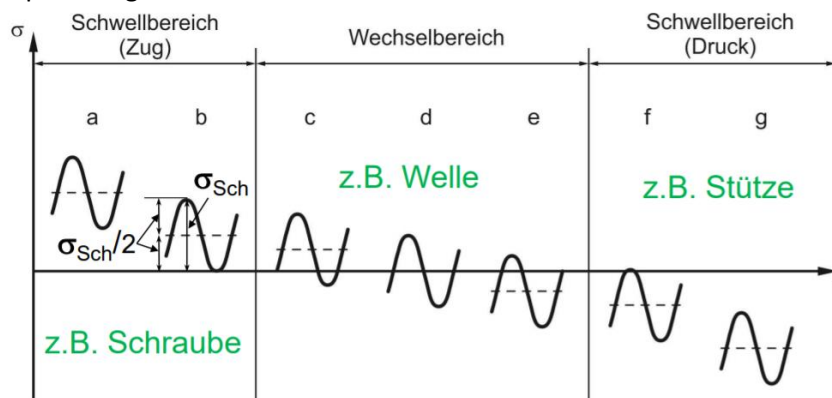
- Zeitabhängige Belastung → dynamisch
- Sonderfall: schwingende Belastung
- Beanspruchung ändert sich periodisch zwischen festen Grenzen
- Wenn $\sigma_{\max} < R_m$, kann Schwingungsbruch eintreten
- Bruch abhängig von Anzahl der Schwingungen N (auch Werkstoff-Ermüdung)

Spannungsermittlung:

- Spannungsgrößen bei schwingender Beanspruchung:



- Schwingbeanspruchung ist Folge von Gleichgewichtszuständen zwischen äußerer und innerer Beanspruchung
- Spannung ist in jedem Augenblick zur äußeren Belastung proportional
- Höhe der Spannung ändert sich periodisch zwischen den zwei Grenzwerten σ_o und σ_u
- Daraus folgt die Schwingungsamplitude: $\sigma_a = \frac{(\sigma_o - \sigma_u)}{2}$ und die statische Mittelspannung: $\sigma_m = \frac{(\sigma_o + \sigma_u)}{2}$
- Doppelte Amplitude: Schwingbreite $\Delta\sigma$
- Je nach Vorzeichen von Ober- und Unterspannung unterscheidet man verschiedene Beanspruchungsbereiche:



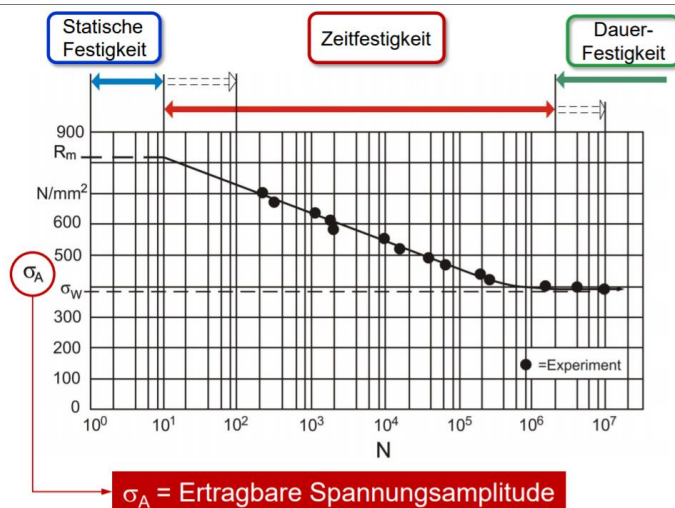
Fall	a	b	c	d	e	f	g
σ_o	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0
σ_m	> 0	$= \sigma_o/2$	> 0	$= 0$	< 0	$= \sigma_u/2$	< 0
σ_u	> 0	$= 0$	< 0	$= -\sigma_o$	< 0	< 0	< 0
R	$1 > R > 0$	$R = 0$	$0 > R > -1$	$R = -1$	$-1 > R > -\infty$	$R = -\infty$	$\infty > R > 1$

- Zugschwellbereich: Zugspannungen
- Wechselbereich
- Schwellbereich: Druckspannungen

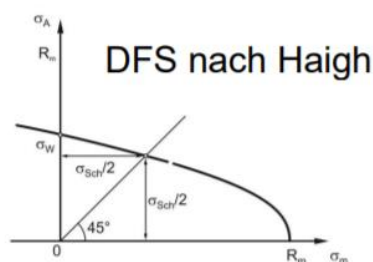
- Zur Beschreibung der Schwingbeanspruchung wird Spannungsverhältnis: $R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$ verwendet
 - Nur Art der Beanspruchung, nicht Größe
- Spannungsermittlung ist analog zur statischen Belastung, Spannung als Sinuskurve darstellbar

Werkstoffverhalten:

- Dauerschwingversuch
 - Zylindrischer Probestab wird belastet → Anzahl der Belastungen bis zum Bruch registriert
- Ergebnis: Wöhlerkurve, wenn man σ_a über Anzahl N der Schwingspiele bis zum Bruch aufträgt
- Bei $\sigma_a = \sigma_1$ benötigt es eine Belastung bis zum Bruch usw.



- Je mehr man die Spannungsamplitude vermindert, umso größer die Anzahl der Schwingspiele bis zum Bruch
- Allmählich: waagerechter Verlauf, dh. unterhalb bestimmter Spannungsamplitude kein Bruch mehr
- Bereich der Dauerfestigkeit σ_w
- Mittelspannung kann hierbei auch von 0 verschieden sein
 - Allgemeiner Fall schwingender Belastung: Überlagerung einer statischen Mittelspannung und zeitlich wechselnden Spannung mit Amplitude σ_a
 - Die unter beliebiger Mittelspannung ertragbare Amplitude heißt Dauerschwingfestigkeit σ_D
- Zusammenhänge zwischen Mittelspannung und Ober- und Unterspannung lassen sich in Dauerfestigkeitsschaubild darstellen (unten Darstellung nach Haigh)



- Dauernd ertragbare Spannungsamplitude über Mittelspannung aufgetragen

-

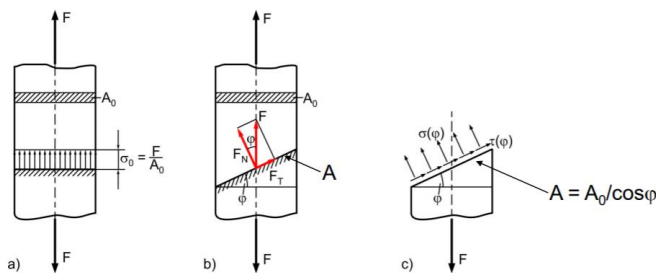
- Zulässige Spannung:**

- Versagen durch Schwingungsbruch
- Festigkeitsbedingung: $\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}}$
- $\sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_A}{S_D}$, wobei $S_D = 1,5$ bis $2,5$ ist
- Zusätzlich: $\sigma_0 \leq \sigma_{0 \text{ zul}}$, wobei $\sigma_0 = \frac{R_e}{S_F}$ bzw. $\frac{R_m}{S_F}$

8. Allgemeiner Spannungs- und Verformungszustand

Spannung an schrägen Schnitten:

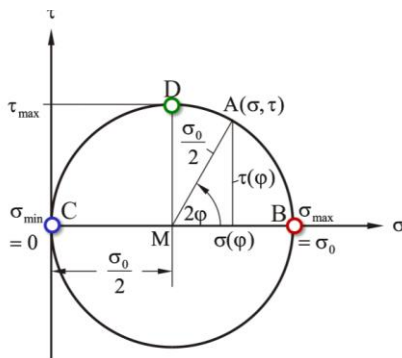
- Bis jetzt: Schnitt senkrecht zur Achsrichtung bzw. zur äußeren Kraft F
- Jetzt: schräger Schnitt mit beliebigem Winkel φ zum Stabquerschnitt
- Kraft wird in $F_n = F \cdot \cos(\varphi)$ und $F_t = F \cdot \sin(\varphi)$ zerlegt
- Größe der Schnittfläche: $A = \frac{A_0}{\cos(\varphi)}$
- Daraus folgen die Spannungen:
 - $\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cdot \cos^2(\varphi)$
 - $\tau(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_0 \sin 2\varphi$
- Für $\varphi = 0^\circ$ wirken nur Normalkräfte und für $\varphi = 90^\circ$ weder Tangentialkräfte noch Normalkräfte



Mohr'scher Spannungskreis:

- Aus den Gleichungen für die Normalspannung und die Tangentialspannung folgt durch Umformen:

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2$$
- Das entspricht in einem $\sigma(\varphi), \tau(\varphi)$ Koordinatensystem einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(\sigma_0/2; 0)$ und dem Radius $\sigma_0/2 \rightarrow$ Mohrscher Spannungskreis



- Jeder Punkt repräsentiert ein Wertepaar bei bestimmtem Winkel
- Schnittpunkte mit der σ -Achse: Extremwerte der Normalspannung, auch Hauptspannungen $\sigma_{\max} = \sigma_0$ und $\sigma_{\min} = 0$
- Nun auch allgemeinere Belastungen: eindimensionaler Flachstab wird zu zweidimensionaler Scheibe
 - Seitenflächen A_1 und A_2
 - Seitenflächen werden belastet durch die Normalkräfte F_1 und F_2
 - Wird die Scheibe diagonal durchgeschnitten, so wirkt auf die Schnittfläche A , die unter φ zu A_1 liegt, die mit F_1 und F_2 im GG stehen muss

- Zerlegung von F_n und F_t :

$$F_1 = F_n \cdot \cos(\varphi) + F_t \cdot \sin(\varphi)$$

$$F_2 = F_n \cdot \sin(\varphi) - F_t \cdot \cos(\varphi)$$
- Es folgt:

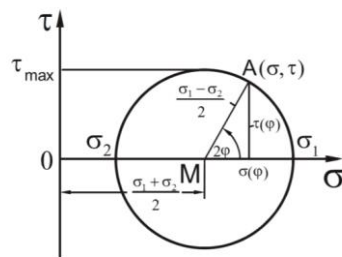
$$F_n = A \cdot \sigma(\varphi)$$

$$F_t = A \cdot \tau(\varphi)$$

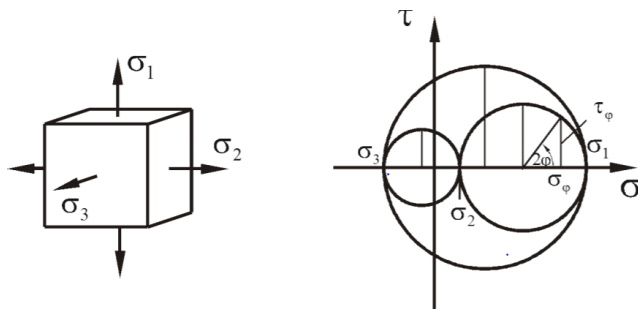
$$F_1 = A_1 \cdot \sigma_1 = A \cdot \cos(\varphi) \cdot \sigma_1$$

$$F_2 = A_2 \cdot \sigma_2 = A \cdot \sin(\varphi) \cdot \sigma_2$$
- Durch Umformen und Verwenden von Winkelbeziehungen ergibt sich:

$$\left(\sigma(\varphi) - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau(\varphi)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$
- Kreis mit Mittelpunkt nicht auf dem Ursprung, σ_1 und σ_2 sind die Hauptspannungen



- Nun auch dreidimensionaler Körper
 - Volumenelement belastet durch 3 Normalspannungen σ_3 , σ_1 und σ_2
 - Schnitt durch σ_1 - und σ_3 Ebene: gleiche Verhältnisse wie bei Scheibe
 - Drei Spannungskreise (pro Ebene)
 - Alle Spannungskreise berühren sich paarweise → drei Hauptspannungen
 - Spannungszustand: ob einachsig, zweiachsig oder dreiachsig (wie viele Hauptspannungen ungleich 0 sind)
 - Bei Zug, Druck und Biegung: einachsig



Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz

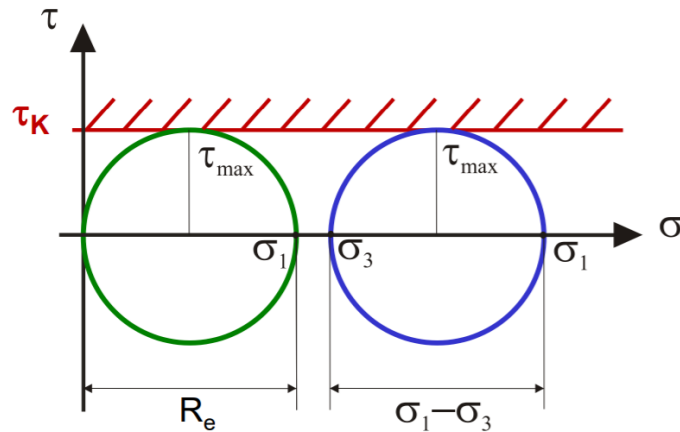
- Vorher: einachsiger Spannungszustand, jetzt auch dreiachsig
- Betrachtung eines würfelförmigen Elements, bei dem Kanten parallel zu x,y,z KS
- Würfelflächen sind Hauptschnitte → keine Schubspannungen
- Wenn Element aus Zugstab, dessen Achse gleich der x-Achse gilt (einachsig):
 - $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$
 - $\varepsilon_y = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$
 - $\varepsilon_z = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$
- Wirken nur Spannungen in y- oder z- Richtung, so ergeben sich die Gleichungen analog
- Wirken Spannungen in alle drei Richtungen gilt:

- $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right)$
- $\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right)$
- $\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right)$
- Nach der Spannung aufgelöst ergibt sich:
 - $\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right)$
 - $\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right)$
 - $\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot e \right)$
- Sind die drei Spannungen, durch die Würfelement belastet wird nicht die 3 Hauptspannungen, dann wirken zusätzlich noch Schubspannungen
 - Diese Schubspannungen kann man (auch wenn nicht ganz korrekt) in zwei aufeinander senkrecht stehenden Spannungen aufteilen
 - 6 Schubspannungen, wovon jeweils zwei einander zugeordnet sind, also 3
 - Schubspannung mit der jeweiligen Schiebung verknüpft, es folgt:
 - $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$
 - $\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$
 - $\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$
- Im technischen ist auch der zweiachsige Spannungszustand wichtig
- Eine Normalspannung des dreiachsigen Zustands wird hierfür Null gesetzt, es folgt:
 - $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_y)$
 - $\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_z)$
 - $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$
- Und für die Spannungen:
 - $\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$
 - $\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$
 - $\sigma_z = 0$

Festigkeitshypothesen

- Bisher einachsiger Spannungszustand, daher direkter Vergleich der wirkenden Spannung und der zulässigen möglich
 - Wenn mehrere Spannungen wirken, muss man mehrachsigen Spannungszustand auf einachsigen überführen
→ Festigkeitshypothesen
 - Z.B. kann aus Hauptspannung die Vergleichsspannung σ_u berechnet werden
 - Festigkeitsbedingung: $\sigma_u \leq \sigma_{zul}$
1. Die Normalspannungshypothese (NH)
 - Für die Beanspruchung ist allein die größte Normalspannung maßgebend
 - Vergleichsspannung: $\sigma_u = |\sigma_{max}|$
 - Ein Versagen, was bei Normalspannungen typisch ist tritt ein
 - Anwendung, wenn mit keiner plastischen Verformung vor Bruch zu rechnen ist
 - Bei spröden Werkstoffen oder wenn die Verformungsmöglichkeiten eingeschränkt sind
 2. Die Schubspannungshypothese (SH)

- Größte Schubkraft ist maßgebend
- Belastung ist erschöpft, wenn die maximale Schubkraft τ_{max} einen werkstoffeigenen kritischen Wert τ_k erreicht
- Mohrscher Spannungskreis: Horizontale Gerade im Diagramm, wenn Kreis Gerade berührt, tritt Versagen ein



- Vergleichsspannung:
 - $\sigma_u = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\tau_n$
- Werkstoff versagt durch plastisches Fließen
- → für zähe Werkstoffe

3. Gestaltänderungsenergiehypothese

- Die in elastisch verformten Körperelement gespeicherte Gestaltänderungsenergie ist maßgebend
- Versagen durch plastische Formänderungen
- Vergleichsspannung:
 - $\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$
- Versagen, wenn Vergleichsspannung gleich dem R_e ist
- Versagen wenn Vergleichsspannungsamplitude, die ertragbare Spannungsamplitude erreicht hat
- Verwendung bei zähen Werkstoffen

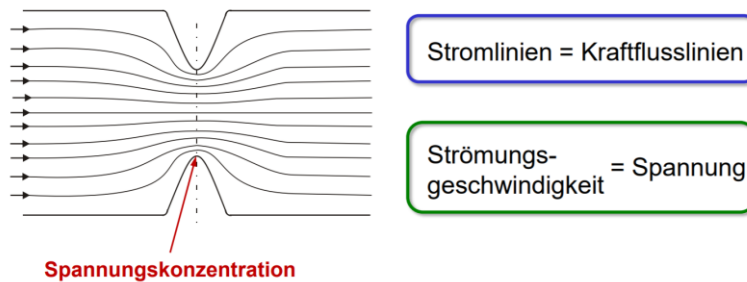
Vergleichsspannungen				
Spannungszustand				
Festigkeits-hypothese	dreiaxial	zweiaxial		
	$\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	$\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3 = 0^{+)}$	$\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}$	$\sigma_b; \tau_t$
(NH)	σ_1 (Zug) bzw. σ_3 (Druck)	σ_1	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\frac{\sigma_b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$
(SH)	$\sigma_1 - \sigma_3$	σ_1	$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}^{++)}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$
(GEH)	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$

⁺⁾ Für die Fälle $\sigma_1 > 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$ bzw. $\sigma_1 = 0; \sigma_2 < 0; \sigma_3 < 0$ ergibt sich σ_V aus Spalte 1

⁺⁺⁾ gilt nur für $\sigma_x\sigma_y \leq \tau_{xy}^2$; für $\sigma_x\sigma_y > \tau_{xy}^2$ ist $\sigma_V(\text{SH}) = \sigma_V(\text{NH})$

9. Kerbwirkung

- Kerbe= Einschnitt in eine sonst glatte Oberfläche
- Dadurch wird vorher gleichmäßiger „Kraftfluss“ gestört
→ an der Kerbstelle entsteht eine Spannungskonzentration → Spannungspitze
- Nicht korrekte, aber anschauliche Vorstellung ist die Stromlinienanalogie:

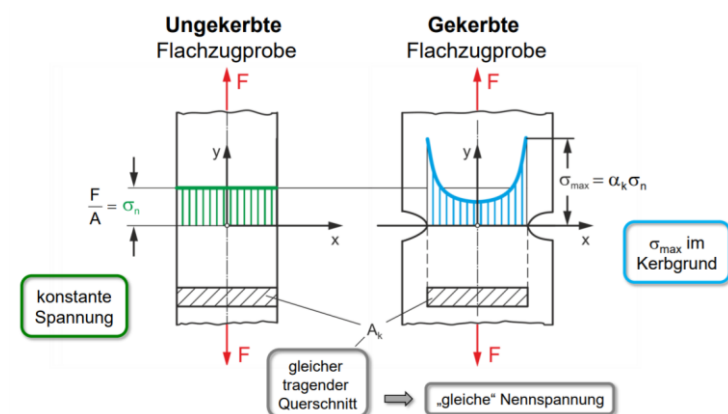


- Zwei Effekte tragen zur Kerbwirkung bei:
 - Tragender Querschnitt wird verringert
 - Beanspruchung konzentriert sich auf den Kerbgrund

Statische Beanspruchung

Formzahl:

- In geraden prismatischen Bauteilen stellt sich bei den Grundbelastungsarten ein linearer Spannungsverlauf ein
 - Entweder Spannung verteilt sich mit konstanter Größe oder:
 - Nimmt von neutraler Faser ausgehend zu oder ab (linear)
- Linearer Verlauf stellt sich nicht ein, wenn Körperform durch Kerbe gestört ist



- Im Kerbgrund tritt maximale Spannung auf
- Diese Spannung liegt oberhalb der Nennspannung σ_n
- Zum Ausgleich liegt die Spannung im Stabinneren unter der Nennspannung
- Verhältnis von Maximalspannung zur Nennspannung bezeichnet man als Formzahl α_k
 - $\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$
- Bei der Definition der Formzahl ist vorausgesetzt, dass sich Werkstoff in elastischen Zustand befindet
- Größe der Formzahl wird bestimmt durch
 - Form der Kerbe

- Beanspruchungsart
- Nicht von der Beanspruchungshöhe und dem Werkstoff

Auswirkung auf das Festigkeitsverhalten:

- Spröde Werkstoffe:
 - Elastisch bis zum Bruch, daher bleibt die inhomogene Spannungsverteilung bis zum Bruch erhalten
 - Sobald Spannungsspitze die Zugfestigkeit des Werkstoffes erreicht, reißt der Werkstoff an der Kerbe ein, was einen totalen Bruch auslöst
 - Versagen bei: $\sigma_{max} = R_m$
 - Festigkeitsbedingung: $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$
- Zähle Werkstoffe:
 - Solange Werkstoff elastisch beansprucht wird, sind die Kraft und die Dehnung proportional
 - Beim Erreichen von R_e beginnt der plastische Zustand
 - Last bei Fließbeginn: $F_F = \frac{R_e \cdot A}{\alpha_k}$
 - Plastische Verformung breitet sich vom Kerbgrund nach innen aus
 - Im Querschnitt noch teilweise elastische Verformungen
 - Wenn plastische Verformungen den ganzen Querschnitt erreicht haben, ist die Last für den Stab gleich der Fließlast für den glatten Stab, allerdings ist Kerbstab viel weiter gedehnt
 - Bei der Festigkeitsberechnung wird das Erreichen einer bestimmten plastischen Dehnung als Versagen festgelegt
 - Die dadurch mögliche Laststeigerung ist festgelegt durch Stützziffer:

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$
 - Maximalspannung: $\sigma_{max} = n_{pl} \cdot R_e$
 - $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$, wobei: $\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$ und $\sigma_{zul} = \frac{n_{pl} \cdot R_e}{S_F}$
 - Näherung der Stützziffer: $n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}}$, wobei $\varepsilon_F = \frac{R_e}{E}$ und $\varepsilon_{ges} = \varepsilon_F + \varepsilon_{pl}$
 - Zusätzliche Rechnung gegen Bruch: Kerbwirkung wird außer Acht gelassen

Schwingende Beanspruchung

Kerbwirkungszahl

- Mit Versagen ist zu rechnen, wenn die von der äußeren Belastung hervorgerufene maximale Spannungsamplitude den Wert der vom Werkstoff ertragbaren Spannungsamplitude erreicht
 - $\sigma_{a max} = \sigma_A$
- Zunächst: rein wechselnde Zug-Druck Beanspruchung
- Kerbe bewirkt eine deutliche Verminderung der Belastbarkeit
- Die Beanspruchung ist rein elastisch
- Berechnung der maximalen Spannungsamplitude: $\sigma_{a max} = \alpha_k \cdot \sigma_{an}$, wobei σ_{an} die Nennspannungsamplitude ist
- Schwingungsbruch tritt ein, wenn: $\sigma_w = \alpha_k \cdot \sigma_{an}$
- Dauerfestigkeit eines Kerbstabes ist somit: $\sigma_{wk} = \frac{\sigma_w}{\alpha_k}$

- Jedoch ist dies nur theoretisch, praktisch ist höhere Nennspannung ertragbar:
Kerbwirkungszahl β_k
 - $\beta_k = \frac{\sigma_w}{\sigma_{wk}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_{Ak}}$
- Die Kerbwirkungszahl hängt ab von:
 - Form und Größe der Kerbe (in der Formzahl)
 - Beanspruchungsart (in der Formzahl)
 - Spezifische Werkstoffeigenschaften (Streckgrenze, Zugfestigkeit, Härte,...)
- Grenzen der Kerbwirkungszahl: $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$
 - Wenn die Kerbwirkungszahl gleich der Formzahl ist, hat man die größtmögliche Kerbwirkung
 - Wenn Kerbwirkungszahl gleich 1 ist, dann tritt keine Kerbwirkung auf
- Siebel-Verfahren zur Bestimmung der Kerbwirkungszahl
 - Dynamische Stützziffer $n_x = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$
 - Maß für die Stützwirkung, welche die hochbeanspruchten Randschichten durch die darunter liegenden Schichten erfahren

Auswirkung auf das Festigkeitsverhalten:

- Schwingbruch, wenn $\sigma_{a \max} = \sigma_A$
- Daraus folgt die Festigkeitsbedingung: $\sigma_{a \max} \leq \sigma_{zul}$
 - $\sigma_{a \max} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$
 - $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_A}{S_D}$
 - Für spröde und zähe Werkstoffe

Bean- spruchung	Werkstoff	Versagensart	Festigkeitsbedingung
statisch	zäh	Fließen	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$ $\sigma_{zul} = n_{pl} \cdot R_e / S_F$
statisch	zäh	Bruch	$\sigma_n \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_{zul} = R_m / S_B$
statisch	spröd	Bruch	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$ $\sigma_{zul} = R_m / S_B$
schwingend	zäh/spröd	Schwingbruch	$\sigma_{a \max} \leq \sigma_{azul}$ $\sigma_{a \max} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$ $\sigma_{azul} = \sigma_A / S_D$