

Allgemein

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-1/\sqrt{3}$	∞
sin	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
cos	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$

Additionstheoreme

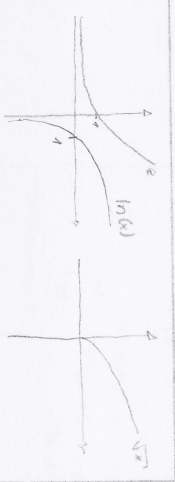
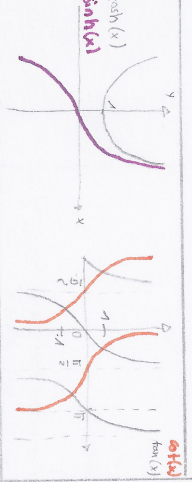
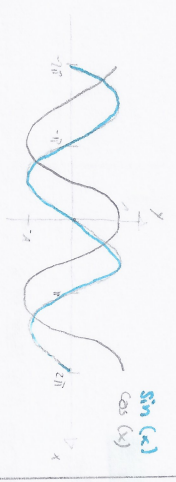
$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)} \\ \sin(x) + \sin(y) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos(x) + \cos(y) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y)) \\ \sin(2x) &= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \\ \cot(2x) &= \frac{\cot(x) \cdot \cot(x) - 1}{\cot(x) + \cot(x)} \end{aligned}$$

Hyperbelfunktion

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) & \sinh(x) &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) & \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ \sinh(2x) &= 2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y) \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \end{aligned}$$

Logarithmus

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a^b) &= b \cdot \ln(a) & \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) \\ \ln(\sqrt[n]{a}) &= \frac{1}{n} \cdot \ln(a) \\ \ln(x^y) &= y \cdot \ln(x) \\ \ln(x^y) &= y \cdot \ln(x) \\ \ln(x^y) &= y \cdot \ln(x) \end{aligned}$$



Integrale

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{1}{x^3} dx &= -\frac{1}{2x^2} + C \\ \int \frac{1}{x^4} dx &= -\frac{1}{3x^3} + C \\ \int \frac{1}{x^5} dx &= -\frac{1}{4x^4} + C \\ \int \frac{1}{x^6} dx &= -\frac{1}{5x^5} + C \\ \int \frac{1}{x^7} dx &= -\frac{1}{6x^6} + C \\ \int \frac{1}{x^8} dx &= -\frac{1}{7x^7} + C \\ \int \frac{1}{x^9} dx &= -\frac{1}{8x^8} + C \\ \int \frac{1}{x^{10}} dx &= -\frac{1}{9x^9} + C \\ \int \frac{1}{x^{11}} dx &= -\frac{1}{10x^{10}} + C \\ \int \frac{1}{x^{12}} dx &= -\frac{1}{11x^{11}} + C \\ \int \frac{1}{x^{13}} dx &= -\frac{1}{12x^{12}} + C \\ \int \frac{1}{x^{14}} dx &= -\frac{1}{13x^{13}} + C \\ \int \frac{1}{x^{15}} dx &= -\frac{1}{14x^{14}} + C \\ \int \frac{1}{x^{16}} dx &= -\frac{1}{15x^{15}} + C \\ \int \frac{1}{x^{17}} dx &= -\frac{1}{16x^{16}} + C \\ \int \frac{1}{x^{18}} dx &= -\frac{1}{17x^{17}} + C \\ \int \frac{1}{x^{19}} dx &= -\frac{1}{18x^{18}} + C \\ \int \frac{1}{x^{20}} dx &= -\frac{1}{19x^{19}} + C \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ z &= a + bi \\ \bar{z} &= a - bi \\ |z|^2 &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \\ e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i \sin(\theta) \\ e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \end{aligned}$$

Eigenwerttheorie

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \lambda &= \text{Eigenwert} \\ v &= \text{Eigenvektor} \end{aligned}$$

Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + C \\ \int f(x) \cdot g(x) dx &= \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int f'(x) \cdot g(x) dx \\ \int f(x) \cdot g(x) dx &= \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int f'(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

Differentialrechnung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \end{aligned}$$

Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) dx \\ A &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \end{aligned}$$

Ausfluss

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \\ \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

Torsion / Divergenz

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

Parametrisierung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \text{Kugelschalen: } P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < r_2 \} \\ \text{Kugel: } K &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r \} \end{aligned}$$

Schwerpunkt Halbkugel

$$\begin{aligned} B &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0 \} \\ B &= K \cap \{ z \geq 0 \} \end{aligned}$$

Rotationsparaboloid

$$\begin{aligned} P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2z, z \geq 0 \} \\ P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2z, z \geq 0 \} \end{aligned}$$

Kegel

$$\begin{aligned} K &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2, z \geq 0 \} \\ K &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2, z \geq 0 \} \end{aligned}$$

Paraboloid

$$\begin{aligned} P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \} \\ P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \} \end{aligned}$$

Verzweigungsringe

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}' &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hyperbolisches Paraboloid

$$\begin{aligned} H &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2 \} \\ H &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2 \} \end{aligned}$$

Paraboloid

$$\begin{aligned} P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \} \\ P &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \} \end{aligned}$$

Differentialgleichungen

Linear

1) getrennte Variablen

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad \rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

2) Trennung

$$h(x) = y' + g(x) \cdot y$$

$$f(x) = k(x) \cdot e^{-g(x)} + C \cdot e^{-g(x)}$$

$$m + k(x) = h(x) \cdot e^{g(x)}$$

→ Konstante:

3) Allgeheine

$$y' = g(x) \cdot h(y) \quad \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

$$y' = g(x) + h(y) \quad \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) + h(y)$$

Beispiel

$$(4x^2) \cdot y' = 4x y^2, \quad y(1) = 2$$

$$\frac{dy}{y^2} = (4x^2) dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 4x^2 dx$$

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{3} x^3 + C$$

$$y = \frac{3}{4x^3 + C}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{4 + C} = 2 \Rightarrow C = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{3}{4x^3 - \frac{5}{2}}$$

Homogen

$$f_h = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$$

$$f_1(x) = e^{2x} \text{ bzw. } f_2(x) = x \cdot e^{2x} \dots$$

$$f_1(x) = e^{2x} \cos(2x) \text{ bzw. } f_2(x) = e^{2x} \sin(2x)$$

Funktionalsystem

Basis untereinander für DGL

$$f_1, \dots, f_n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_1(x) = \dots, f_n(x) = \dots$$

oder:

Inhomogen

1) Variation der Konstanten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

2) Ansatz nach rechter Seite

$$h(x) = r(x) \cdot e^{M(x)}$$

$$h'(x) = r'(x) \cdot e^{M(x)} + r(x) \cdot M'(x) \cdot e^{M(x)}$$

$$h(x) = r(x) \cdot e^{M(x)}$$

3) Ableiten f_p/f_p

4) Einsetzen in DGL → Bestimmung von S_p

5) Einsetzen in DGL → Bestimmung von S_p

6) Komplex: $f_p = f_1 + i f_2$

Allgemein

$$S(x) = f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

mit Superpositionsprinzip: $f_p = f_1 + \dots + f_n$

Wegscheide-Kriterie

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

DGL-Systeme

Aufgangswertproblem

1) Klassischer Ansatz

→ $f(x) = y = y \cdot e^{2x}$

2) Linear Abhängig

$$W = v_1, v_2, v_3 \text{ lin. abh.}$$

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \text{untere Zeile zu } 0$$

$$q(x) = \dots \text{ mit } A^T v = x^T, v = 0$$

(3) Bestimmung von $q(x)$ und Wronski-Matrix

$$f(x) = (v_1 | v_2 | \dots) \cdot (M(x)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) Allgemeine

$$X_A(x) = \det(A - X E) \quad \text{Eigene bei } \lambda$$

$$(u) \text{ Lösung: } A(x) = (v_1 | v_2 | \dots) \cdot (M(x)^T)^{-1} \cdot g(x)$$

→ freie Wahl von v_1, v_2

6) Lösungswegraum: Bestimmung der Lösungen

$$A) \text{ versch. Eigenvektoren: } f_1(x) = v_1 \cdot e^{2x}$$

$$B) \text{ über Anfangswertproblem: } f_1, f_2, \dots, f_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Inhomogen

1) Bestimmen der Wronski-Matrix $W(x) = (f_1(x) | \dots | f_n(x))$

2) Invertieren: $W(x)^{-1} = W(x)^{-1} \cdot W(x) = I$

3) Bestimmen der Konstanten: $C(x) = W(x)^{-1} \cdot h(x)$

4) Lösung: $\Rightarrow f_p(x) = W(x) \cdot C(x)$

Normiertes Anfangswertsystem

Fourier-Reihe

Orthogonalitätsrelationen

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(kx) dx = \begin{cases} 2\pi & n=k=0 \\ \pi & n=k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(kx) dx = 0$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(kx) dx = \begin{cases} \pi & n=k \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Andere Darstellung:
 $a_n = 2 \int_0^{\pi} \sin(nx) \cdot \cos(kx) dx = \frac{2}{n} (1 + (-1)^n)$

3) sonst a_n
 $f(x) = x + \sin(x)$ für $-1 \leq x < 1$
 $\rightarrow \sin(kx)$ ist schon Fourier Reihe

Fourier-Reihe

$$2) f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin(jx)$$

$$\text{mit } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} 0 \cdot \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin(jx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(jx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(jx) dx$$

Symmetrie

$$1) \text{ Achsen: gerade} \rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow b_j = 0$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(jx) dx$$

$$2) \text{ Punkt: ungerade} \rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow a_j = a_0 = 0$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(jx) dx$$

$\Rightarrow$ jede Fkt ist Summe aus gerade & ungerader Fkt:

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} (f(x) - f(-x))$$

$$\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin(jx)$$

Ableitung / Integration

$$f'(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} -j \cdot a_j \cdot \sin(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot b_j \cdot \cos(jx)$$

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} \sin(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{j} \cos(jx) \quad (\text{für } a_0 = 0)$$

Andere Intervalle: $j \rightarrow j \cdot \omega$
 $\Rightarrow \text{Summe}$

Konvergenz

1) Voraussetzung: Funktion f ist stetig differenzierbar in dem Intervall

$$(n\pi - \pi, n\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

$$\left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi \right)$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

mit weiteren Vorzeichen bzw. rechteckigen Grenzwerten sowohl für f als auch für f' in allen Punkten

$$\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) Konvergenz

Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(n\pi - \pi, n\pi) \cap \mathbb{R}$, dann folgt: $(2k-1)\pi, (2k+1)\pi$ konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich gegen $f(x)$

In den Punkten $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ macht die Funktion einen Sprung, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als:

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = 0$$

$$x_0 = n\pi \quad \text{oder} \quad x_0 = (2k+1)\pi$$

Parseval'sche Gleichung

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2)$$

mit $M \rightarrow \infty$

Voraussetzung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist quadratintegrierbar. $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty$

Die Norm von f ist $\sqrt{\|f\|^2}$ reelle Zahl

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} \quad \text{mit } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

$$\rightarrow a_k = 2 \cdot c_0$$

$$\rightarrow a_k = c_k + c_{-k}$$

$$\rightarrow b_k = i \cdot (c_k - c_{-k})$$

$$\rightarrow c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

Zusammenhänge (allgemeine Bezeichnungen)

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$2) \forall k \in \mathbb{Z} \quad \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad \sin(k\pi) = 0$$

$$3) \text{ Gerade } k \in \mathbb{Z} \quad k = 2j, j \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(2j \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(j\pi) = (-1)^j$$

$$\sin(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(2j \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(j\pi) = 0$$

$$4) \text{ Ungerade } k \in \mathbb{Z} \quad k = 2j+1, j \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos((2j+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(j\pi) = 0$$

$$\sin(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin((2j+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = (-1)^j$$

$$[\cos(\frac{15}{2}x), \sin(\frac{15}{2}x)]$$

Beispiele

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2(-1 - (-1))^n}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \cdot \sin(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(-1 - (-1))^n}{n\pi} \cdot \sin(nx)$$

$$= \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \cdot \sin(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \cdot \sin((2n+1)x)$$

$$f(x) = \pi x + \sin x$$

$$b_{n,n} = \delta_{n,n} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$b_{n,n} = \frac{4}{2\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \delta_{n,n} \right) \cdot \sin(nx)$$

$$f(x) = \sin(\pi x), \quad x \in [-1, 1]$$

$$\rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$\rightarrow b_k = (1)_{j,j}(k) \quad \begin{cases} 1, k=1 \\ 0, k \neq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow b_k = (1)_{j,j}(k)$$