

Modellierung

Mechanische Systeme

Impulssatz: $m \cdot \ddot{x} = \sum F_i$

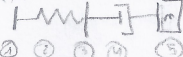
Federleichung: $F = \pm k \cdot \Delta x$

Dämpfergleichung: $F = \pm d \cdot \dot{\Delta x}$

Drehmoment: $J \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_i$

Freischneider

$\dot{x}_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$



① fallweg ② $\rightarrow$ ③ $\rightarrow$ ④ $\rightarrow$ ⑤

① $\rightarrow$ F_1 ② $\rightarrow$ F_1 ③ $\rightarrow$ F_1 ④ $\rightarrow$ F_2 ⑤ $\rightarrow$ F_2

① $\rightarrow$ F_1 ② $\rightarrow$ F_1 ③ $\rightarrow$ F_1 ④ $\rightarrow$ F_2 ⑤ $\rightarrow$ F_2

① $\rightarrow$ F_1 ② $\rightarrow$ F_1 ③ $\rightarrow$ F_1 ④ $\rightarrow$ F_2 ⑤ $\rightarrow$ F_2

Δx : Abweichung von ungedehnter Länge l_0
 $(\Delta \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

Dämpfermoment: $M = \pm d \cdot \dot{\varphi}$
 Federmoment: $M = \pm k \cdot \Delta \varphi$

Trägheitsmomente

Kreisscheibe/Zylinder: $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
 Kreisring/Hohlzylinder: $J = m \cdot r^2$
 Stab um SP: $J = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

Volumen: $V_i = A_i \cdot h_i \rightarrow \dot{V}_i = A_i \cdot \dot{h}_i$

Ausfluss: $q_{a,i} = h_i \cdot (k_n + k_m + \dots)$

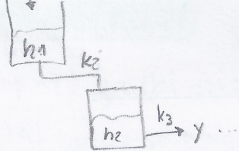
Einfluss: $q_{e,i} = h_{i-1} \cdot k_i$

$\rightarrow$ X-Werte: Füllhöhen

$\rightarrow$ Ausgangswerte: $h_{a1}, h_{a2}, \dots$

Integrale Bilanz: $h_i(t) = h_{i0} + \frac{1}{A_i} \int_0^t (q_{e,i} - q_{a,i}) dt$

Lösen: DGL...



hier: $\dot{h}_{a1} = \frac{V}{A_1} - \frac{k_2}{A_1} \cdot h_1$

$\dot{h}_2 = \frac{k_2}{A_2} \cdot h_1 - \frac{k_3}{A_2} \cdot h_2$

$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{A_1} & 0 \\ \frac{k_2}{A_2} & -\frac{k_3}{A_2} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$

$y = k_3 \cdot h_2$

$\hookrightarrow y = (0 \ k_3) \cdot x$

Elektrisches Netzwerk

(...)

$\rightarrow$ pneumatische Antrieb

Differentialgleichung

1) homogen: $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$

2) Char. Gleichung $\rightarrow$ Eigenwerte/Pole bestimmen

3) $y_k(t) = c_k \cdot e^{s_k t} \Rightarrow y_h = \sum_{k=1}^n y_k(t)$, mehrfach: $c_{k,m} \cdot t^m \cdot e^{s_k t}$

4) Konstanten: $y_h(t) \rightarrow (m-1) \cdot$ ableiten, auswerten an $t=0$

II) Partikulär: $\rightarrow u(t)$

1) homogen: Zeitableitungen bilden, mit $y_h^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$

2) $y_p(t) = \int_0^t y_h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$

Zeitvarianz & Linearität

1) Zeitinvariant für: $u_1(t) = u_2(t - T_1) \rightarrow y_1(t) = y_2(t - T_1)$

$\rightarrow$ Verschiebeprinzip
 $\rightarrow$ nur alle Koeffizienten $(y, u, \dot{y}, \dots)$ abhängig von t !
 $\Rightarrow$ zeitinvariant: t_0 kann frei gewählt werden

2) Kausal für: Nennergrad $\geq$ Zählergrad
 $\hookrightarrow$ alle realen Systeme

3) Superpositionsprinzip: $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$

4) Homogenität/Verstärkung: $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

5) Linearität: $f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) = a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$

$\rightarrow$ beide Seiten Summen! jeder Summand abhängig von genau einem Zeitsignal (muss!)

$\rightarrow$ Linear zeitverschobene Signale zulässig

6) Dynamisch: Signalzm.hänge sind DGL ($\neq$ statisch: z.B. $u=R \cdot i$)

7) Konzentrierte: Signale nur zeitabhängig

Parameter $\leftrightarrow$ verteilt: orts- & zeitabhängig (part. DGL)

8) Werte kontinuierlich: Amplituden der Systemvariablen können jeden beliebigen Wert annehmen (innerhalb phys. Grenzen)

9) Autonom: zeitinvariant + $u(t) = 0$ (Eigenbewegung)

PBZ

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_2)^2} + \frac{A_3}{(x-x_2)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+ax+b} + \dots$

einfache NS doppelte NS NS komplex

$\Rightarrow$ Grad(Q) = n = Anzahl Unbekannter $(A_i, B, \dots)$

Bode-Diagramm

Berechnung (Frequenzgang!)

Amplitudengang: $A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}(\omega)^2 + \operatorname{Im}(\omega)^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(\omega)^2 + \operatorname{Im}(\omega)^2}$
 $|A(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(A(\omega)) \rightarrow \text{doppelt log.}$

$\hookrightarrow A(\omega) = \frac{\|A\| \cdot \|B\|}{\|C\| \cdot \|D\|} \dots$

(?) Totzeitglied: $\|e^{-Tj\omega}\| = 1$
 $\varphi(\omega) = \angle(\operatorname{Re}(\omega) + j \cdot \operatorname{Im}(\omega)) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}\right)$

(?) $\Rightarrow$ gilt im 1./4. Quadranten ($\operatorname{Re}(\omega) \geq 0$)

$\hookrightarrow \varphi(\omega) = \underbrace{\angle(A) + \angle(B) + \dots}_{\text{Zähler}} - \underbrace{\angle(C) - \angle(D)}_{\text{Nenner}}$

andere Quadranten

$\operatorname{Re} = 0$ (?)

$\angle(j\omega) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Re} < 0: +\pi$

Weitere Besonderheiten

Fallunterscheidung

komplexe Zahlen mit $\log$ / $\ln$

Umrechnung Rad/ Deg

Übertragungsfunktion

1) Ordnen: $G(s) = c \cdot s^r \cdot G^*(s) \cdot e^{-T \cdot s}$ (nach aufsteigenden Eckfrequenzen)

2) Verstärkung = c

stationäre Verstärkung = $G(0)$

$\hookrightarrow$ (?) langsame Dynamik, hohe EW

Amplitudengang

1) Anstiegsgerade: $r \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$

2) Berechnung $G^*(0)$

3) Startpunkt ($\omega_{\min} / A_{\text{dB}}(\omega_{\min})$)

4) Markierung weiterer Eckfrequenzen & Steigungen

Phasengang

1) Startphase: $\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90^\circ & c \cdot G^*(0) > 0 \\ -180^\circ + r \cdot 90^\circ & c \cdot G^*(0) < 0 \end{cases}$ (=0?)

2) Startpunkt: $\omega_{\min}$

3) Eckfrequenzen

$\rightarrow$ Diskretisierung über Stützstellen (verbinden?)

Allpass / Inverse / Minimalphasig

?

Stabilität

1) Polstellen: Seite 59 $\rightarrow$ relat. Polstellen Bsp: $\frac{(s-1)}{(s+1)(s-1)}$
 $\Rightarrow$ notwendig & hinreichend

2) VZB

• notwendige Bedingung: nur ob (nicht) asymp. stabil?

• alle a_i reell und positiv

$N(s) = a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0$

3) Hurwitzkriterium (hinreichend) $\Rightarrow$ nur asymp / oder nicht

(a) Ordnung 2: VZB hinreichend

(b) Ordnung 3: $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$ (Bäuerlebedingung)

(c) Ordnung 4: $|H_2| = a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_4 > 0$

$+ a_1 \cdot |H_2| - a_0 \cdot a_3^2 > 0$

4) Eigenwerte

1) asymp. stabil: $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$

2) Stabil: $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$ (einfache EW)

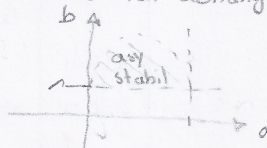
$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ (mehrfache EW)

5) Graphisch

$\rightarrow$ siehe S 59

6) Stabilitätsdiagramm

$\rightarrow$ Stabilität abhängig von versch Faktoren (a, b)



(?) Grenzstabil auf Rand

(?) Stab. reelle Systeme begründ

Übertragungsglieder

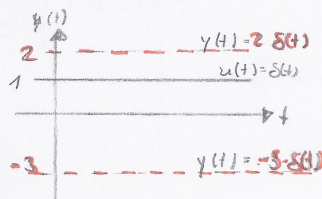
Eintrittswinkel

$$\varphi = -r \cdot \frac{1}{T}$$

→ keine instabilen Pole / NS

Sprungantworten

$$u(t) = \delta(t)$$

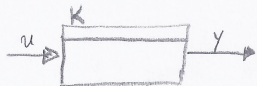


$$G(s) = K_P$$

Proportionalglied (P-Glied)

$$\text{Zeit: } y = K \cdot u$$

$$\text{Bild: } Y(s) = K \cdot U(s)$$

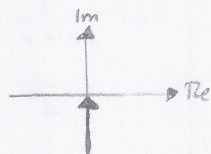


Integrator (I-Glied)

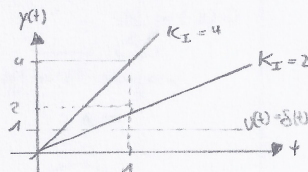
$$\text{Zeit: } y = K \int u(\tau) d\tau$$

$$\dot{y} = K \cdot u$$

$$\text{Bild: } Y(s) = K \cdot \frac{1}{s} \cdot U(s) \rightarrow G(s) = \frac{K}{s}$$



→ Start bei -90°



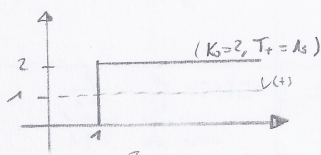
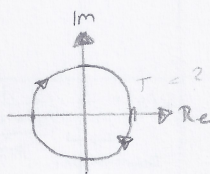
$$G(s) = \frac{K_I}{s} \quad (2) \text{ Steigung}$$

$$y(t) = K_I \cdot t$$

Totzeitglied $e^{s \cdot T_d} = (\dots)$

$$\text{Zeit: } y = K \cdot u(t - T_d)$$

$$\text{Bild: } Y(s) = K \cdot e^{-T_d \cdot s}$$



$$G(s) = K \cdot e^{-T_d \cdot s}$$

$$y(t) = K \cdot \delta(t - T_d)$$

Differenzierer (D-Glied)

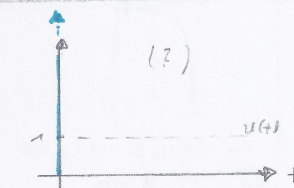
$$\text{Zeit: } y = K \cdot \dot{u}$$

$$\text{Bild: } Y(s) = K \cdot s \cdot U(s)$$



?

→ Start bei $+90^\circ$



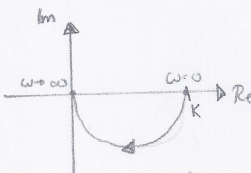
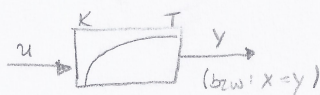
$$G(s) = K \cdot s$$

$$y(t) = K \cdot \delta(t)$$

PT1-Glied

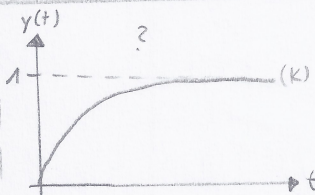
$$\text{Zeit: } \dot{y} \cdot T + y = K \cdot u$$

$$\text{Bild: } Y(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1} \cdot U(s) \quad X(s) = \frac{1}{s + 1/T} \cdot U(s)$$



$$\varphi_r = -r \cdot \frac{1}{T} = -\frac{\varphi}{2}$$

$$y = \frac{K}{T \cdot s + 1}$$



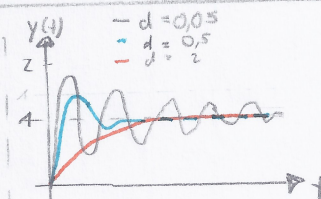
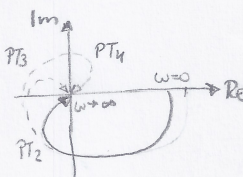
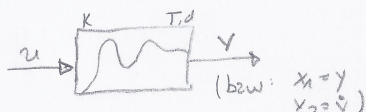
$$T_0 = 1 \text{ s}, G(s) = \frac{K}{1 + s \cdot T_0}$$

$$K = 1$$

PT2-Glied

$$\text{Zeit: } T^2 \ddot{y} + 2dT \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$$

$$\text{Bild: } Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dT \cdot s + 1} \cdot U(s)$$



$$G(s) = \frac{K}{1 + 2dT_0 \cdot s + T_0^2 \cdot s^2}$$

$$T_0 = 1 \text{ s} \quad K = 1$$

→ unabhängig vom Zähler, ob PT2

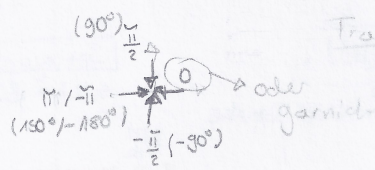
$$B_{sp} = \frac{s+1}{(s+5)(s+10)}$$

IT-Glieder

?

?

Beispiele Ortskurven

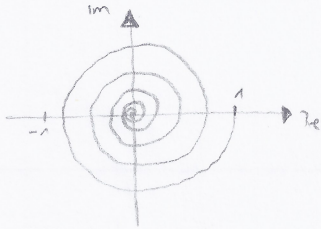


Frage: - wann Kurve nach oben, wann nach unten
- Nenner gibt an, wie häufig Achsen geschnitten werden, Zähler relativen Grad $\rightarrow$ Eingang?

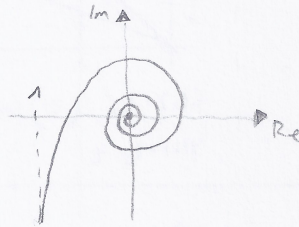
Bsp: $G = \frac{s^2 \frac{T}{12} - s \cdot \frac{T}{2} + 1}{s^2 \frac{T}{12} + s \cdot \frac{T}{2} + 1}$

- Tiefe $\checkmark$ (inner Kreis?)

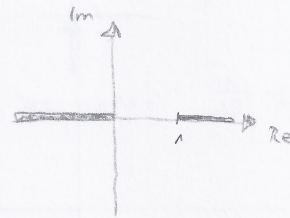
$G(s) = \frac{1}{(0,1s+1)^2} \cdot \frac{e^{-s}}{6 \text{ Zeitglied}}$



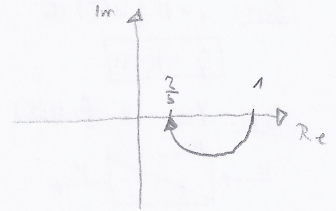
$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{\text{Integrator Totzeitglied}}$



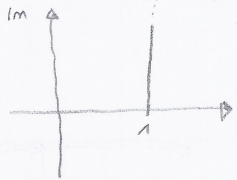
$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$



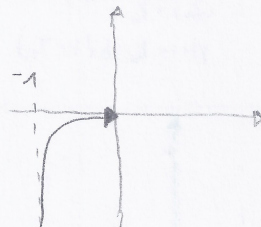
$G(s) = \frac{2s+1}{5s+1}$



$G(s) = 3s + 1 \rightarrow$ Differenzieren (?) Pfeil

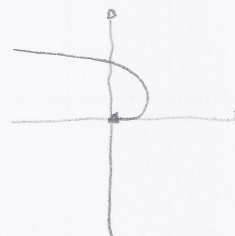


$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$
Integrator PTA



$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -1 - j\infty$
 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0$

$G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$
Doppelintegrator PT2



Eintrittswinkel?

Arbeitspunktlinearisierung

Voraussetzung: Arbeitspunkt $\stackrel{!}{=} \text{Ruhelage}$

Bsp: 1) Parameter:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

2) Ruhelage:

$$(x_0, u_0) \rightarrow \dot{x}_0 = 0, \dot{u}_0 = 0 \Rightarrow f(x_0, u_0) = 0$$

3) Abstandsvariablen:

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta u = u - u_0$$

Beschreiben Abweichung des Zustands /
Eingangs vom Arbeitspunkt

$$\text{auch: } f(x, u, \dots) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0, u_0 \text{ variabel,} \\ \dot{x}_0, \dot{u}_0, \ddot{x}_0, \dots = 0 \end{array} \right\}$$

4) System-DGL:

$$\dot{x}_0 + \Delta \dot{x} = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u)$$

5) Taylor-Linearisierung

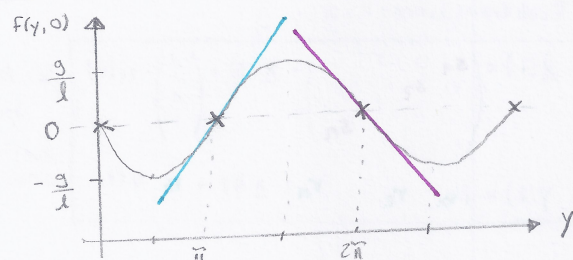
$$\Delta \dot{x} \approx \underbrace{f(x_0, u_0)}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, u_0)} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_0, u_0)} \cdot \Delta u$$

Approx!

Mehrere Gl.: (A) Gleichungen unabhängig voneinander linearisieren $\Rightarrow$ Eintragen in Matrix
(B) Für nichtlineare Zustandsraumdarstellung $\Rightarrow$ Matrizen (S. 76/77)

Zeichnerisch:

$$\ddot{y} = f(y, \ddot{u}=0) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(y) - \frac{\cos(y)}{l} \cdot \ddot{u} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(y)$$



Arbeitspunkte ($\ddot{u} = \dot{y} = 0$) $\Rightarrow y = k \cdot \pi$ (Schnittpunkte mit 0-Linie)

- (1) $k=1$: $y=\pi$ $\rightarrow$ instabil: y und $\ddot{y}$ beides pos.
 $\hookrightarrow$ pos. Steigung
- (2) $k=2$: $y=2\pi$ $\rightarrow$ stabil: y und $\ddot{y}$ in untersch. Richtung

Zustandsraumdarstellung

Zustandsbegriff

- Zustandsgleichung: $\dot{x} = f(x, u, t)$, $t \geq 0$, $x(0) = x_0$
 - Ausgangsgleichung: $y = g(x, u, t)$, $t \geq 0$
 - n : Ordnung
 - p : Eingänge
 - q : Ausgänge
- für lineare zeitinvariante Systeme:
- $$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, t \geq 0, x(0) = x_0$$
- $$y = C \cdot x + D \cdot u, t \geq 0$$
- Für SISO gilt: $p=q=1 \rightarrow B, C$: Vektoren, D : Skalar
- $$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \Rightarrow g(t) = \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B}$$
- $$\hookrightarrow G(s) = C \cdot \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \cdot B$$
- Cramersche Regel (?)
- A : (n, n) -Systemmatrix
 B : (n, p) -Eingangsvektor
 C : (q, n) -Ausgangsvektor
 D : (q, p) -Durchgangs / Durchgriffsmatrix

Zustandsgleichung aufstellen

- ① Eingangs-Ausgangs-DGL: Regelungs / Beobachtung normalform (S.76)
 - ② Frobenius Normalform: $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$ Integratorreihe: $\dot{x}_1 = x_2, \dots$
 $\Rightarrow x_{n-1}$ -DGLs
 $\hookrightarrow$ geht nur, wenn u nicht abgeleitet ist!
 - ③ Komplexe Übertragungsfkt.: 1) PBZ: $Y(s) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-s_i} + r_0 \right) \cdot U(s)$
- 2) Wahl der Zustandsgrößen, Rücktransformation...
- 3) Zustandsraumdarstellung
- $$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$
- $$y(t) = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n) \cdot x(t) + r_0 \cdot u(t)$$
- $\Rightarrow$ Modaldarstellung, Spektraldarstellung, nur Diagonal, oder auch Jordan?
- $\Rightarrow$ mehrfache Pole: Seite 75 (Jordan-Normalform)

Lösung Zustandsgleichung

Allg. Lösung: $x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau, t \geq 0$

$y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau + D \cdot u, t \geq 0$

$x_0 = 0, x(0) = x_0$

Impulsantwort: $u(t) = \delta(t)$

$x(t) = e^{At} \cdot x_0 + e^{At} \cdot B$

$y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0 + C \cdot e^{At} \cdot B + D \cdot \delta(t)$

$t \geq 0$

Sprungantwort: $u(t) = \delta(t)$

$x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B d\tau$

$y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B d\tau + D$

$t \geq 0$

$\Rightarrow$ Transitionsmatrix e^{At}

- 1) Laplace: $G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)}$
 - 2) Ähnlichkeit: Jordan-Form $V \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot V^{-1}$
 - 3) Andere Methoden können?
- $\Rightarrow 2 \times 2: V^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Rechtssystem!

Normalform

Systemeigenschaften (Kalman-Kriterium)

① Steuerbar: mit zur Verfügung stehendem Stelleneingang: von jedem Anfangszustand $\rightarrow$ beliebiger Endzustand

$$Q_s = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \Rightarrow \text{rang}(Q_s) \stackrel{!}{=} n$$

② beobachtbar: aus zur Verfügung stehendem Systemausgang kann Zustand des Systems gefolgert werden

$$Q_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(Q_B) \stackrel{!}{=} n$$