

Physikalisches Blockpraktikum für Naturwissenschaftler

Saitenschwingung

Betreuer: Matthias Hiltwein

Gruppe 3

18.02.2019

Einleitung

In diesem Versuch wird eine Saite zwischen einem Lautsprecher und einer Klemme eingespannt, wodurch eine stehende Welle entstehen kann. Eine stehende Welle kommt dann zustande, wenn eine Welle auf ein loses oder festes Ende trifft, und dort reflektiert wird. Durch konstruktive und destruktive Interferenz zeichnen sich dann erkennbare Knoten und Bäuche aus. Ziel dieses Versuches ist es, den Zusammenhang zwischen Saitenlänge, Saitenspannung und Frequenz zu ermitteln.

Versuchsaufbau

Ein Lautsprecher ist über einen Stab mit einer Saite verbunden, welche durch zwei Klemmen und eine Umlenkrolle verläuft. An ihr hängen Gewichte, wodurch die Saitenspannung variiert werden kann, indem man die Gewichte austauscht. Die erste Klemme und der Lautsprecher stellen das feste Ende der Saite dar, die Klemme lässt sich verschieben. Die zweite dient der gleichmäßigen Verteilung der Spannung. Der Lautsprecher wird an einen Frequenzgenerator angeschlossen, womit die Frequenz eingestellt und abgelesen werden kann.

Auswertung

1a) Bestimmung der Grundfrequenzen

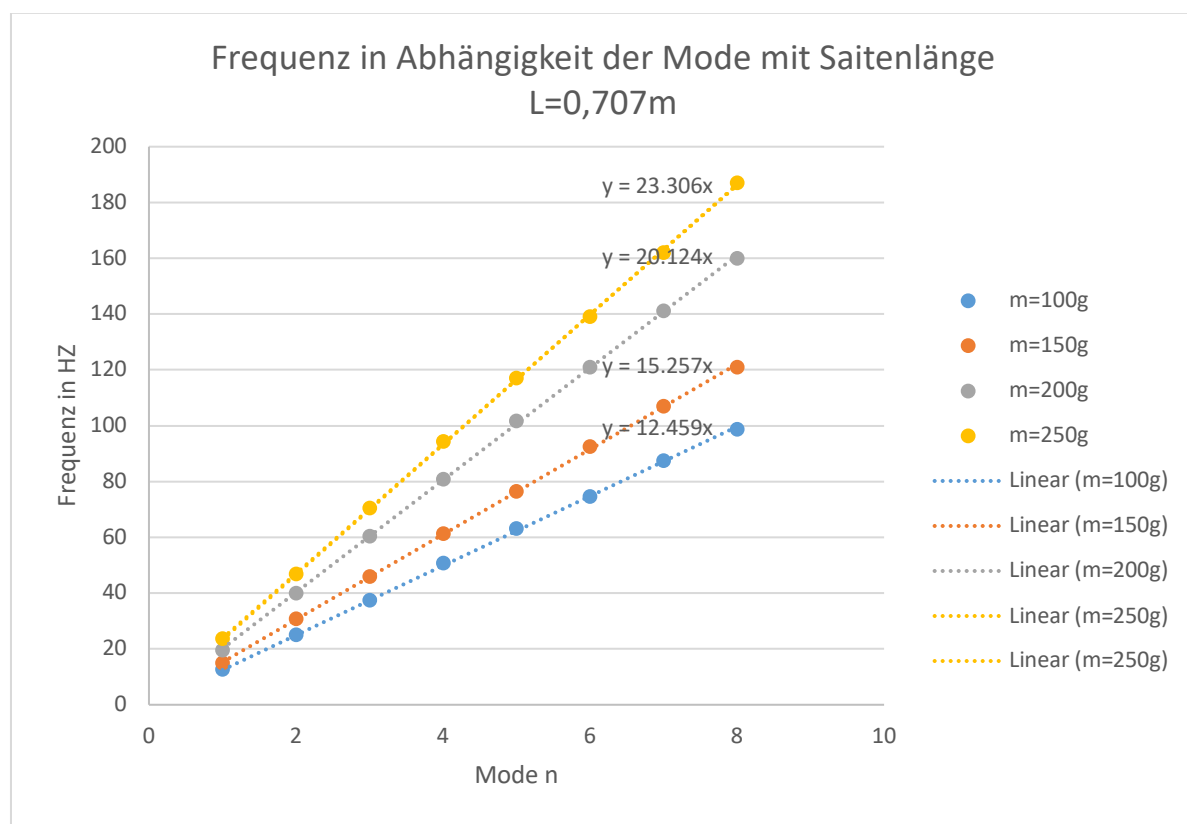


Abb 1: Die Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von den Schwingungsmoden n

Die Grundfrequenzen f_n der Saiten können mittels der Steigung der Ausgleichsgeraden und der Gleichung SA.4 bestimmt werden.

$$f_n = f_1 \cdot n$$

Daraus ergeben sich folgende Werte:

Für $m=100\text{g}$: $f_1 = 12.459 \text{ Hz}$

Für $m=150\text{g}$: $f_2 = 15.257 \text{ Hz}$

Für $m=200\text{g}$: $f_3 = 20.124 \text{ Hz}$

Für $m=250\text{g}$: $f_4 = 23.306 \text{ Hz}$

Die Unsicherheiten der Steigung der Ausgleichsgeraden wurden mithilfe der RPG-Funktion von Excel ermittelt.

f_G in Hz	Messunsicherheit Δu_{f_n}
12,459	0,08360476
15,257	0,07946807
20,124	0,08907462
23,306	0,10549475

Tabelle 1: Messunsicherheiten der Grundfrequenzen f_n

Daraus folgern die Endergebnisse:

$$f_1 = (12,46 \pm 0.09)\text{Hz}$$

$$f_2 = (15,26 \pm 0.08)\text{Hz}$$

$$f_3 = (20,12 \pm 0.09)\text{Hz}$$

$$f_4 = (23,31 \pm 0.11)\text{Hz}$$

1b) Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Mithilfe der Formel aus SA.4 lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c berechnen:

$$f_n = \frac{c}{2L} \rightarrow c = f_n \cdot 2L$$

Damit lassen sich die jeweiligen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Frequenzen berechnen. Die Saitenlänge betrug $L=0,707\text{m}$.

$$c_1(f_1, L) = 17.617026 \frac{m}{s}$$

$$c_2(f_2, L) = 21.573398 \frac{m}{s}$$

$$c_3(f_3, L) = 28.455336 \frac{m}{s}$$

$$c_4(f_4, L) = 32.954684 \frac{m}{s}$$

Die Messunsicherheit Δu_c für c wird durch das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet:

$$\Delta u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial f_n} \cdot \Delta u_{f_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial L_1} \cdot \Delta u_L\right)^2}$$

Δu_L ist gegeben durch

$$\Delta u_L = \Delta l_{syst} + \Delta l_{stat}$$

Mithilfe der Gleichung GR.5 lässt sich Δl_{syst} ermitteln durch:

$$\Delta l_{syst} = \pm(a + b \cdot L)$$

Der Versuch wurde mit einem Messstab der EG-Genauigkeitsklasse III durchgeführt. Durch die Tabelle GR.5 lassen sich die Werte für a und b entnehmen.

$$\Delta l_{syst} = \pm(0.6mm + 0.4mm \cdot 1m) = 1mm$$

Δl_{stat} wird aus der Tabelle GR.9 für Meterstab entnommen:

$$\Delta l_{stat} = \pm 0.3mm$$

Der Fehler der Längenmessung ist daher:

$$\Delta u_L = 1mm \pm 3mm = \pm 1.3mm$$

Für die partielle Ableitung gilt:

$$\frac{\partial c}{\partial f_n} = 2L$$

$$\frac{\partial c}{\partial L_1} = 2f_n$$

Dadurch ergibt sich für die Fehlerberechnung von der Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$\Delta u_c = \sqrt{(2L \cdot \Delta u_{f_n})^2 \cdot (2f_n \cdot \Delta u_L)^2} = \sqrt{(2 \cdot 0,707m \cdot \Delta u_{f_n})^2 \cdot (2f_n \cdot 0,0013m)^2}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit c in $\frac{m}{s}$	Δu_c in $\frac{m}{s}$
17.617026	0.122575
21.573398	0.119164
28.455336	0.136387
32.954684	0.161007

Tabelle 2: Messunsicherheiten der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Daraus folgern die Endergebnisse:

$$c_1 = (17.62 \pm 0.13) \frac{m}{s}$$

$$c_2 = (21.57 \pm 0.12) \frac{m}{s}$$

$$c_3 = (28.46 \pm 0.14) \frac{m}{s}$$

$$c_4 = (32.95 \pm 0.17) \frac{m}{s}$$

1c) Bestimmung der Saitenmasse m

Mithilfe der Gleichungen SA.4 bis SA.7 kann man eine Gleichung zur Ermittlung der Saitenmasse m aufstellen. Die Gleichung aus SA.6 wird mit SA.5 und SA.7 verknüpft. Umgeformt ergibt sich:

$$c = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot L}{m}}$$

Die gesuchte Funktion $m(M, g, L, f_n)$ ergibt sich durch einsetzen der Formel aus SA.4:

$$f_n \cdot 2L = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot L}{m}} \rightarrow m = \frac{M \cdot g}{4f_n^2 \cdot L}$$

Mithilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes wird noch die Messunsicherheit Δu_m für die Massenbestimmung der Saite berechnen. Dafür gilt folgende Formel:

$$\Delta u_m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial M} \cdot \Delta u_M\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial L} \cdot \Delta u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial f_n} \cdot \Delta u_{f_n}\right)^2}$$

Es gilt $\Delta u_M = 1.0g$ und $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, und außerdem:

$$\frac{\partial m}{\partial M} = \frac{g}{4 \cdot f_n^2 \cdot L}$$

$$\frac{\partial m}{\partial L} = -\frac{g \cdot M}{4 \cdot f_n^2 \cdot L^2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial f_n} = -\frac{g \cdot M}{2 \cdot f_n^3 \cdot L}$$

M in kg	m in kg	Δu_m in kg
0.1	0.00223484	3.7629E-05
0.15	0.00223525	2.7949E-05
0.2	0.00171305	1.7699E-05
0.25	0.00159664	1.6073E-05

Tabelle 3: Die Ergebnisse der obigen Rechnungen

1d) Bestimmung des gewichteten Mittelwerts der Saitenmasse

Nun wird der gewichtete Mittelwert der Masse m der schwingenden Saite berechnet mittels der Gleichungen GR.61 und GR.62. Hierbei steht x_i für die Saitenmasse m und S_m bezeichnet den Fehler Δu_m :

$$\bar{m} = \frac{\sum \frac{x_i}{S_{m_i}^2}}{\sum \frac{1}{S_{m_i}^2}}$$

$$S_m = \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{S_{m_i}^2}}}$$

Folgendes ergab sich aus den Rechnungen:

$$S_m = 0.000010512 \text{ kg}$$

$$\bar{m} = 0.00177785 \text{ kg}$$

Mittels eines Konfidenzintervalles lässt sich $\Delta u_{\bar{m}}$ genauer bestimmen:

$$\Delta u_{\bar{m}} = 2 \cdot S_m = 2 \cdot 0.000010512 \text{ kg} = 0.000021024 \text{ kg}$$

Und somit lautet das Endergebnis:

$$m = (0.001778 \pm 0.000022) \text{ kg}$$

2a) Bestimmung der Grundfrequenz

Im zweiten Teil des Versuches wird gezeigt, dass der Kehrwert der Grundfrequenz f_n proportional zur Saitenlänge L ist. Die Masse von 100g bleibt dabei konstant. Die Saitenlänge wird mit folgender Formel berechnet:

$$f_n = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{6}$$

L in m	f_1 in Hz	f_2 in Hz	f_3 in Hz	f_n in Hz
0.5	18.15	36.18	54.12	18.075
0.6	15.23	30.11	44.92	15.0433333
0.63	14.35	28.66	42.88	14.315
0.64	13.7	28.25	42.18	14.0216667
0.655	13.52	27.46	41.25	13.705
0.67	13.45	26.81	40.08	13.39
0.682	13.04	26.23	39.23	13.0833333
0.707	12.6	25.04	37.29	12.4883333

Tabelle 4: Grundfrequenzen f_n für acht Saitenlängen mithilfe der gemessenen Frequenzen f_1 bis f_4

2b) Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

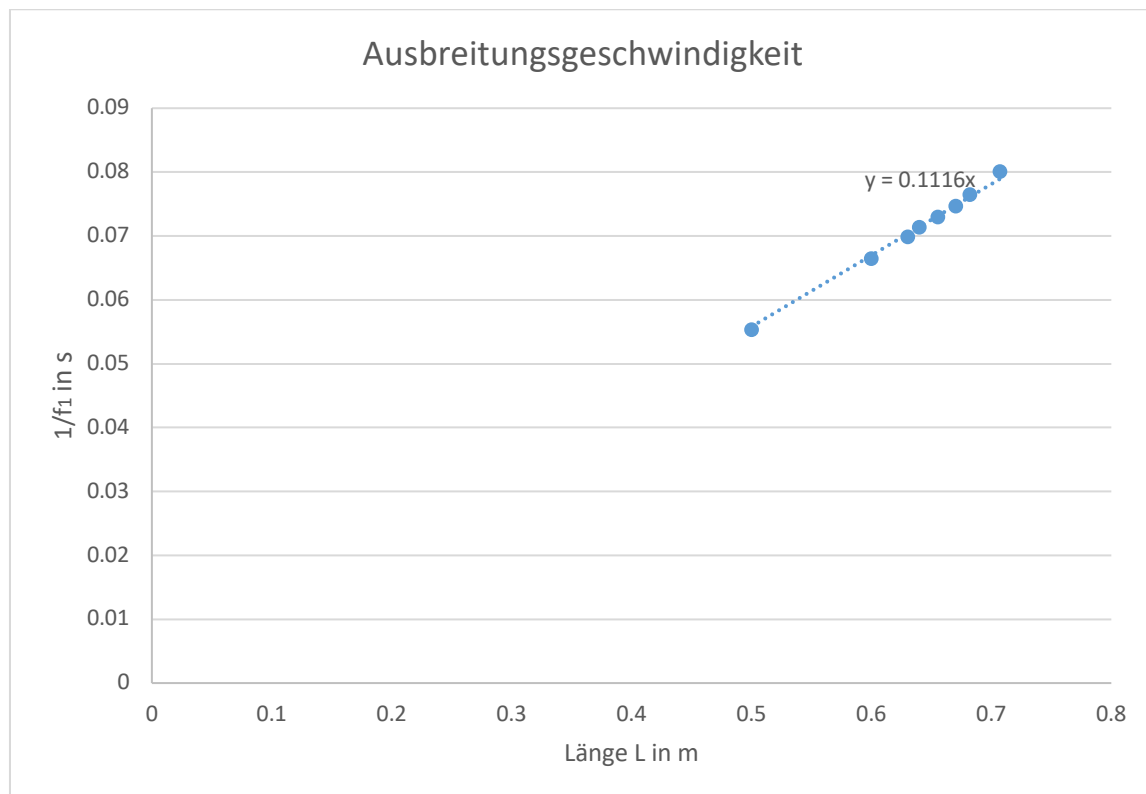


Abb. 2: Der Kehrwert der Grundfrequenz f_n in Abhängigkeit der Saitenlänge L mit der Ausgleichsgeraden $y=0.1116x$

Die Aufgetragenen Werte liegen auf einer Geraden, da durch die Gleichung aus SA.4 der Zusammenhang zwischen Grundfrequenz und der Länge beschrieben wird:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{f_n}$$

Im Folgenden wird der funktionelle Zusammenhang zwischen der Steigung der Ausgleichsgeraden und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c thematisiert. Mittels Gleichung SA.1 kann man erschließen, dass die Wellenlänge λ proportional zu $\frac{1}{f}$ ist. Da es sich um zwei feste Enden handelt, kann λ durch die Gleichung SA.2 dargestellt werden:

$$\lambda = c \cdot \frac{1}{f} \text{ und } \lambda = 2 \cdot \frac{L}{n}$$

Der Zusammenhang zwischen Steigung lässt sich dadurch wie folgt ermitteln:

$$c = \frac{2}{a} = \frac{2}{0.1116 \frac{s}{m}} = 17.92 \frac{m}{s}$$

Mithilfe der RGP-Funktion von Excel ließ sich der Fehler der Steigung berechnen:

$$S_a = 0,00062$$

Die Messunsicherheit Δu_c wird mithilfe folgender Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgleichung berechnet:

$$\Delta u_c = \sqrt{\left(-\frac{2}{a^2} * S_a\right)^2}$$

$$\Delta u_c = \sqrt{\left(-\frac{2}{17,92^2} * 0.00062\right)^2} = 0.0993 \frac{m}{s}$$

Das Ergebnis liefert:

$$c_5 = (17.92 \pm 0.10) \frac{m}{s}$$

Abschließend wird das Messergebnis für die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit dem Ergebnis aus 1b) verglichen werden, wo die Spannmasse auch 100g betrug:

$$\frac{c_5}{c_1} = 1 - \frac{17.62}{17.92} = 0.017$$

Die Messabweichung ist mit 1.7% sehr gering und kann durch unterschiedliche Messfehler entstanden sein, z.B. durch nicht exaktes Ablesen der Saitenlängen und durch Subjektive Einstellung der Frequenz der Schwingung nach Augenmaß.

12.02.19

Länge: 70,7 cm
 Eig. Messgerät: (11)

$$y(x,t) = y_0 \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

m^g	100	150	200	250
1	12,60 Hz	14,98	19,47	23,64
2	25,04 Hz	30,71	40,02	46,70
3	37,29 Hz	45,82	60,40	70,44
4	50,76 Hz	61,37	80,77	94,25
5	63,00 Hz	76,49	101,72	117
6	74,48 Hz	92,47	121	139
7	87,50 Hz	106,84	141	162
8	98,70 Hz	122 Hz	160	187

100 g

Seitenlänge in cm	n=1	n=2	n=3
70,7	12,60	25,04	37,29
68,2	13,04	26,23	39,23
67,0	13,45	26,81	40,08
65,5	13,52	27,46	41,25
64,0	13,70	28,25	42,18
63,0	14,25	28,66	42,88
60,0	15,23	30,11	44,92
50,0	18,15	36,18	54,12

Abb. 3: Messwerte