



Biomechanik

- 1 Einführung**
- 2 Skelett**
- 3 Gelenke**
- 4 Knochen**
- 5 Weichgewebe**
- 6 Biokompatible Werkstoffe**
- 7 Muskeln**
- 8 Kreislauf**
- 9 Beispiel: Dynamik des Hörens**



Literatur

- Abé, H.; Hayashi, K.; Sato, M.: Data Book on Mechanical Properties of Living Cells, Tissues, and Organs. Tokyo: Springer, 1996
- Alexander, R.M.: Elastic Mechanisms in Animal Movement. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- Allard, P.; Cappozzo, A.; Lundberg, A.; Vaughan, C.L.: Three-dimensional Analysis of Human Locomotion. Chichester: Wiley, 1997
- Berger, S.A.; Goldsmith, W.; Lewis, E.R.: Introduction to Bioengineering. Oxford: Oxford University Press, 1996
- Burton, A.C.: Physiology and Biophysics of Circulation. Chicago: Year Book, 1965
- de Leva, P.: Adjustments to Zatsiorsky – Seluyanov's Segment Inertia Parameters. J. Biomechanics, Vol. 29, No. 9, pp. 1223 – 1230 (1996)
- Fung, Y.C.: Biomechanics mechanical Properties of Living Tissues. New York: Springer, 1993
- Flügel, B.; Greil, H.; Sommer, K.: Anthropologischer Atlas - Grundlagen und Daten. Berlin: Verlag Tribüne, 1986
- Gooch, K.J.; Tennant, C.J.: Mechanical Forces: Their Effects on Cells and Tissues. Berlin: Springer, 1997
- Griffin, M.J.: Handbook of Human Vibration. London: Academic Press, 1990
- Hatze, H.: A model for the computational determination of parameter values of anthropometric segments. Pretoria: Tegniese Verslag, Nasionale Navorsinginstituut vir Wiskundige Wetenskappe, 1979
- Hatze, H.: Methoden biomechanischer Bewegungsanalyse. Wien: Österreichischer Bundesverlag, 1986
- Hayashi, K.; Ishikawa, H.: Computational Biomechanics. Tokyo: Springer, 1996
- Hayashi, K.; Kamiya, A.; Ono, K.: Biomechanics Functional Adaptation and Remodeling. Tokyo: Springer, 1996
- Hochmuth, G.: Biomechanik sportlicher Bewegungen. Berlin: Sportverlag, 1981
- Knudson, D.: Fundamentals of Biomechanics. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003
- Koolmann, J.; Röhm, K.H.: Taschenatlas der Biochemie. Stuttgart: Thieme Verlag, 1998
- de Las Casas, E.B.; Pamplona, D.C.: Computational Models in Biomechanics. Barcelona: CIMNE, 2003
- Özkaya, N.; Nordin, M.: Fundamentals of Biomechanics: Equilibrium, Motion and Deformation. Springer, New York, 1999



Martin, R.B.; Burr, D.B.; Sharkey, N.A.: Skeletal Tissue Mechanics. New York: Springer, 1998

McConville, J.T.; Churchill, T.D.; Kaleps, I.; Clauser, C.E.; Cuzzi, J.: Anthropometric Relationships of Body and Body Segment Moments of Inertia. Ohio: Air Force Aerospace Medical Research Laboratory, 1980

Nachtigall, W.: Biomechanik. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 2000

Nasa Reference Publication 1024: Anthropometric Source Book Volume I: Anthropometry for Designers. Nasa Scientific and Technical Information Office, 1978

Nigg, B.M.; Herzog, W.: Biomechanics of the Musculo-Skeletal System. Chichester: Wiley, 1999

Platzer, W.: Taschenatlas der Anatomie, Band 1: Bewegungsapparat. Stuttgart: Thieme Verlag, 1991

Potvin, J.R.; Brown S.H.M.: An equation to calculate individual muscle contributions to joint stability. J. of Biomechanics, 38 (2005), p. 973 - 980

Power, H.; Hart, R.T.: Computer Simulations in Biomedicine. Southampton: Computational Mechanics, 1995

Saziorski, W.M.; Aruin, A.S.; Selujanow, W.N.: Biomechanik des menschlichen Bewegungsapparates. Berlin: Sportverlag, 1984

Schmid-Schönbein, G.W.; Woo, S.L-Y.; Zweifach, B.W.: Frontiers in Biomechanics. New York: Springer, 1986

Silbernagel, S.; Despopoulos, A.: Taschenatlas der Physiologie. Stuttgart: Thieme Verlag, 2003

Tittel, K.: Beschreibende und funktionelle Anatomie des Menschen. Jena: Gustav Fischer Verlag, 1994

VDI-Berichte 1821: Humanschwingungen. Düsseldorf: VDI Verlag, 2004

Winter, D.A.: Biomechanics and Motor Control of Human Movement. Hoboken: Wiley, 2005

Wintermantel, E.; Ha, S.-W.: Biokompatible Werkstoffe und Bauweisen. Berlin: Springer, 1996

Winters, J.M.; Woo, S. L-Y. (eds): Multiple Muscle Systems, Biomechanics and Movement Organization. New York: Springer, 1990

Yamada, F.E.; Evans, F.G. (eds): Strength of Biological Materials. Baltimore: Williams and Wilkins, 1970

Zatsiorsky, V.M.: Kinematics of Human Motion. Champaign: Human Kinetics, 1998

Zajac, F.E.: Muscle and Tendon: Properties, Models, Scaling and Application to Biomechanics and Motor Control. Critical Reviews in Biomedical Engineering 17(4), 1989, pp. 359-411

Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsmedizin. Berlin

(Einige der Abbildungen in den Merkblättern sind diesen Büchern entnommen)



Journals:

International Journal of Sports Biomechanics
Journal of Biomechanics
Clinical Journal of Sports Medicine
Clinical Biomechanics
Journal of Sports Sciences
International Journal of Applied Sports Sciences
Brazilian Journal of Biomechanics
Journal of Biomechanical Engineering
Journal of Biomedical Engineering
Journal of Biomechanics of Sports
Medicine and Science in Sports and Exercise
Journal Clinical Biomechanics
Research Quarterly for Exercise and Sport
Canadian Journal of Applied Sport Science
Sportwissenschaft
Leistungssport
Jugend und Sport
Sports Medicine
Journal of Applied Biomechanics
Journal of Orthopaedic Research
Acta Physiologica Scandinavica
Journal of Orthopaedic Research
British Journal of Sports Medicine



Technische Mechanik allgemein:

Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.: Technische Mechanik. Band 1/2/3/4.
Berlin: Springer, 2008/2011/2010/2007

Hauger, W.; Mannl, V.; Wall, W.; Werner, E. : Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3. Berlin: Springer, 2001

Gross, D.; Ehlers, W.; Wriggers, P.: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik. Band 1 und 2,
Berlin: Springer, 2006/2007

Heimann, B.; Gerth, W. ;Popp, K.: Mechatronik. Leipzig: Fachbuchverlag, 2007

Hagedorn, P.: Technische Mechanik. Band I/II/III. Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 2008/2006/2008

Hibbeler, R.C.: Technische Mechanik 3 - Dynamik. München: Pearson Studium, 2006

→ Magnus, K.; Müller-Slany, H. H.: Grundlagen der Technischen Mechanik. 7. Auflage,
Stuttgart: Teubner, 2005

Szabo, I.: Einführung in die Technische Mechanik. 8. Auflage. Berlin: Springer, 2002

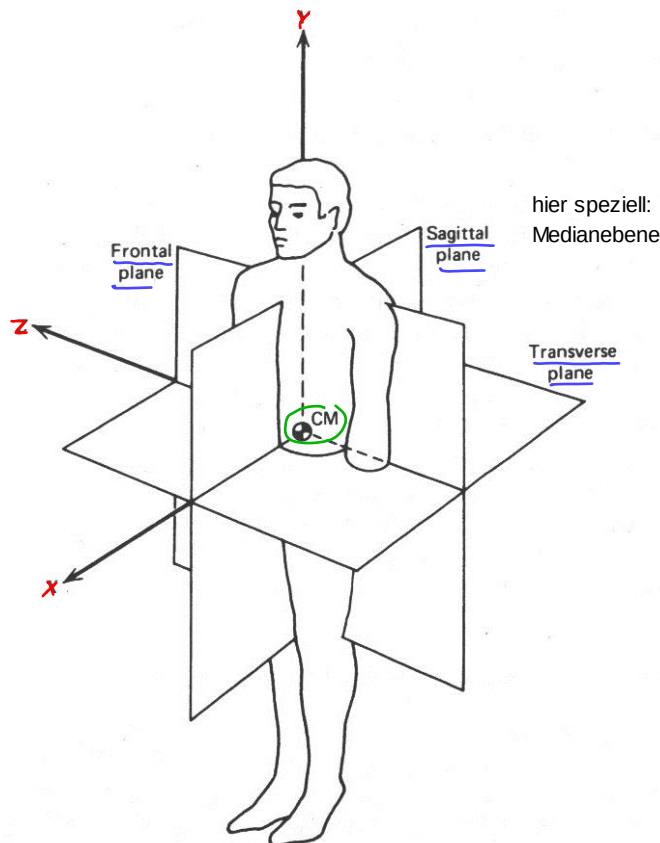
Weidemann, H.-J.; Pfeiffer, F.: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen. 3. Auflage.
Stuttgart: Teubner, 2006

Ziegler, F.: Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper. 3. Auflage. Wien: Springer, 1998

Begriffe, Definitionen

Koordinatensystem, Ebenen am Körper, Orts- und Lagebezeichnungen

gemäß ISB (Int. Soc. of Biomechanics), 1992 (Tittel, 1994)

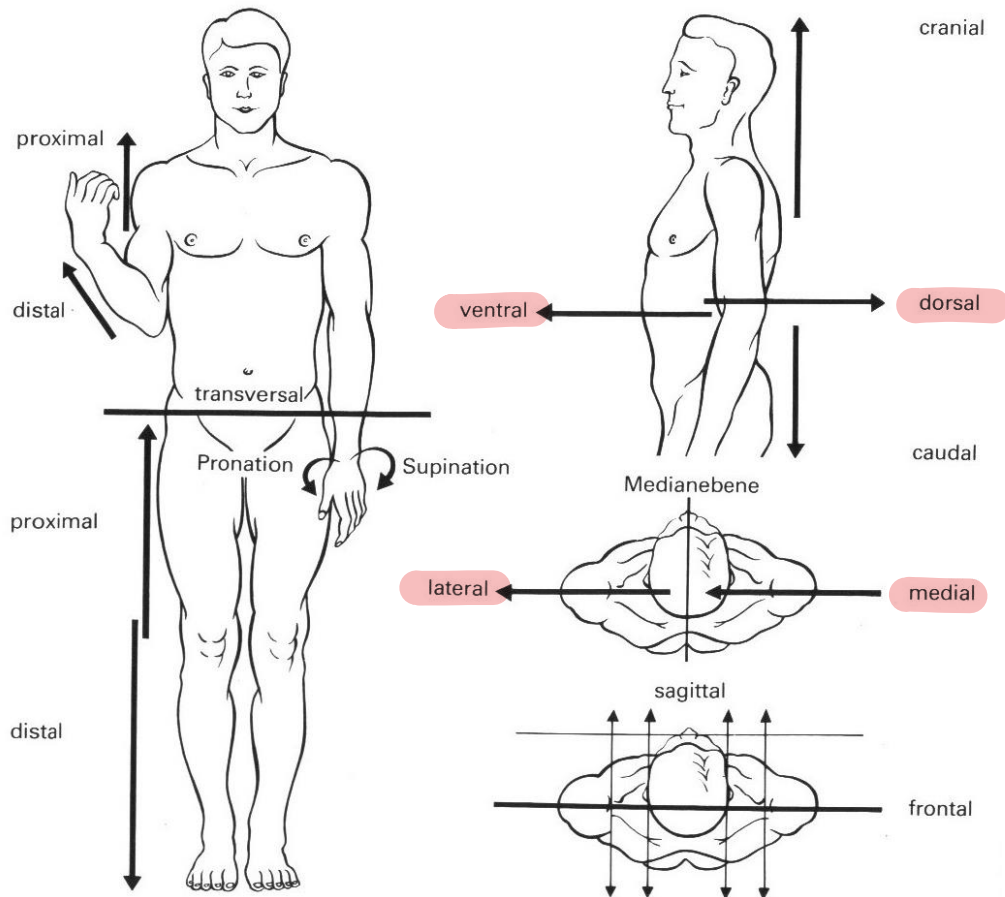


<u>Frontalebene</u> vor(Koronalebene)	= zur Stirn (= <i>frons</i>) parallelliegende, den Körper in einen vorderen und hinteren Teil trennende Ebenen
<u>Medianebene</u>	= die den Körper in eine annähernd spiegelbildlich gleiche rechte und linke Hälfte teilende Ebene (man spricht deshalb auch von der „Symmetrie-Ebene“)
<u>Sagittalebene</u>	= zur Median- (oder Symmetrie-) Ebene parallel verlaufende Ebenen (<i>sagitta</i> = Pfeil; die durch den Körper dorsoventral gelegten Schnitte liegen parallel zur Pfeilnaht des Schädels)
<u>Horizontal- oder Transversalebene</u>	= ein senkrecht zur Längsachse des Körpers liegender (Quer-) Schnitt (<i>transversus</i> = quer), den Körper in einen oberen und unteren Abschnitt teilend
<i>median, medial</i>	= mittelmäßig, zur Medianebene (<i>medium</i> = die Mitte)
<i>lateral</i>	= seitwärts, von der Medianebene entfernt (<i>latus</i> = Seite)



dorsal	= rückenwärts, hinten (<i>dorsum</i> = Rücken)
ventral	= bauchwärts, vorn (<i>venter</i> = Bauch)
proximal	= in der Richtung zur Rumpfmittle hin liegende Teile des Körpers (<i>proximus</i> = der Nächste)
distal	= von der Rumpfmittle entferntliegende Teile des Körpers (<i>distare</i> = abstehen)
sagittal	= senkrecht zur Körperoberfläche
Mamillarlinie	= eine durch die Brustwarze gehende senkrechte Linie (<i>mamilla</i> = Brustwarze)
Medioclavicularlinie	= eine durch die Mitte des Schlüsselbeins (<i>clavicula</i>) ziehende senkrechte Linie
Axillarlinie	= Linie, die vorn bzw. hinten die Achselhöhle begrenzt (<i>axilla</i> = Achselhöhle)
frontal	= in der Stirnebene
horizontal oder transversal	= in der Horizontal- bzw. Transversal-Ebene
peripher	= am äußeren Umfang eines Körpers (<i>periphericus</i> = außen, am Rande)
zentral	= in der Mitte des Körpers
superficial	= zur Körperoberfläche hin (<i>super</i> = über, <i>facies</i> = Fläche)
profundus	= zur Körpertiefe hin, nach innen (<i>fundus</i> = Grund)
cranial	= kopfwärts (<i>cranium</i> = Kopf, Schädel)
caudal	= schwanz- bzw. steißwärts (<i>cauda</i> = Schwanz)
radial	= speichenwärts (Daumenseite) (<i>radius</i> = Stab, Speiche)
ulnar	= ellenwärts (Kleinfingerseite) (<i>ulna</i> = Elle)
tibial	= zum Schienbein hin (Großzehenseite) (<i>tibia</i> = Schienbein)
fibular	= zum Wadenbein hin (Kleinzehenseite) (<i>fibula</i> = Wadenbein)
volar (palmar)	= auf der Hohlhandseite liegend (<i>vola</i> [<i>palma</i>] <i>manus</i> = Hohlhand)
plantar	= zur Fußsohle gehörend (<i>planta pedis</i> = Fußsohle)
anterior	= vorderer (<i>ante</i> = vor)
posterior	= hinterer (<i>post</i> = nach, hinter)
inferior	= unterer (<i>in</i> ... = un...) bei aufrechter Körperhaltung
superior	= oberer (<i>super</i> = über) bei aufrechter Körperhaltung
sub (subcutan)	= unter (unter der Haut)
per (percutan)	= durch (durch der Haut)
intra (intracutan, intraartikulär)	= innerhalb (in der Haut, innerhalb eines Gelenkes)
extra (extraartikulär)	= außerhalb (außerhalb eines Gelenkes)

Bewegungen der Glieder, Richtungen am Körper (Tittel, 1994)



Ebenen und Richtungen im Bereich des Körpers

<i>Abduktion, abduzieren</i>	= Abspreizen eines Gliedes von der Körpermitte nach außen
<i>Adduktion, adduzieren</i>	= Heranbringen eines Gliedes zur Körpermitte
<i>Rotation, rotieren</i>	= Drehbewegung um die Längsachse eines Gliedes
<i>Innenrotation</i>	= Einwärts-Drehung
<i>Außenrotation</i>	= Auswärts-Drehung
<i>Pronation, pronieren</i>	= Drehbewegung der Hand bzw. des Fußes bei gleichzeitiger Hebung des äußeren und Senkung des inneren Handballens bzw. Fußrandes
<i>Supination, supinieren</i>	= Drehbewegung der Hand bzw. des Fußes bei gleichzeitiger Hebung des inneren Handballens bzw. Fußrandes
<i>Flexion</i>	= Beugebewegung in einem Gelenk
<i>flektieren</i>	= beugen
<i>Extension</i>	= Streckbewegung in einem Gelenk



<i>extendieren</i>	= strecken
<i>Dorsalflexion</i>	= Heben der Fußspitze bzw. der Hand in Richtung Fuß- bzw. Handrücken
<i>Plantarflexion</i>	= Senken der Fußspitze zur Sohle
<i>Volar-(Palmar)-Flexion</i>	= Beugen der Hand in Richtung Innenfläche
<i>Anteversion</i>	= Vorschwingen eines Armes bzw. Beines
<i>Retroversion</i>	= Rückschwingen eines Armes bzw. Beines
<i>Circumduktion</i>	= bogenförmiges Herumführen eines Gliedes in einem Gelenk

Gliederung des Körpers

<i>Stamm</i>	= Kopf, Hals und Rumpf
<i>Rumpf</i>	= Brustkorb, Bauch und Becken
<i>Extremitäten</i>	= Oberarm, Unterarm und Hand; Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß

01. EINFÜHRUNG

Montag, 22. Oktober 2018 11:28

Mechanik $\left\{ \begin{array}{l} \text{statische} \\ \text{dynamische} \end{array} \right.$ Spannungen, Kraftverteilung, Deformationen
Kinematik (Bewegungen), Kinetik, Stabilität, Steuerung, Regelung...

(Medizin
Chemie
Biologie)

1.1 Definition Biomechanik

"... mechanische Beschreibung und Erklärung der Ursachen von Bewegungen ..."

→ unterschiedliche Definitionen in der Literatur

1.2 Aufgaben der Biomechanik

- Ergonomie: Arbeitsräume untersuchen, Bewegungsabläufe optimieren, Arbeitsvermögen, Bedienerschnittstelle, Komfort, Sitzplatz ...
- Arbeitsmedizin: Schadensmechanismen, Grenzwerte, Abwärt, Unfallgutachten
- Crashverhalten bei Verkehrsunfällen: Dummy Versuche, Interaktion Fahrer/Fahrzeug, Konstruktion von passiven/aktiven Sicherheitseinrichtungen
- Fahrersimulation: Fahrer/Insassen sind Teil des Systems
- Sport: Ganganalysen (gesund/krank/behinderte Menschen), Leistungssteigerung, Trainingsmethoden, Verletzungsrisiko, Gestaltung Trainingsgeräten
- Rehabilitation: Bewegungsapparat (Sensorik, Aktorik), Heil- und Hilfsmittel Gestaltung
- Schuhgestaltung: Kräfteverteilung, Kräftepunkte abklingen
- Medizin: Entwicklung von Prothesen, Rekonstruktion von Körperteilen und deren Funktionen, Operationsplanung, Biokompatibilität von Werkstoffen
→ "Robustheit" von Implantaten (Unempfindlichkeit gegenüber äußeren Veränderungen)

⇒ Erkennen des natürlichen Prozesse und Funktionen

- Anwenden der physikalischen Grundprinzipien
- Mathematische Beschreibung → Modellierung
- Bestimmung der Modellparameter → Identifikation (Messung)
↓
Simulation (Numerik)

Biomechanik:

- sehr komplexe Systeme, meist nicht zerlegbar
- große interindividuelle Unterschiede
- Messmethoden zur Diagnose und Identifikation kompliziert

1.3 Historischer Hintergrund

1.4 Modellierung

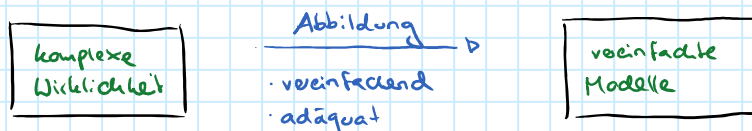
Versuch, die komplexe Wirklichkeit vereinfacht darzustellen

- 2 Vorgänge:
- > Reduktion
 - bestimmte Bereiche
 - bestimmte Effekte
 - > Abstraktion
 - Vereinfachungen
 - Modellannahmen

- Ziele:
- verbesserter Einblick und Verständnis in die komplexe Wirklichkeit
 - Abschätzungen und Vorhersagen von Veränderungen am System (natürlich oder künstlich)

|| Adäquate Modelle notwendig ||

- Modelle müssen zur Fragestellung passen
- ⇒
- nicht relevante Sachverhalte weglassen
 - bedeutsame Sachverhalte in Betracht ziehen
- Modelle und Lösungsverfahren für Gleichungen müssen zusammenpassen
 - Modellparameter sollen erfassbar sein
- ⇒ Modelle sind also von der Fragestellung und von der geforderten Genauigkeit abhängig



- > so einfach wie möglich
- > so komplex wie nötig
- > konform zum Lösungsverfahren
- > iterativer Prozess (zunehmende Verfeinerung)
(wiederholend)

zu 1.4

Montag, 29. Oktober 2018 11:31

Mechanische Systeme

Massefeldern, Nachgiebigkeiten, Kräftewirkungen $\rightarrow$ räumlich verteilt

Häufig werden diese "Eigenschaften" als verschmiert betrachtet

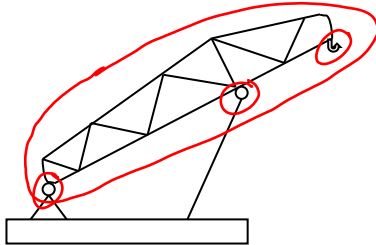
z.B. Dichte $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho(x, y, z, T, p, \dots)$ Homogenisierung

Modellierungsmethoden

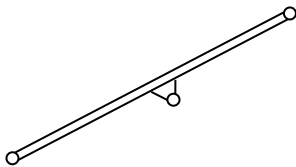
- ① kontinuierliche Systeme (kontinuierliche Verteilung der "Eigenschaften" innerhalb von unendlichen Elementen)
 - ② finite Elemente (kontinuierliche Verteilung innerhalb endlicher Elemente)
(Zustände in den Knoten definieren und über Approximationsansätze in das Innere der Elemente verteilen)
 - ③ Mehrkörper Systeme (Zusammenfassen der Eigenschaften in diskrete Körper)
- ① $\rightarrow$ in der Praxis nur für einfache Geometrien anwendbar $\rightarrow$ partielle DGL (PDE)
(zur numerischen Lösung: Diskretisierung)
- ② + ③ $\rightarrow$ Diskretisierung bereits im Modellierungsprozess $\rightarrow$ gewöhnliche DGL (ODE)

Beispiele Modellauswahl:

Fachwerkausleger



- Starrkörper

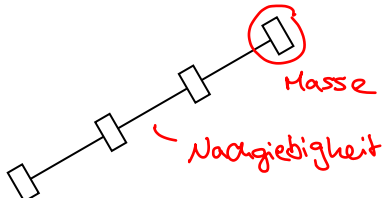


- Elastischer Balken

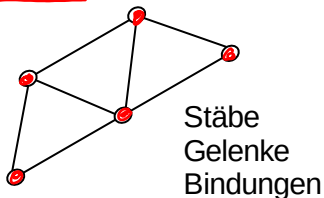
$$EI = \text{const.}$$

$$EI \neq \text{const.}$$

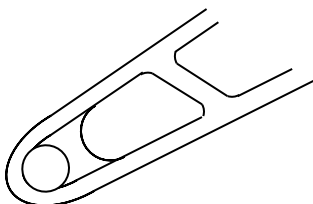
- Mehrkörpersystem



- Fachwerk

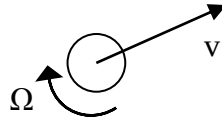


- Finite Elemente

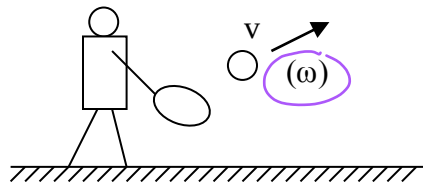


- lokale Spannungen,
Deformationen

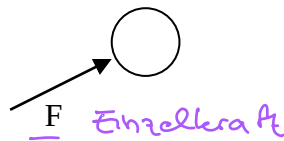
Tennisball



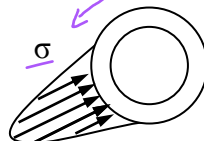
- Massenpunkt



- Elastischer Körper

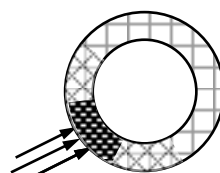


Membran



verteilte Oberflächenkraft

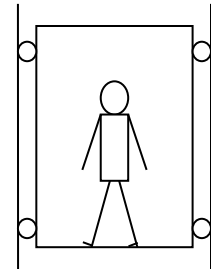
Finite Elemente



Mensch

Fahrstuhl

- Massenpunkt oder
- Starrkörper

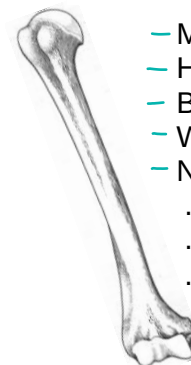


- Mehrkörpersystem



- Finite Elemente

Knochen



- Muskel
- Haut,
- Blutströmung
- Wärmeaustausch
- Nervenreize

⇒ Skalierungsproblem

Modellverfeinerung

Modellierung: Knochen

Speziell

- Starrkörper

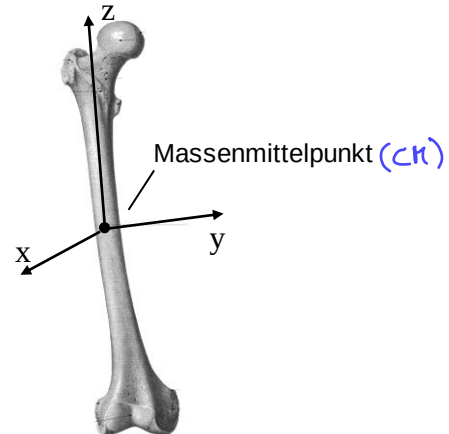
- M_K ,

Masse

$$- \mathbf{J}_K = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Massenverteilung,
Trägheitstensor

Hauptträgheitsmomente
Deviationsmomente



Vereinfachungen: Deviationsmomente $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

$J_{zz} = 0$ dünner Stab

- Elastischer Balken



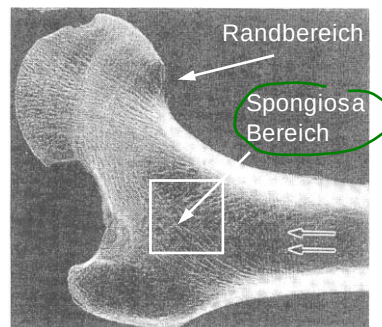
- Finite Elemente

○ homogen $\rho = \frac{M_K}{V_K}$

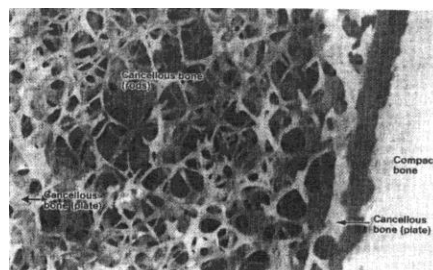


i – Elemente (Balken-, Volumenelemente
unterschiedlicher Ordnung)

- inhomogen



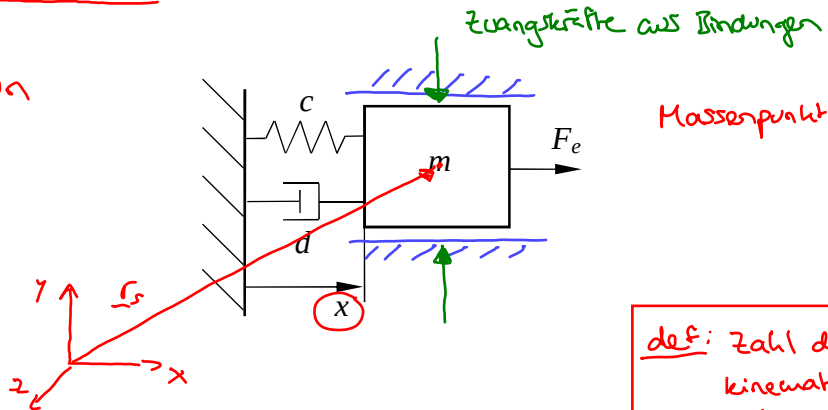
- Feinstruktur, spongiöser Bereich



Vorbereitung: Strukturänderung

Beispiel 1: Geradlinige Bewegung eines Einmassenschwingers

Translation



Kinematik

allgemein:

$$\text{Ortsvektor } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Geschwindigkeit } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dr_x}{dt} \\ \frac{dr_y}{dt} \\ \frac{dr_z}{dt} \end{bmatrix}$$

Beschleunigung $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

Freischnitten

hier:

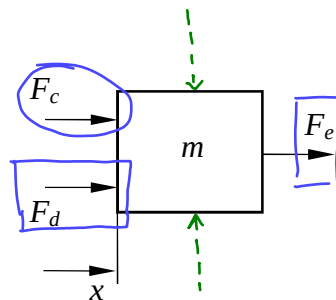
$$\text{Ortsvektor } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ Freiheitsgrad } f = 1$$

skalare Darstellung möglich:

Lage x

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\text{Beschleunigung } a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$



eingeprägte Kräfte

möglich wegen $f=1$

allgemein: Kräfte sind Vektoren

$$\text{Federkraft } \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} F_{c,x} \\ F_{c,y} \\ F_{c,z} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dämpferkraft } \mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} F_{d,x} \\ F_{d,y} \\ F_{d,z} \end{bmatrix}$$

$$\text{Erregerkraft } \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} F_{e,x} \\ F_{e,y} \\ F_{e,z} \end{bmatrix}$$

hier: skalare Darstellung möglich

lineare Feder/Dämpfer:

$$\text{Federkraft } F_c = -cx$$

$$\text{Dämpferkraft } F_d = -d\dot{x}$$

$$\text{Erregerkraft } F_e$$

B



Impulssatz (Newtonsche Gleichung)

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_e$$

3 skalare Gleichungen

Statik: $\alpha=0, v=0$

→ Kräftegleichgewicht

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -cx - d\dot{x} + F_e$$

• fremderregtes System: $F_e \neq 0$

• freies (autonomes) System: $F_e = 0$

Bewegungsgleichung in Normalform:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \nu_0^2 x = \frac{F_e}{m}$$

schwache Dämpfung
 $0 < \delta < \nu_0$
↳ Schwingungs-
fähiges System

mit $2\delta = \frac{d}{m}$, $\nu_0^2 = \frac{c}{m}$ - Eigenfrequenz
Dämpfung

Eigenfrequenz: ungedämpft $\nu_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

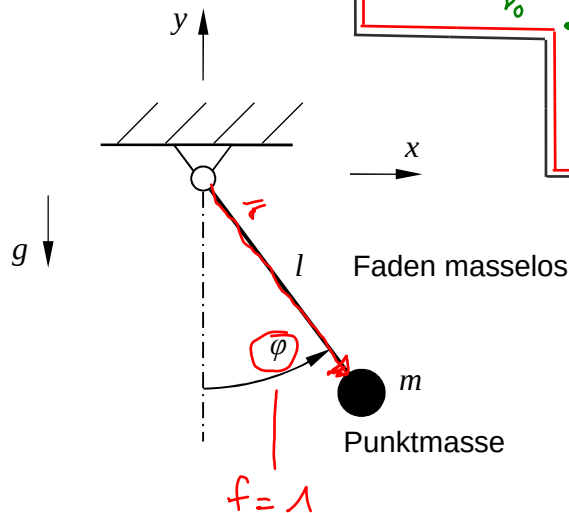
schwach gedämpft $\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \delta^2}$

Lehr'sches Dämpfungsmaß

$$D \equiv \frac{\delta}{\nu_0} \quad D < 1$$

• starke Dämpfung
- $D=1$ (kritischer Fall)
- $D>1$ periodische Bewegung

Beispiel 2: Ebenes Pendel (krummlinige Bewegung)



Kinematik

$$\text{Ortsvektor } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Geschwindigkeit } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} l \cos \varphi \\ \dot{\varphi} l \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Beschleunigung } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} l \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 l \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} l \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 l \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung sind Vektoren

$$\text{Drehgeschwindigkeitsvektor } \underline{\omega} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Freiheitsgrad $f = 1$

hier:

Lage wird durch eine Variable φ vollständig beschrieben, skalare Darstellung möglich

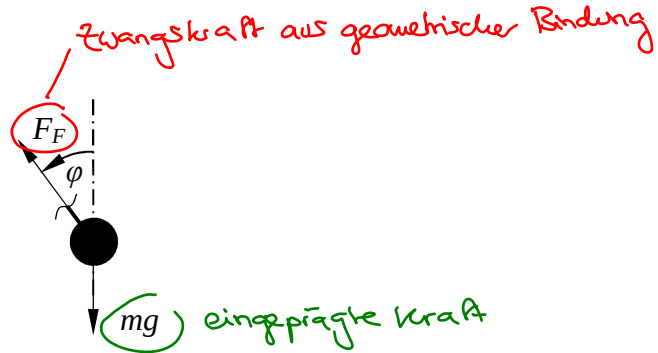
φ verallgemeinerte Koordinate

$\omega = \dot{\varphi}$ Drehgeschwindigkeit

$\alpha = \dot{\omega}$ Drehbeschleunigung

Freischneiden

|| Faden biegeschlaff:
Kraft in Fadenrichtung



Impulssatz (Newtonsche Gleichung)

$$ma = \sum F$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix}$$

Punktmasse (mit Kinematik von oben):

$$m(\ddot{\phi} l \cos \phi - \dot{\phi}^2 l \sin \phi) = -F_F \sin \phi \quad (1)$$

$$m(\ddot{\phi} l \sin \phi + \dot{\phi}^2 l \cos \phi) = F_F \cos \phi - mg \quad (2)$$

F_F eliminieren: (1) · cos ϕ + (2) · sin ϕ

$$m l \underbrace{\ddot{\phi}(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_{=1} + m l \underbrace{\dot{\phi}^2(\sin \phi \cos \phi - \sin \phi \cos \phi)}_{=0} + mg \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\phi} + mg \sin \phi = 0$$

Bewegungsgleichung nichtlinear

kleine Auslenkungen aus der Ruhelage $\phi_0 = 0$: *Linearisierung zulässig*

$$\sin \phi \approx \phi$$

Bewegungsgleichung in Normalform:

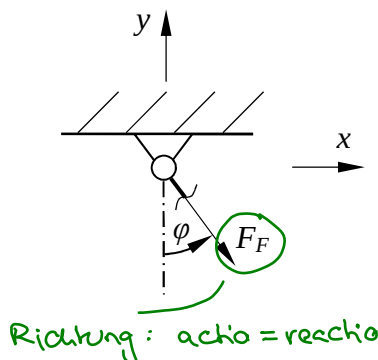
$$\ddot{\phi} + \nu_0^2 \phi = 0 \quad \text{mit} \quad \nu_0^2 = \frac{g}{l}$$

wenn ν^2 negativ ist $\rightarrow$ instabile Bewegung

$$\text{Eigenfrequenz } \nu_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Anmerkung: Betrachtung zum Lager (*Zwangskraft?*)

Lager freischneiden



Kraft auf das Lager (zerlegt in Koordinatenrichtungen):

$$L_x = F_F \sin \phi \quad (3)$$

$$L_y = -F_F \cos \phi \quad (4)$$

(1) in (3) und (2) in (4) einsetzen:

$$L_x = -m(\ddot{\phi} l \cos \phi - \dot{\phi}^2 l \sin \phi)$$

$$L_y = -m(\ddot{\phi} l \sin \phi + \dot{\phi}^2 l \cos \phi) - mg$$

02. SKELETT

Montag, 5. November 2018 11:32

2.1 Modelle, Daten

2.1.1 Modelle

Segmentmodelle

- Starrkörper
- FEM (Finite Elemente Modelle)
- ⋮

Modellbildung : "Ingenieurs"aufgabe

- Modellstruktur festlegen
- Aufstellen der Zwangsbedingungen zu Zwangskräfte
- Bewegungsgleichungen aufstellen

Hilfe : Rechnerprogramme

- Darstellung
 - symbolische Darstellung
 - numerische Darstellung
 - Form
 - Minimalform : f Freiheitsgrade zu f Gleichungen ODE
 - Deskriptorform : z.B. n Körper $\rightarrow 6n$ Gleichungen
(Impulsatz und Drallsatz für jeden einzelnen Körper) ODE
+ algebraische Gleichungen (Zwangsbedingungen) AE
- $\Rightarrow$ DAE-System (differential-algebraic-equations ...)

Skelett

Knochenzahl 220 (222)

Saxioski $f = 888$ FHG

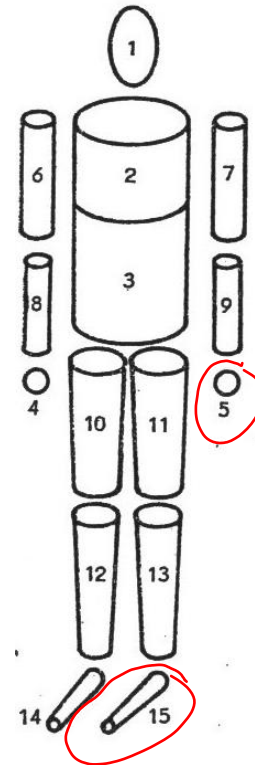
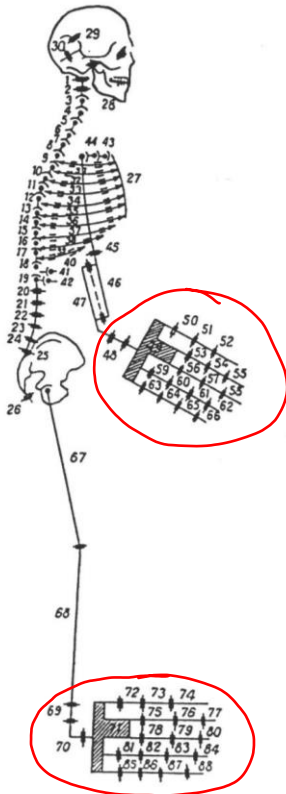
Töffel $f = 1332$ FHG

>H5

Ganzkörpermodelle:

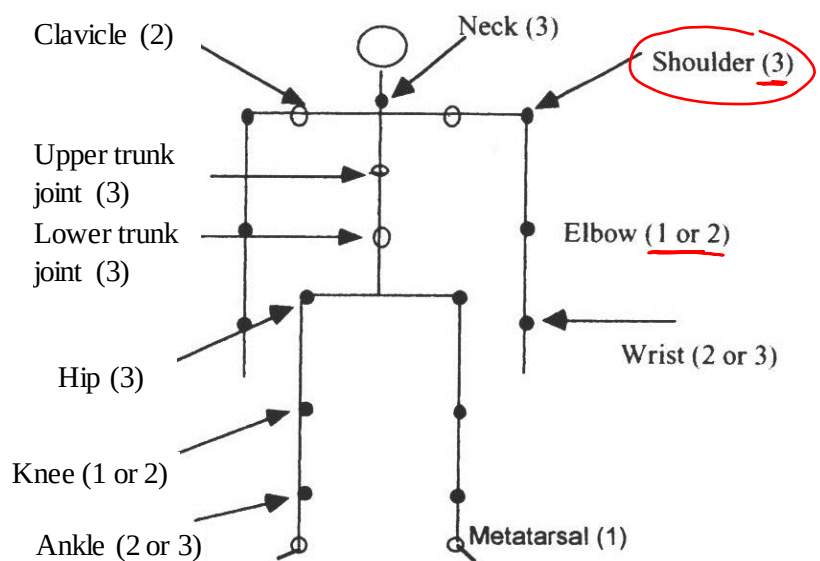
MKS-Modelle

Modell nach Hanavan (1964)



Modell nach Morecki, A., Ekiel, J.,
Fidelus, K. (1971).
Bionika ruchu, Warsaw.

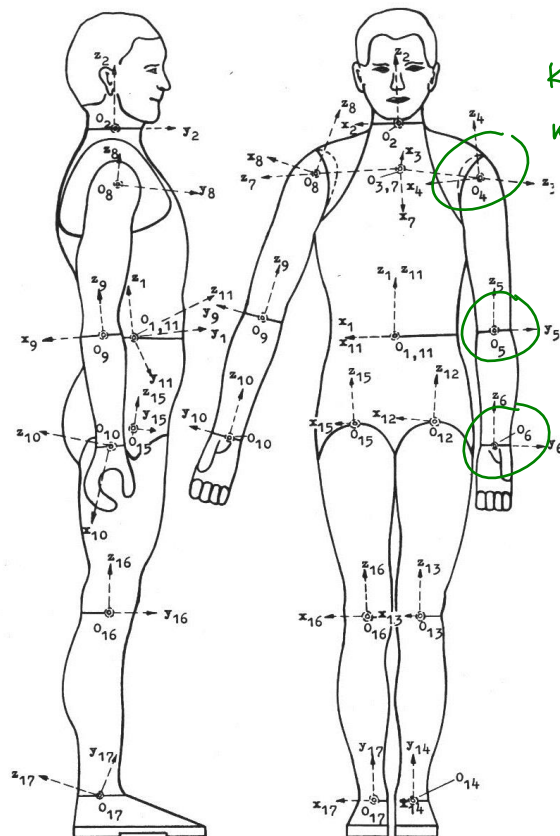
Kinematic model of human body. Filled circles designate the joints that are usually included in the model. Open circles are for the joints that are included only in some models.
(): Freiheitsgrade der Gelenke.
Zatsiorsky (1998)



Lateral- und Frontalansicht des
17-segmentigen Hominoids mit
den lokalen Segmentkoordinatensystem

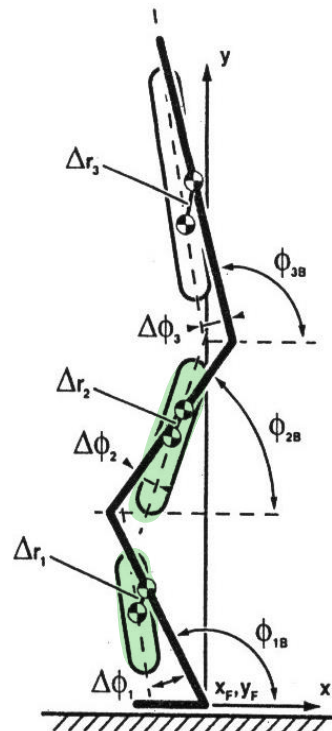
$O_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, 17$.

Hatze (1986)



Kinematik
KOS in den
Gelenken

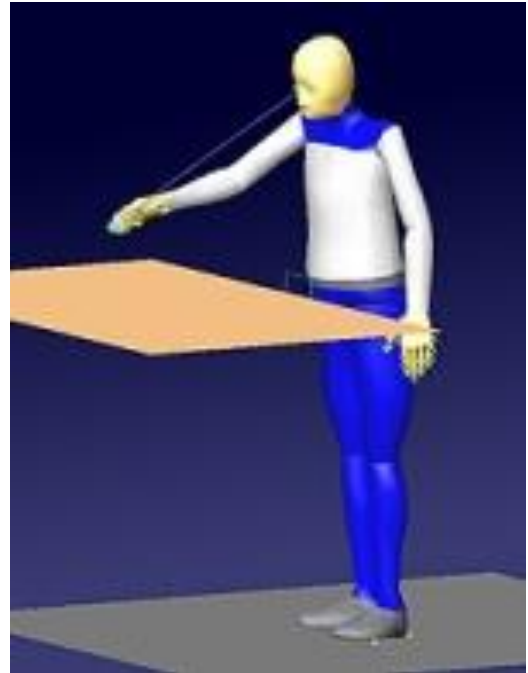
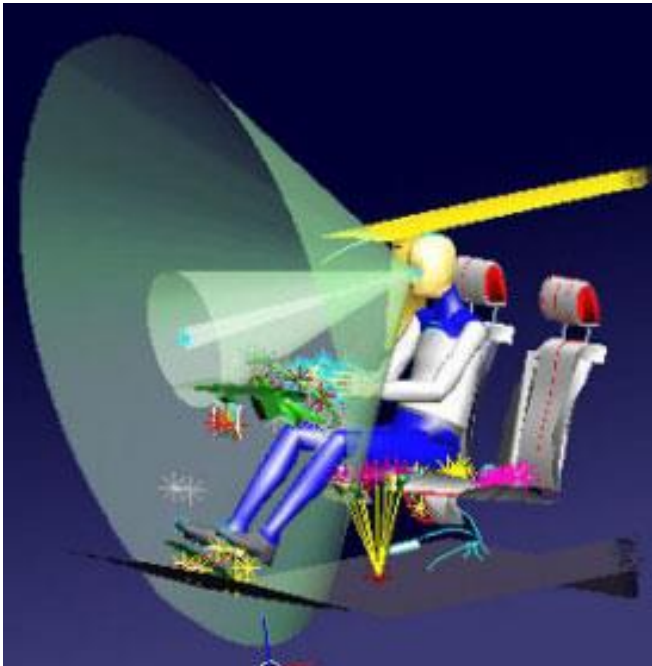
Ebenes Modell am 3 Gliedern und
Schwabbelmassen, Fuß ist masselos.
Gruber (1987)



FE-Modelle:

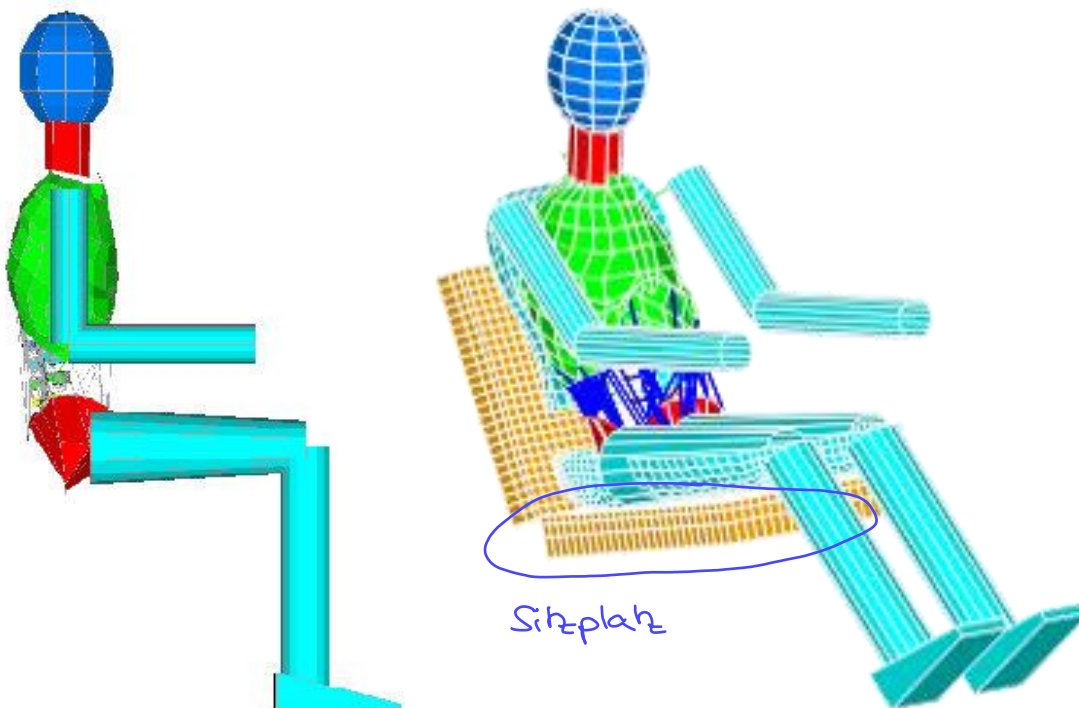
Ramsis

<http://www.ramsis.de>



Casimir

<http://www.tu-darmstadt.de/fb/mb/fmd/menschmodkomf.html>

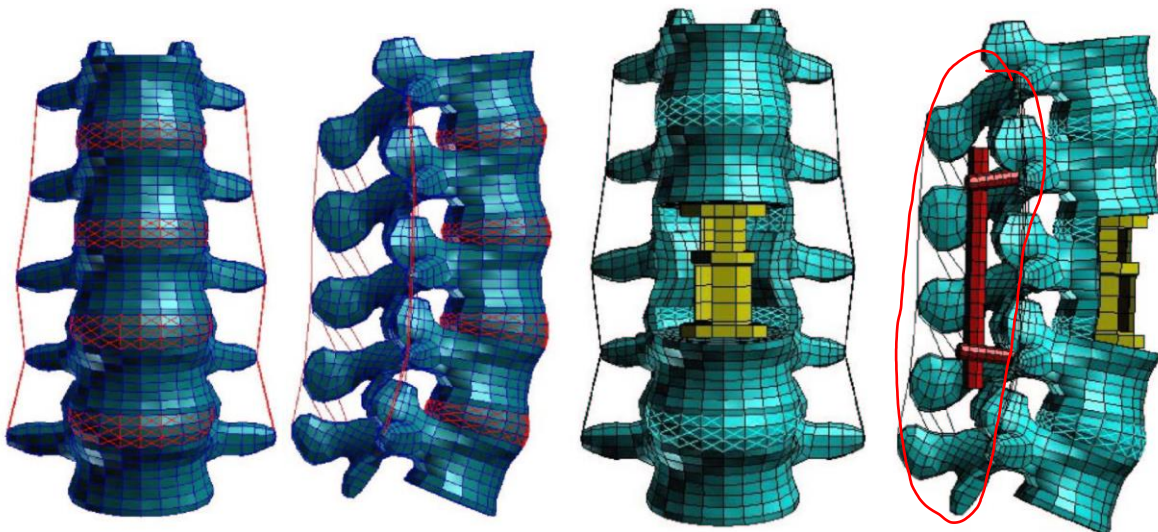


Teilmodelle im Gelenkbereich, Bänderapparat.

Modelle der Wirbelsäule

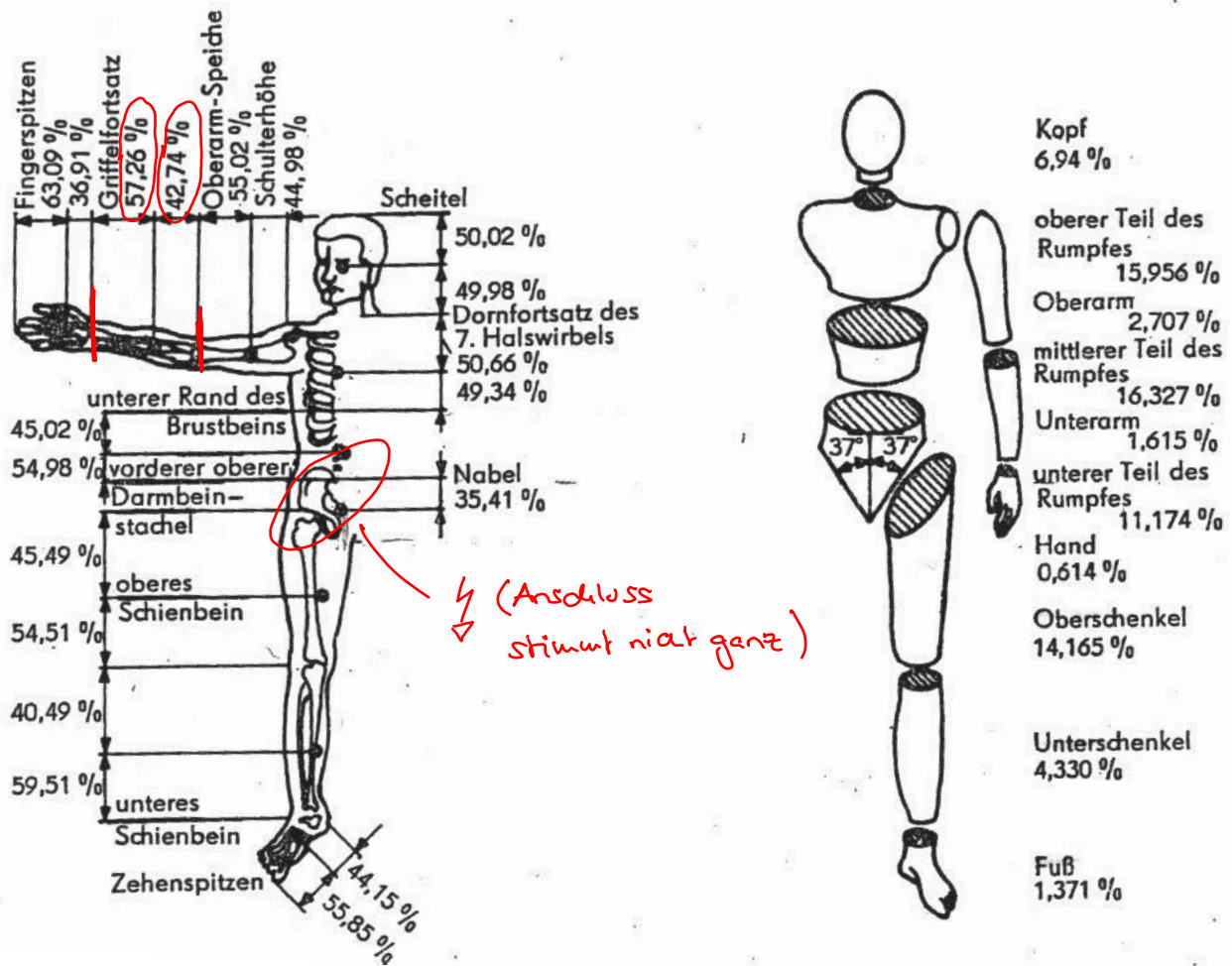
Benjamin Franklin, Freie Universität Berlin

www.biomechanik.de



Prothese

Abmessungen und Massen:



Segmentaufteilung des menschlichen Körpers.

Links: Anthropometrische Punkte, die die Grenzen der Segmente darstellen; Lage der Massemittelpunkte der Segmente auf ihren Längsachsen in % zu den Segmentlängen.

Rechts: Anteile der Segmentgewichte in bezug auf das Gesamtgewicht. Auswahl: 100 Männer. (Saziorski)



Segmente und anthropometrische Punkte, die die Grenzen der Segmente anzeigen

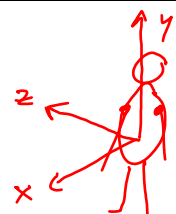
Segment	Segmentgrenzen	
	proximal	distal
Kopf	Dornfortsatz des 7. Halswirbels	Scheitel
oberer Teil des Rumpfes	Brustbein, unteres Ende	Dornfortsatz des 7. Halswirbels
mittlerer Teil des Rumpfes	Bauchnabel	Brustbein, unteres Ende
unterer Teil des Rumpfes	Bauchnabel	Ebene, unter einem Winkel von 37° zur Sagittalebene durch den vorderen Darmbeinstachel
Oberschenkel	Ebene, unter einem Winkel von 37° zur Sagittalebene durch den vorderen Darmbeinstachel	oberes Ende des Schienbeins
Unterschenkel	oberes Ende des Schienbeins	unteres Ende des Schienbeins
Fuß	unteres Ende des Schienbeins	
Oberarm	Schulterhöhe	Ellbogen
Unterarm	Ellbogen	Handgelenk
Hand	Handgelenk	Fingerspitze

Trägheitsmomente des menschlichen Körpers (Körper gestreckt, Hände seitlich angelegt)

(Massenverteilung)

Trägheitsmomente bezüglich <u>KSP</u> (kg·m ²)	Autoren (Jahr)			
	V. N. Tichonov (1973)		Hochmuth (1967)	Santschi u. a. (1963)
	22 Männer	11 Frauen	Männer	66 Männer
Frontalachse	9,908±1,30	9,70±1,05	10,7–13	9,4±1,70
Sagittalachse	10,18±2,58	10,01±1,30	10,0–12	10,5±1,83
Längsachse	2,07±0,30	1,61±0,26	1,0–1,2	1,0–2,2

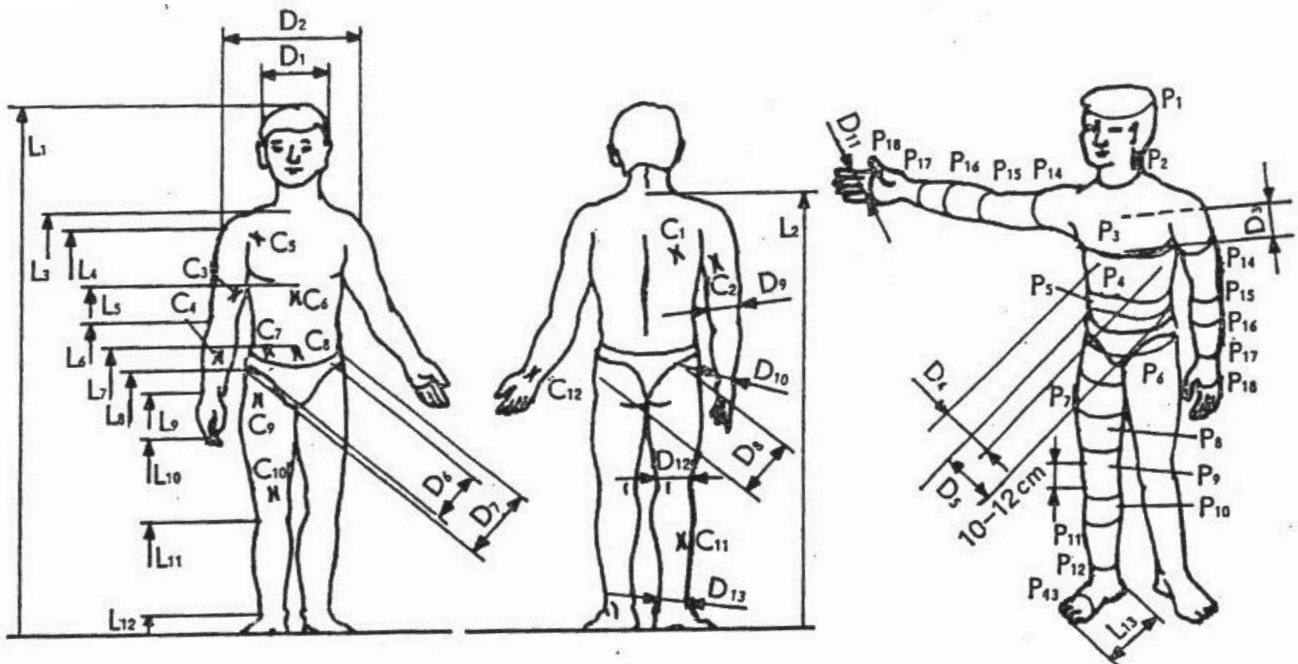
Körperschwerpunkt $\bar{c}$



> M 6.3 "Messanweisung"

...Einschub A2

Anthropometrische Messungen zur Schätzung der Massen und Massenträgheitsmomente



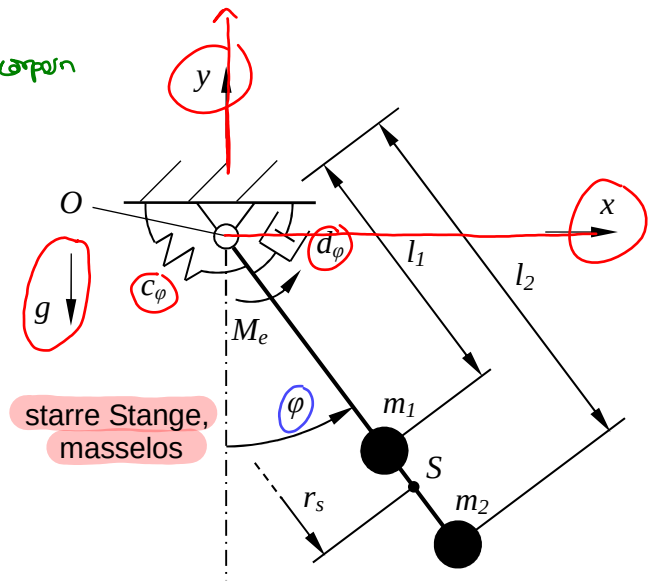
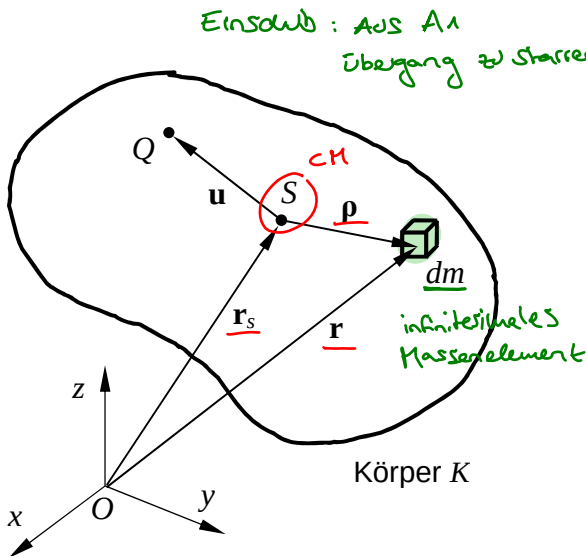
Höhen der anthropometrischen Punkte über dem Bodenniveau: L1: Körperhöhe; L2: Dornfortsatz des 7. Halswirbels; L3: obere Brustbeinhöhe; L4: Schulterhöhe; L5: untere Brustbeinhöhe (Schwertfortsatz); L6: Oberarm-Speichenhöhe; L7: Nabelhöhe; L8: vorderer oberer Darmbeinstachel; L9: Griffelfortsatz der Speiche; L10: Fingerhöhe; L11: oberer Schienbeinrand; L12: unterer Schienbeinrand; L13: Fußlänge;

Durchmesser: D1: Kopfbreite; D2: Schulterbreite; D3: mittlere Brustkorbtiefe; D4: mittlere Brustkorbbreite; D5: untere Rippenbreite in Höhe der 10. Rippe; D6: Darmbeinstachelbreite; D7: Hüftbreite; D8: Rollhügelinie; D9: untere Epiphysen des Oberarms; D10: untere Epiphysen des Unterarms; D11: Handbreite; D12: untere Epiphysen des Oberschenkels; D13: untere Epiphysen des Unterschenkels;

Hautfaltendicke: C1: unter dem unteren Schulterblattwinkel; C2: an der hinteren Fläche des Oberarms; C3: an der inneren Fläche des Oberarms; C4: am Unterarm; C5: in Brusthöhe neben dem Achselwinkel; C6: am Schwertfortsatz des Brustbeins; C7: am Bauch in der Höhe des Darmbeinstachels; C8: am Bauch, rechts vom Nabel; C9: am Oberschenkel, oben; C10: am Oberschenkel, über der Kniescheibe; C11: am Unterschenkel hinten, lateral; C12: am Handrücken;

Umfang: P1: Kopf; P2: Hals; P3: Brustkorb in Höhe der Brustwarzen; P4: Brustkorb in Höhe der 10. Rippe; P5: Bauch in Höhe des Nabels; P6: Hüfte; P7: Oberschenkelumfang an der unteren Gesäßfalte; P8: mittlerer Oberschenkelumfang; P9: distaler Oberschenkelumfang 10 bis 12 cm oberhalb der Kniescheibe; P10: proximaler Unterschenkelumfang an der schmalsten Stelle unter dem Knie; P11: Unterschenkelumfang an der stärksten Stelle; P12: distaler Unterschenkelumfang an der schmalsten Stelle; P13: Umfang des Fußes an der breitesten Stelle über dem 5. Mittelfußgelenk; P14: Oberarmumfang an der stärksten Stelle, die bei der Anspannung des zweiköpfigen Armmuskels festgestellt wird; P15: maximaler Unterarmumfang; P16: Umfang in der Mitte des Unterarms; P17: distaler kleinster Unterarmumfang; P18: Umfang der Hand am 2. und 4. Handwurzel-Mittelhandgelenk.

Beispiel: Ebenes Pendel mit zwei Punktmassen



allgemein:

Ortsvektor: $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$

Drehbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$

Gesamtmasse: $m = \int_K dm$

Schwerpunkt S: $\mathbf{r}_s = \frac{1}{m} \int_K \mathbf{r} dm$

hier:

Freiheitsgrad $f = 1$

Lage wird durch eine Variable φ vollständig beschrieben, skalare Darstellung möglich

φ verallgemeinerte Koordinate

$\omega = \dot{\varphi}$ Drehgeschwindigkeit

$\alpha = \dot{\omega}$ Drehbeschleunigung
 $= \ddot{\varphi}$

Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ feste Drehachse

Gesamtmasse: $m = m_1 + m_2$

Schwerpunkt S: $\mathbf{r}_s = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{m}$

Für Drall ($\equiv$ Impulsmoment) und Momente aus Kräften muss der Bezugspunkt beachtet werden.



Massenverteilung

Trägheitstensor bzgl. O :

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} J_{O,xx} & J_{O,xy} & J_{O,xz} \\ J_{O,xy} & J_{O,yy} & J_{O,yz} \\ J_{O,xz} & J_{O,yz} & J_{O,zz} \end{bmatrix}$$

Deviationsterme (green circles around off-diagonal terms)

Massenträgheitsterme (blue circles around diagonal terms)

$$= \int_K \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

Trägheitsmoment bzgl. O :

$$J_{O,zz} = \int_K (x^2 + y^2) dm = \int_K r^2 dm = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

(r): Abstand von der Drehachse

Trägheitstensor bzgl. S :

$$\mathbf{J}_S = \int_K \begin{bmatrix} \rho_y^2 + \rho_z^2 & -\rho_x \rho_y & -\rho_x \rho_z \\ -\rho_x \rho_y & \rho_x^2 + \rho_z^2 & -\rho_y \rho_z \\ -\rho_x \rho_z & -\rho_y \rho_z & \rho_x^2 + \rho_y^2 \end{bmatrix} dm$$

mit $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_S$ (körperfest)

Trägheitsmoment bzgl. S :

a) aus $\mathbf{J}_S$

$$J_{S,zz} = \int_K (\rho_x^2 + \rho_y^2) dm = \int_K (r - r_S)^2 dm$$

b) mit Verschiebungssatz und $J_{O,zz}$

$$J_{S,zz} = J_{O,zz} - m r_S^2$$

• anderer Bezugspunkt Q (körperfest):

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_S$$

↗

• Verschiebungssatz (Steiner):

$$\mathbf{J}_Q = \mathbf{J}_S - m \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

mit $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$

→ gilt zwischen zwei körperfesten Punkten Q und S
nicht aber zwischen Q und P , $P \neq S$

Alternative Angabe:

gedachter Ring oder Zylinder auf dem die gesamte Masse sitzt, so dass das Trägheitsmoment beider Körper gleich ist

Trägheitsradius: quadratischer Mittelwert

$$J_{O,zz} = \int_K r^2 dm = k^2 m \text{ (Zylindermantel)}$$

$$\rightarrow \text{Trägheitsradius } k = \sqrt{\frac{J_{O,zz}}{m}}$$

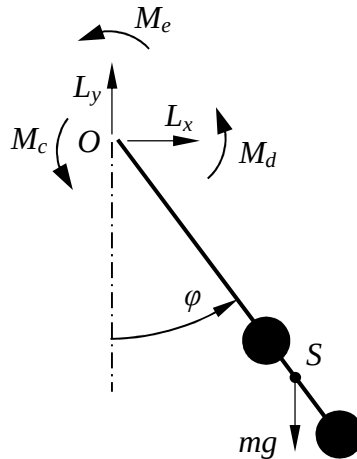
Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse e durch S

:

$$J_{S,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{e}$$

Freischnitten in Lager wie bei A1: Zwangskräfte L_x, L_y
eingeprägte "Kräfte" M_c, M_d, M_e

Freischneiden



Kräfte und Momente sind Vektoren

lineare Drehfeder/Drehdämpfer:

Federmoment $M_c = -c_\varphi \varphi$

Dämpfermoment $M_d = -d_\varphi \dot{\varphi}$

Moment durch Gewichtskraft bzgl. O:

$$M_g = -mgr_s \sin \varphi$$

Erregermoment M_e

Drallsatz (Eulersche Gleichung)

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum \mathbf{M}$$

(Bezugspunkt beachten)

günstige Punkte:

- so, dass möglichst viele unbekannte Reaktionskräfte herausfallen
- körperfeste Fixpunkte

VORSICHT bei bewegten Bezugspunkten !

hier: Bezugspunkt O (Aufhängepunkt)

ruhend

Drallsatz bzgl. O:

$$J_{O,zz} \ddot{\varphi} = \sum M_O$$

Bewegungsgleichung (nichtlinear):

$$J_{O,zz} \ddot{\varphi} = \underbrace{-mgr_s \sin \varphi}_{\text{Schwerkraft}} - \underbrace{c_\varphi \varphi}_{\text{Federmoment}} - \underbrace{d_\varphi \dot{\varphi}}_{\text{Dämpfungsmoment}} + \underbrace{M_e}_{\text{eingesprägtes Moment}}$$

kleine Auslenkungen aus der Ruhelage $\varphi_0 = 0$:

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

linearisierte Bewegungsgleichung in Normalform:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \nu_0^2 \varphi = \frac{M_e}{J_{O,zz}}$$

$$\text{mit } 2\delta = \frac{d_\varphi}{J_{O,zz}}, \quad \nu_0^2 = \frac{mgr_s + c_\varphi}{J_{O,zz}}$$

Eigenfrequenz

$$\text{ungedämpft: } \nu_0 = \sqrt{\frac{mgr_s + c_\varphi}{J_{O,zz}}}$$

$$\text{schwach gedämpft } (D < 1): \nu = \sqrt{\nu_0^2 - \delta^2}$$

siehe A1

$\Rightarrow$ Hausaufgabe [Dienstweg für Beispiel] + [A4]

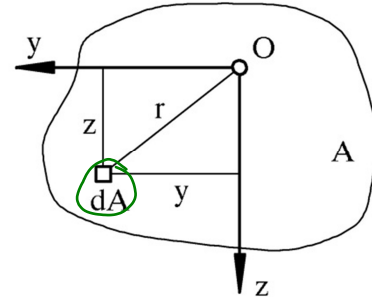
Momente zweiter Ordnung

Quadratische Flächenmomente: aus Festigkeitslehre
Quadratische Massenmomente: Massenträgheitsmomente aus Dynamik

$$dA \rightarrow dm = \rho \cdot dV$$

Für jede Fläche A lassen sich bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems (y, z) , das in der Ebene der Fläche liegt, die quadratischen Flächenmomente

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ I_z &= \int_A y^2 dA \\ I_{yz} &= - \int_A yz dA \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



definieren. Die axialen Momente I_y und I_z werden auch als Flächenträgheitsmomente und das gemischte Moment I_{yz} als Deviations- oder Zentrifugalmoment bezeichnet.

Das quadratische Flächenmoment

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (2)$$

heißt polares Flächenträgheitsmoment. Wegen $r^2 = y^2 + z^2$ gilt

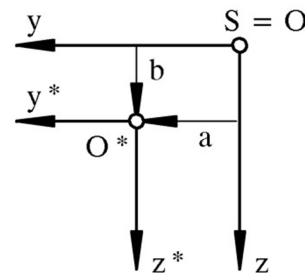
$$I_p = I_y + I_z \quad (3)$$

Beim Übergang zu einem anderen, ebenfalls in der Ebene von A liegenden Koordinatensystem (y^*, z^*) ändern sich im allg. die Flächenmomente. Dabei können die beiden Systeme parallelverschoben und / oder gedreht sein.

Parallelverschiebung:

Liegt der Ursprung O von (y, z) im Schwerpunkt S der Fläche A , so gilt mit den Gleichungen der Parallelverschiebung $y^* = y - a$ und $z^* = z - b$ nach dem Satz von Huygens-Steiner

$$\left. \begin{aligned} I_y^* &= I_y + b^2 A \\ I_z^* &= I_z + a^2 A \\ I_{yz}^* &= I_{yz} - a b A \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

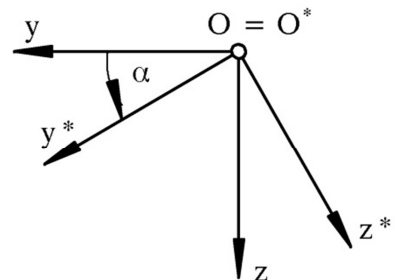


Daraus folgt, dass die Flächenmomente für Achsen durch den Schwerpunkt minimal sind.

Drehung:

Mit den Gleichungen der Koordinatendrehung um den Winkel α , $y^* = y \cos \alpha + z \sin \alpha$ und $z^* = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$, folgt

$$\left. \begin{aligned} I_y^* &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) + \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_z^* &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{yz}^* &= -\frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Deviationsmoment

Das polare Flächenmoment I_p ist gegenüber Drehungen des Bezugssystems invariant, da es nur von r abhängt.

Suche nach Hauptrichtungen (Deviationsmomente verschwinden)

- graphisch (Mohr)
- Hauptachsentransformation



Ordnen wir die Flächenmomente in einer Matrix bzw. in einem Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

an, so sind (5) gerade die Transformationsformeln, die die Komponenten von $\mathbf{I}$ von System (y, z) in (y^*, z^*) transformieren. Dieser Tensor $\mathbf{I}$ heißt Flächenmomententensor der Fläche A im Punkt O . Wegen der Symmetrie des Flächenmomententensors ist eine Hauptachsentransformation möglich, d.h. es gibt ein spezielles Koordinatensystem (y_H, z_H) , in dem das Deviationsmoment I_{yz} verschwindet. Die Momente I_{yH} und I_{zH} sind dann maximal, sie heißen Hauptflächenmomente 2. Ordnung und die Richtungen der Achsen y_H und z_H heißen Hauptachsen von $\mathbf{I}$.

Die Hauptachsentransformation kann rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden:

Rechnerische Transformation

Aus der Säkulargleichung

$$\det(\mathbf{I} - I\mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} \text{ Einheitstensor,}$$

folgt ein Polynom 2. Grades für I , dessen Lösung die Hauptflächenmomente I_{yH} und I_{zH} sind. Die dazugehörigen Hauptrichtungen $\mathbf{r}_{yH}$ und $\mathbf{r}_{zH}$ ergeben sich durch Einsetzen von I_{yH} bzw. I_{zH} in die Eigenwertgleichungen

$$(\mathbf{I} - I_{yH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{yH} = \mathbf{0}, \text{ bzw. } (\mathbf{I} - I_{zH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{zH} = \mathbf{0}.$$

Das Hauptachsensystem (y_H, z_H) geht aus dem System (y, z) durch Drehung um die x -Achse mit dem Winkel α_H hervor.

Durch Ausrechnen der obigen Beziehung folgt für die Hauptflächenmomente

$$I_{yH} = I_1 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

$$I_{zH} = I_2 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

und für den Drehwinkel α_H

$$\tan 2\alpha_H = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Massenträgheitsmomente für gängige Körper aus Tabellenwerten (meist homogene Körper)



Massenträgheitsmomente ausgewählter homogener Körper

Körper	Geometrie	Masse	Trägheitsmomente
Quader		$m = \rho abc$	$I'_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$ $I'_{yy} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
Platte		$m = \rho abs$	$I'_{xx} = \frac{m}{12} b^2$ $I'_{yy} = \frac{m}{12} a^2$ $I'_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
dünner Stab		$m = \rho Al$	$I'_{xx} = 0$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{ml^2}{12}$
Kreis-zylinder		$m = \rho \pi r^2 h$	$I'_{xx} = \frac{1}{2} mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12} (3r^2 + h^2)$
Hohl-zylinder		$m = \rho \pi (r_a^2 - r_i^2) h$	$I'_{xx} = \frac{m}{2} (r_a^2 + r_i^2)$ $I'_{zz} = I'_{yy} = \frac{m}{4} (r_a^2 + r_i^2 + h^2/3)$
Zylinder-schale		$m = \rho 2\pi r h$	$I'_{xx} = mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12} (6r^2 + h^2)$
Kugel		$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$
Hohl-kugel		$m = \rho \frac{4}{3} \pi (r_a^3 - r_i^3)$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Kreis-torus		$m = \rho 2\pi^2 r^2 R$	$I'_{xx} = I'_{yy} = \frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{4} (4R^2 + 3r^2)$

Trägheitsmomente beziehen sich auf das eingezeichnete **Hauptachsensystem**. Bei Bezugspunktwechsel muss der Trägheitstensor transformiert werden.
= symmetrische Querschnittsaufteilung

Satz von Steiner: immer nur zum Schwerpunkt HIN oder WEG



hier: Satz von Steiner 2x anwenden

Trägheitsmoment ist immer am kleinsten bezgl. des Schwerpunkts



Mittelwerte der Massen und Trägheitseigenschaften der Segmente des menschlichen Körpers (100 Männer, Saziorski)

	m	MZ	μ	K_1	K_2	K_3	Angabe von MZ
Segmente	$x \pm \sigma$	$x \pm \sigma$	$x \pm \sigma$	$x \pm \sigma$	$x \pm \sigma$	$x \pm \sigma$	
Fuß	0,997	55,85	1,371	25,70	24,50	12,40	distal
	0,141	3,65	0,155	0,95	0,80	1,24	
Unterschenkel	3,160	40,47	4,330	28,10	27,50	11,40	proximal
	0,439	2,81	0,305	0,63	0,61	1,96	
Oberschenkel	10,360	45,49	14,165	26,70	26,70	12,10	proximal
	1,568	1,94	0,998	0,99	0,99	0,93	
Hand	0,447	63,09	0,644	28,50	23,30	18,20	distal
	0,072	4,85	0,083	2,16	1,71	2,30	
Unterarm	1,177	57,26	1,625	29,50	28,40	13,00	distal
	0,161	3,26	0,140	0,86	0,65	1,51	
Oberarm	1,980	55,02	2,707	32,80	31,00	18,20	distal
	0,319	4,19	0,243	1,61	1,245	3,27	
Kopf	5,018	50,02	6,940	30,30	31,50	26,10	distal
	0,393	2,23	0,707	1,29	1,34	2,10	
Rumpf, oberer Abschnitt	11,654	50,66	15,956	50,50	31,99	46,50	distal
	1,873	2,24	1,529	3,74	1,71	4,64	
Rumpf, mittlerer Abschnitt	11,953	45,02	16,327	48,20	38,30	46,80	distal
	2,176	2,12	1,725	4,24	2,43	5,60	
Rumpf, unterer Abschnitt	8,164	35,41	11,174	35,60	31,90	34,00	distal
	1,492	3,01	1,428	2,05	2,37	3,00	

„Nominallage“
des Elemente

Anmerkung:

m – Masse (kg)

MZ – Angabe des distalen bzw. proximalen Abstands des Massenmittelpunkts auf der Längsachse in % der Gesamtlänge. Zuordnung gemäß letzter Spalte

μ – Verhältnis Segmentmasse/Gesamtmasse in %

K_1 – Verhältnis des Trägheitsradius bezüglich der sagittalen Achse des Segments zu seiner Länge in %

K_2 – Verhältnis des Trägheitsradius bezüglich der Frontalachse des Segments zu seiner Länge in %

K_3 – Verhältnis des Trägheitsradius bezüglich der Längsachse des Segments zu seiner Länge in %

σ – mittlerer quadratischer Fehler des Parameters



Anthropometric Data (Winter, 1990)

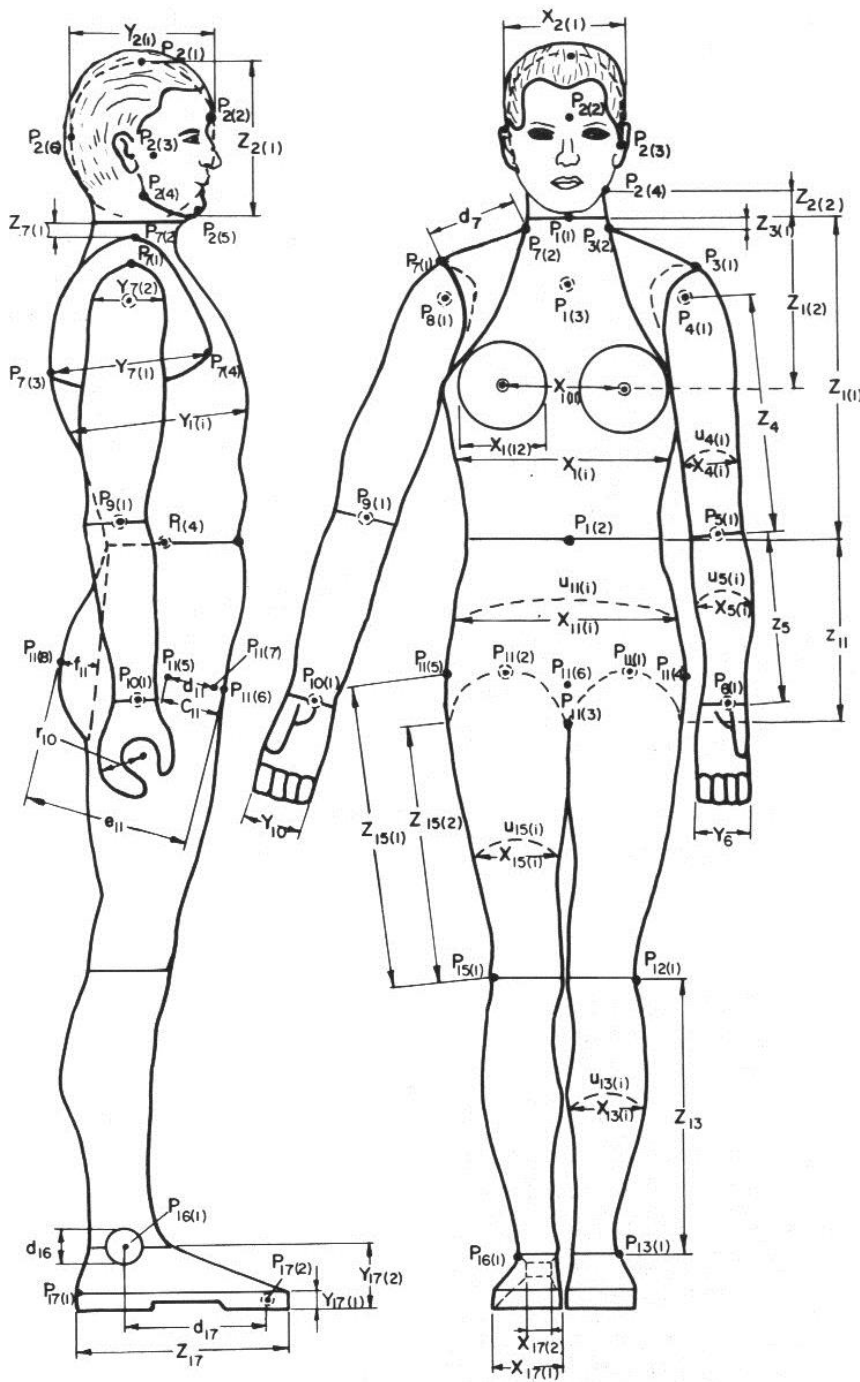
Trägheitsradius

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	CM	Proximal	Distal	
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006 M	0.506	0.494 P	0.297	0.587	0.577 M	1.16
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016 M	0.430	0.570 P	0.303	0.526	0.647 M	1.13
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028 M	0.436	0.564 P	0.322	0.542	0.645 M	1.07
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022 M	0.682	0.318 P	0.468	0.827	0.565 P	1.14
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050 M	0.530	0.470 P	0.368	0.645	0.596 P	1.11
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145 M	0.50	0.50 P	0.475	0.690	0.690 P	1.10
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465 M	0.433	0.567 P	0.302	0.528	0.643 M	1.09
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100 M	0.433	0.567 P	0.323	0.540	0.653 M	1.05
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061 M	0.606	0.394 P	0.416	0.735	0.572 P	1.09
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161 M	0.447	0.553 P	0.326	0.560	0.650 P	1.06
Head and neck	C7-T1 and 1st rib/ear canal	0.081 M	1.000	— PC	0.495	0.116	— PC	1.11
Shoulder mass	Sternoclavicular joint/glenohumeral axis	—	0.712	0.288	—	—	—	1.04
Thorax	C7-T1/T12-L1 and diaphragm*	0.216 PC	0.82	0.18	—	—	—	0.92
Abdomen	T12-L1/L4-L5*	0.139 LC	0.44	0.56	—	—	—	—
Pelvis	L4-L5/greater trochanter*	0.142 LC	0.105	0.895	—	—	—	—
Thorax and abdomen	C7-T1/L4-L5*	0.355 LC	0.63	0.37	—	—	—	—
Abdomen and pelvis	T12-L1/greater trochanter*	0.281 PC	0.27	0.73	—	—	—	1.01
Trunk	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.497 M	0.50	0.50	—	—	—	1.03
Trunk head neck	Greater trochanter/glenohumeral joint**	0.578 MC	0.66	0.34 P	0.503	0.830	0.607 M	—
Head, arms, and trunk (HAT)	Greater trochanter/glenohumeral joint**	0.678 MC	0.626	0.374 PC	0.496	0.798	0.621 PC	—
HAT	Greater trochanter/mid rib***	0.678	1.142	—	0.903	1.456	—	—

*NOTE: These segments are presented relative to the length between the greater trochanter and the glenohumeral joint.

Source Codes: M, Dempster via Miller and Nelson; *Biomechanics of Sport*, Lea and Febiger, Philadelphia, 1973. P, Dempster via Plagenhoef; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1971. L, Dempster via Plagenhoef from living subjects; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. C, Calculated.

** Signifies the length of reference



Schema zur Aufnahme anthropometrischer Messwerte für 17-segmentigen Hominoid (Hatze, 1986)

Auf Gelenkpunkte umgerechnete Daten (de Leva)

Saizoshi

Technical Note

1227

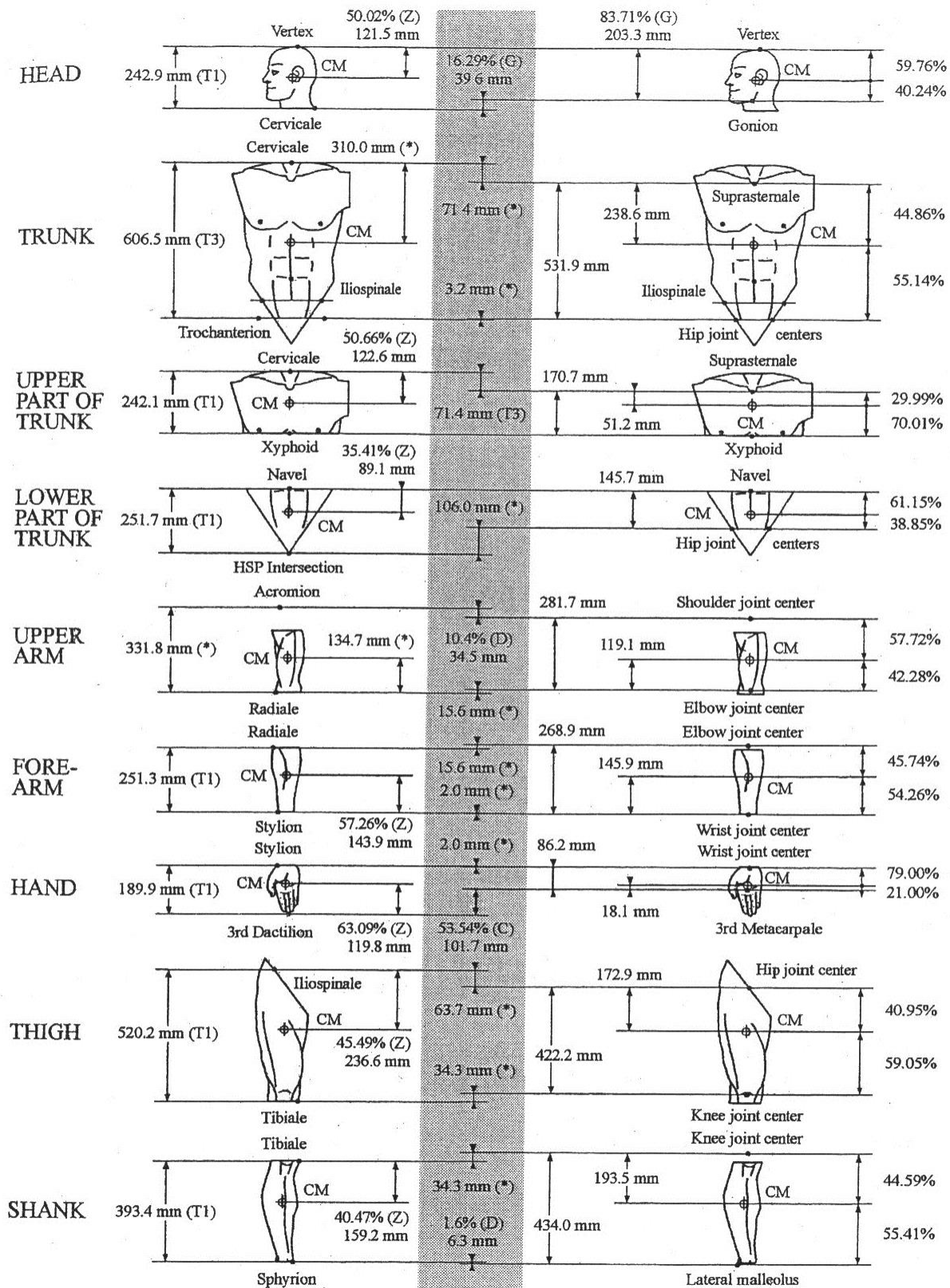


Fig. 1. A graphic description of the main adjustments to the relative CM positions for males. The adjusted distances are shown on the right of the shaded area. For all segments, except trunk and upper arm (see text), the shaded area indicates the longitudinal distances between original (on its left) and new (on its right) reference points. All percent values are relative to the segment lengths indicated on their left. (* = see text; C = Clauser *et al.*, 1969; D = de Leva, 1996; G = Gordon *et al.*, 1989; T1 = Table 1; T3 = Table 3; Z = Zatsiorsky *et al.*, 1990a).



Table 4. Adjusted parameters for females (F; body mass = 61.9 kg, stature = 1.735 m) and males (M; 73.0 kg, 1.741 m). Segment masses are relative to body mass; segment CM positions are referenced either to proximal or cranial endpoints (origin). Both segment CM positions and radii of gyration (r) are relative to the respective segment lengths. A set of easy-to-use endpoints is considered in the first part of the table; for some segments, alternative endpoints are considered in the second part (UPT, MPT, and LPT are the Upper, Middle, and Lower Parts of Trunk)

Segment	Endpoints	Longitudinal length (mm)		Mass* (%)		Longitudinal CM position (%)		Sagittal r (%)		Transverse r (%)		Longitudinal r (%)	
		F	M	F§	M¶	F	M	F	M	F	M	F	M
Head	VERT†	200.2	203.3	6.68	6.94	58.94	59.76	33.0	36.2	35.9	37.6	31.8	31.2
Trunk	SUPR†	529.3	531.9	42.57	43.46	41.51	44.86	35.7	37.2	33.9	34.7	17.1	19.1
UPT	SUPR†	142.5	170.7	15.45	15.96	20.77	29.99	74.6	71.6	50.2	45.4	71.8	65.9
MPT*	XYPH†	205.3	215.5	14.65	16.33	45.12	45.02	43.3	48.2	35.4	38.3	41.5	46.8
LPT	OMPH†	181.5	145.7	12.47	11.17	49.20	61.15	43.3	61.5	40.2	55.1	44.4	58.7
Upper arm	SJC†	275.1	281.7	2.55	2.71	57.54	57.72	27.8	28.5	26.0	26.9	14.8	15.8
Forearm	WJC†	264.3	268.9	1.38	1.62	45.59	45.74	26.1	27.6	25.7	26.5	9.4	12.1
Hand	WJC†	78.0	86.2	0.56	0.61	74.74	79.00	53.1	62.8	45.4	51.3	33.5	40.1
Thigh	HJC†	368.5	422.2	14.78	14.16	36.12	40.95	36.9	32.9	36.4	32.9	16.2	14.9
Shank	KJC†	432.3	434.0	4.81	4.33	44.16	44.59	27.1	25.5	26.7	24.9	9.3	10.3
Foot*	HEEL†	228.3	258.1	1.29	1.37	40.14	44.15	29.9	25.7	27.9	24.5	13.9	12.4
Using alternative endpoints:													
Head*	VERT†	243.7	242.9	6.68	6.94	48.41	50.02	27.1	30.3	29.5	31.5	26.1	26.1
Trunk	CERV†	614.8	603.3	42.57	43.46	49.64	51.38	30.7	32.8	29.2	30.6	14.7	16.9
Trunk	MIDS†	497.9	515.5	42.57	43.46	37.82	43.10	37.9	38.4	36.1	35.8	18.2	19.7
UPT*	CERV†	228.0	242.1	15.45	15.96	50.50	50.66	46.6	50.5	31.4	32.0	44.9	46.5
Forearm	EJC†	262.4	266.9	1.38	1.62	45.92	46.08	26.3	27.8	25.9	26.7	9.5	12.2
Hand	WJC†	170.1	187.9	0.56	0.61	34.27	36.24	24.4	28.8	20.8	23.5	15.4	18.4
Hand*	STYL†	172.0	189.9	0.56	0.61	35.02	36.91	24.1	28.5	20.6	23.3	15.2	18.2
Hand	STYL†	79.9	88.2	0.56	0.61	75.34	79.48	51.9	61.4	44.3	50.2	32.7	39.2
Shank	KJC†	438.6	440.3	4.81	4.33	43.52	43.95	26.7	25.1	26.3	24.6	9.2	10.2
Shank	KJC†	426.0	427.7	4.81	4.33	44.81	45.24	27.5	25.8	27.1	25.3	9.4	10.5

* Not adjusted values.

† Normal projection on the segment longitudinal axis.

‡ Assumed to lay on the segment longitudinal axis.

§ Zatsiorsky *et al.* (1990a).

¶ Zatsiorsky *et al.* (1990b, 1993).

2.1.2 Beschaffung der Daten

Montag, 12. November 2018 11:30

Beispiel: Beschaffung von Daten für Modelle

Anmerkung:

- Daten in der Literatur nicht einheitlich
- anthropometrische Daten vs. Gelenkdaten

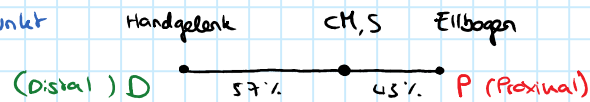
Unterarm:

• Masse (M6.5) $\frac{\text{Sequenkmasse } m}{\text{Gesamtklasse } M} = 0,016$; für $M = 80 \text{ kg}$: $m = 0,016 \cdot 80 \text{ kg} = 1,28 \text{ kg}$

• Länge (M7.1) $l = 0,145 \cdot H$; sei $H = 1,75 \text{ m}$ $\Rightarrow l = 0,145 \cdot 1,75 \text{ m} = 0,256 \text{ m}$

Mechanische Betrachtung: (Gelenk-Gelenk) $l' = 0,267 \text{ m}$

• Massenmittelpunkt



• Trägheitsmoment Es ist $J_S = \int r^2 dm = m k^2$ Trägheitsradius(k)

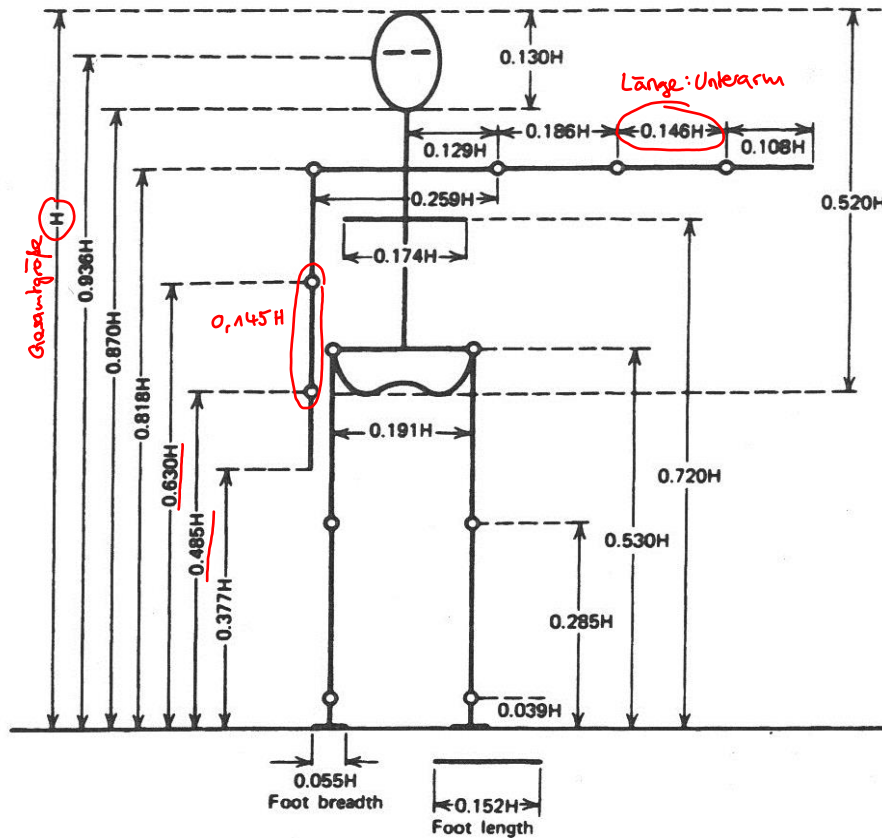
Steiner:

$$J_P = m \cdot k_s^2 + m \cdot (0,43 \cdot l)^2$$
$$J_O = \underbrace{m \cdot k_s^2}_{\text{Schwerpunkt}} + m \cdot (0,57 \cdot l)^2$$

• Dichte

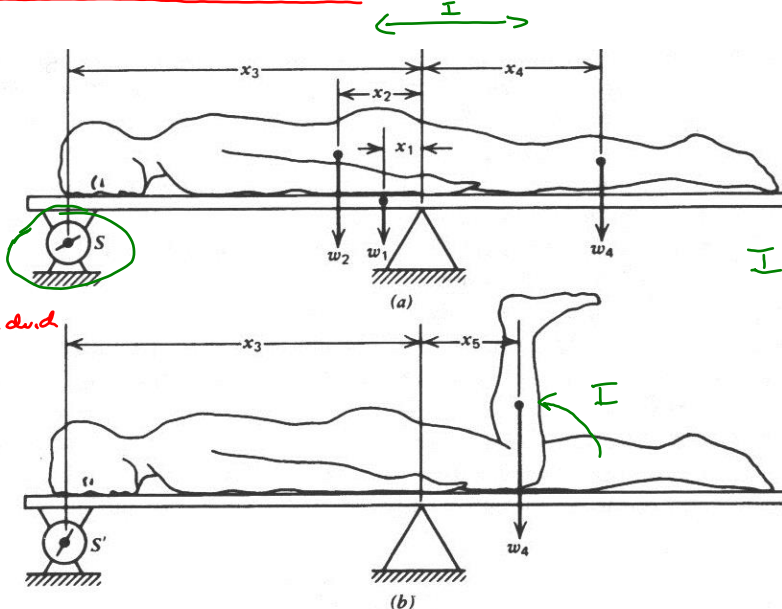
$$\rho = 1,13 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \quad (\text{Mittlere Dichte})$$

Messung anthropometrischer Daten



kleiner Unterschied
... Literatur

Längen der Körpersegmente im Verhältnis zur Körperhöhe H (Winter, 1990)



Messung: - Schwerpunkt (I)
- Massen (II)
- Massenverteilung (III)

I: • Probend auf Brett verschieben
• Konfiguration des Körpers verändern
↳ Momentengleichgewicht

Trägheitsmomente
(Eulersche Gleichung, Drallsatz)
Schwingversuche (Feder einbauen)
↳ Eigenfrequenzen messen

Balance board technique :

a: In vivo determination of mass / or location of the anatomical center of mass of the body.

b: Mass of a distal segment.

(Winter, 1990)

Pendulum tests: Moments of inertia, center of mass, mass

Körperpendel:

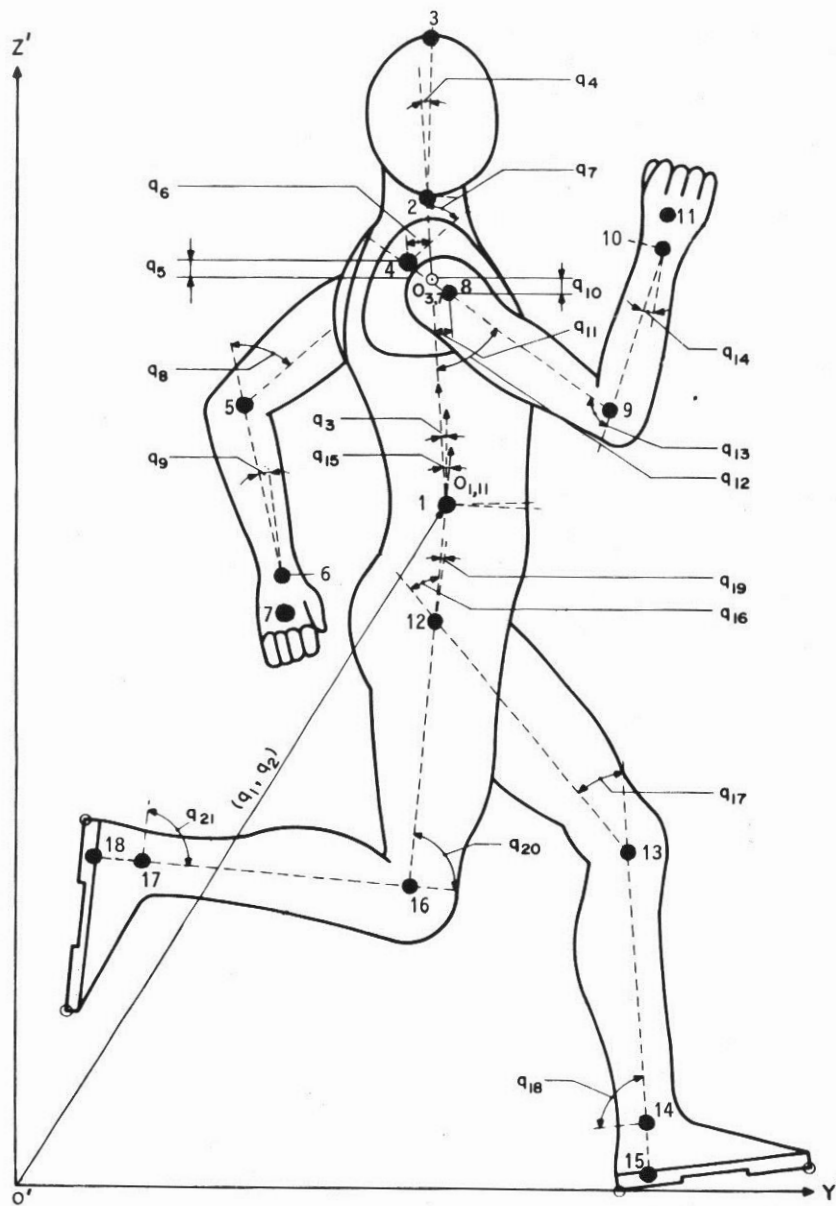


$$\omega = \sqrt{\frac{mg s}{J_A}} = 2\pi f$$

Kreisfrequenz $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ Schwingfrequenz $\left[\frac{1}{\text{s}}\right] = [\text{Hz}]$

$J_A^* = J_A + mL^2$
M, L variieren
↳ mehrere Datensätze
↳ Ausgleichrechnung
(kleinste Fehlerquadrate)

Ganganalyse



Schema für die Anbringung der 18 Segmentmarkierungen für die 2D-Analyse.
Definition der 21 verallgemeinerten Koordinaten $q_1, \dots, q_{21}$. (Hatze, 1986)

2.2 Kinematik von Starrkörpersystemen

Montag, 19. November 2018 12:10

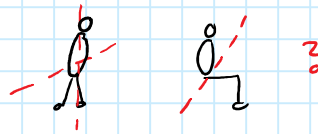
Lage und Orientierung von Koordinatensystemen

- Fixpunkte (fixierte Körper $\equiv$ Inertialsystem)
- beliebig bewegte Punkte $\rightarrow$ mitbewegtes KOS
- körperfeste Punkte
 - * Schwerpunkt CM, S
 - * Gelenkpunkte
 - ...

Menschlicher Körper kein Starrkörper

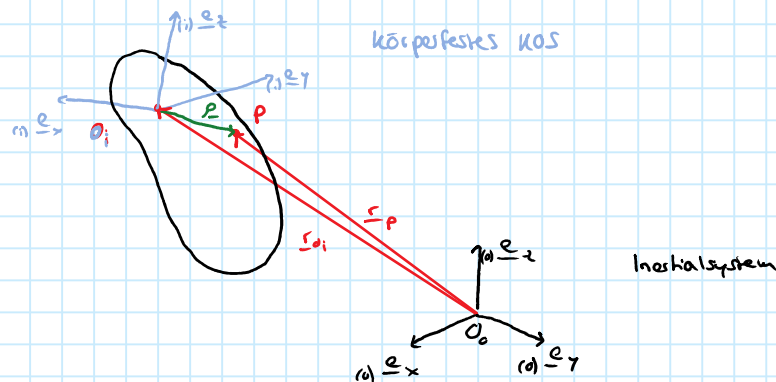
$\rightarrow$ aufteilen in Starrkörpersegmente (Modell)

- repräsentative Punkte: CM..., Gelenkpunkte der Segmente $\rightarrow$ mitbewegtes KOS
- repräsentative Achsen



$\Rightarrow$ Beschreibung der Translation und der Rotation der einzelnen Körpersegmente

allgemein: Körper i



Definition

Ortsvektor
Geschwindigkeitsvektoren
Beschleunigungsvektoren
Verschiebungsvektoren
Kräfte / Momente

Darstellung ist in jedem beliebigen KOS möglich

$$\text{z.B.} \quad \underline{r}_P = \underbrace{x_{P(0)}}_{\text{Komponenten}} \underline{e}_x + \underbrace{y_{P(0)}}_{\text{Komponenten}} \underline{e}_y + \underbrace{z_{P(0)}}_{\text{Komponenten}} \underline{e}_z = \underbrace{(0)}_{\substack{\text{Koordina-} \\ \text{ten wird oft} \\ \text{weggelassen}}} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_P = u_{(i)} \underline{e}_x + v_{(i)} \underline{e}_y + w_{(i)} \underline{e}_z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{(i)}$$

Zusammenhang zwischen den Koordinaten in (0) und (i)
 $\rightarrow$ TRANSFORMATIONSMATRIX



Vektoren und Koordinatensysteme

1) Koordinatensystem und Darstellung eines Vektors

Zur Darstellung von Vektoren sollen rechtshändige, kartesische Koordinatensysteme mit orthogonalen Einsektoren verwendet werden. Das Koordinatensystem $\{O, x, y, z\}$ mit dem Ursprung O und den Einsektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ wird zur Abkürzung durch den Buchstaben K gekennzeichnet. Ebenso heißt das Koordinatensystem $\{O', x', y', z'\}$ kurz K' .

Ein Vektor $\mathbf{a}$ kann in einem Koordinatensystem K durch seine Koordinaten a_x, a_y, a_z dargestellt werden. Dabei muss genau unterschieden werden zwischen dem Vektor in seiner eigentlichen physikalischen Bedeutung und dem Tripel seiner Koordinaten. Falls mehrere Koordinatensysteme K, K' verwendet werden, schreibt man in $\mathbf{a}_K$ bzw. $\mathbf{a}_{K'}$ die Koordinaten in K bzw. K' .

$$\mathbf{a}_K = [a_x, a_y, a_z],$$

$$\mathbf{a}_{K'} = [a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}].$$

Nur wenn keine Verwechslungen möglich sind, werden die Indizes K, K' weggelassen.

2) Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix $\mathbf{C}_{KK'}$, auch Drehungsmatrix oder Matrix der Richtungskosinusse genannt, definiert die Verdrehung von K' relativ zu K . Eine Verschiebung des Ursprungs O' gegenüber O hat dabei keinen Einfluss. Zur Berechnung von $\mathbf{C}_{KK'}$ verschiebt man die Koordinatensysteme so, dass ihre Ursprungspunkte zusammenfallen. Die Spalten von $\mathbf{C}_{KK'}$ entsprechen den Koordinaten der Einsektoren $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$ in K . Es ist

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} | & | & | \\ \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{z'} \end{matrix}$

(Die Winkel sind jeweils zwischen den positiven Achsen zu nehmen).

Entsprechendes gilt für $\mathbf{C}_{K'K}$, wobei $\mathbf{C}_{K'K} = \mathbf{C}_{KK'}^T$ ist. Der Kürze halber wird gelegentlich nur $\mathbf{C}$ für $\mathbf{C}_{KK'}$ geschrieben. Die Transformationsmatrix ist stets orthogonal, das heißt

$$\mathbf{C}_{KK'}^{-1} = \mathbf{C}_{KK'}^T \text{ oder } \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{KK'}^T = \mathbf{E} \text{ und es gilt } \det \mathbf{C}_{KK'} = 1.$$

3) Transformation von Vektorkoordinaten

Die Matrizen $\mathbf{C}_{KK'}$, $\mathbf{C}_{K'K}$ vermitteln die Transformation zwischen den Darstellungen $\mathbf{a}_{K'}$ und $\mathbf{a}_K$ eines Vektors $\mathbf{a}$ in K' und K . Die Transformationsformeln lauten:

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{C}_{KK'} \mathbf{a}_{K'} \quad \mathbf{a}_{K'} = \mathbf{C}_{K'K} \mathbf{a}_K$$

Dominoregel

4) Transformation von Tensorkoordinaten

Die Matrizen $\mathbf{C}_{KK'}$, $\mathbf{C}_{K'K}$ vermitteln die Transformation zwischen den Darstellungen $\mathbf{A}_{K'}$ und $\mathbf{A}_K$ eines Tensors $\mathbf{A}$ in K' und K . Die Transformationsformeln lauten:

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{C}_{KK'} \mathbf{A}_{K'} \mathbf{C}_{K'K}, \quad \mathbf{A}_{K'} = \mathbf{C}_{K'K} \mathbf{A}_K \mathbf{C}_{KK'}$$

> A3.1

Es gilt

$$\underline{r}_p = \underline{r}_{oi} + \underline{p}$$

Zum Rechnen, müssen alle Vektoren
im selben KOS dargestellt werden!

z.B. in (0)

$$\boxed{{}_{(0)}\underline{r}_p = {}_{(0)}\underline{r}_{oi} + \overset{\text{Transformationsmatrix}}{\underline{C}_{oi(i)}} \underline{p}} \quad \text{inhomogene Transformationen}$$

in (i)

$$\begin{aligned} {}_{(i)}\underline{p} &= \underbrace{\underline{C}_{oi}^T}_{=\underline{C}_{io}} ({}_{(0)}\underline{r}_p - {}_{(0)}\underline{r}_{oi}) \end{aligned}$$

⇒ Transformation beschreiben

- Rotation zusammengesetzte Ordnungen durch Hintereinanderschalten von Elementardrehungen

z.B. KARDAN ↙

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. Rotation um x-Achse | 1 |
| 2. Rotation um „ <u>neue</u> y-Achse“ | 2 |
| 3. Rotation um „ <u>neue</u> z-Achse“ | 3 |

EULER ↙

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Rotation um z-Achse | 3 |
| 2. Rotation um „neue x-Achse“ | 1 |
| 3. Rotation um „neue z-Achse“ | 3 |

zu 2.2

Montag, 26. November 2018

11:28

Geschwindigkeiten:

1. Definition: zeitliche Änderung
- des Ortes $\Rightarrow$ Translationsgeschwindigkeit
 - der Orientierung $\Rightarrow$ Rotationsgeschwindigkeit

z.B. zeitliche Änderung des Ortsvektors
 $\rightarrow$ Geschwindigkeitsvektor

?? "Änderung gegen was" ??

- z.B.
- Änderung gegen Inertialsystem $\Rightarrow$ Absolutgeschwindigkeit
 - Änderung gegen bewegtes KOS $\Rightarrow$ Relativgeschwindigkeit

2. Darstellung

.. in jedem beliebigen KOS möglich

(also auch: Änderung gegen das Inertialsystem (= Absolutgeschw.) darstellbar im anderen KOS

z.B. körperfestes KOS) $\Rightarrow$ Transformation der Koordinaten

3. Rechnerische Ausführung

a) Nur Inertialsystem I (i)

- $\Rightarrow$ Einfache Rechenoperationen
- alle Vektoren sind in I
 - Änderung gegen I (Absolutgeschw.)

|| Berechnung: Ableitung der Koordinaten ||

b) mehrere KOS (i) und (j)

- Änderung von $(i)_r$ gegenüber (i): $(i)_r = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$

Änderung gegen (i) $\Rightarrow$ Relativgeschw. gegenüber (i)
Ableiten der Koordinaten

Speziell: sei (i) ein Inertialsystem
 $\rightarrow (i)_r \hat{=} \text{Absolutgeschw. in (i)}$

- Änderung $(j)_r$ gegenüber (j)

Ableiten der Koordinaten $(j)_r = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$ Relativgeschw. gegen (j)

Beispiel: gegeben sei (j), (i) sei Inertialsystem

gesucht ist Absolutgeschw. in bewegtem KOS (j)

Transformation nach (i):

$$(i)_r = \underline{\underline{C}}_{ij} (j)_r \quad (i) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}_{ij} (j) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

Ableiten:

$${}^{(i)}\dot{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\dot{\underline{C}}_{ji}}_{\text{Relativgeschw. in } (i)} \underline{r} + \underbrace{\underline{C}_{ji}}_{\text{Relativgeschw. gegenüber } (j) / \text{ in } (j)} \dot{\underline{r}}$$

Erweitern $\underline{E} = \underline{C}_{ji} \underline{C}_{ji}^T$

↳ $\dot{\underline{C}}_{ji} \underline{C}_{ji} \underline{C}_{ji}^T$

damit wird $\underbrace{\dot{\underline{C}}_{ji} \underline{C}_{ji}}_{\tilde{\underline{\omega}}_i} \cdot \underbrace{\underline{C}_{ji} \underline{r}}_{{}^{(i)}\underline{r}}$

$\tilde{\underline{\omega}}$: schiefsymmetrische Matrix der Drehgeschwindigkeiten

$$\tilde{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

${}^{(i)}\underline{v} = \tilde{\underline{\omega}} {}^{(i)}\underline{r} + \underline{v}_{\text{rel}}$

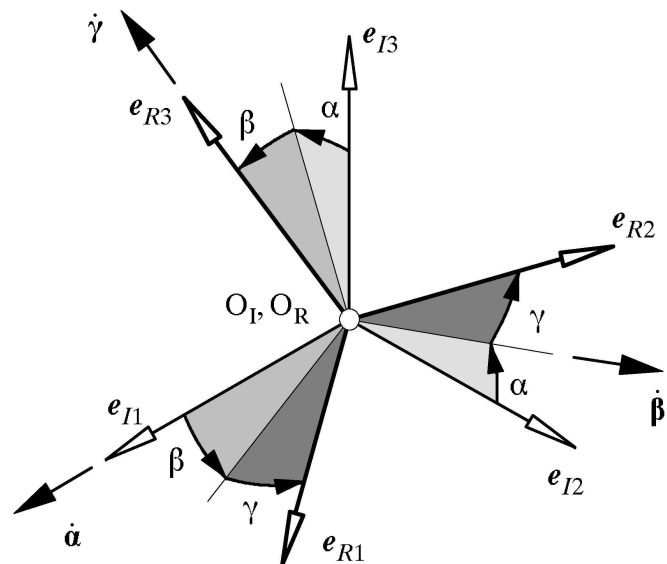
Kreuzprodukt in Matrixschreibweise ($\underline{\omega} \times \underline{r}$)

Euler- und Kardan-Winkel

Führt ein Körper nur Rotationen um einen festen Punkt aus, so genügen zur eindeutigen Lagebeschreibung des Körpers drei voneinander unabhängige Winkel. Fallen beispielsweise das Inertialsystem $\{O_I, \mathbf{e}_{I1}, \mathbf{e}_{I2}, \mathbf{e}_{I3}\}$ und das körperfeste Koordinatensystem $\{O_R, \mathbf{e}_{R1}, \mathbf{e}_{R2}, \mathbf{e}_{R3}\}$ zunächst zusammen, so kann eine allgemeine Drehung als Hintereinanderschaltung von elementaren Drehungen um Achsen des körperfesten Systems aufgefasst werden. Die endliche Drehung wird dabei durch eine Drehmatrix gekennzeichnet. Den Vektor der Winkelgeschwindigkeit erhält man entweder durch Differenzieren der Drehmatrix oder durch Addieren der Winkelgeschwindigkeitskomponenten der elementaren Drehungen, wobei aber die entsprechenden Koordinatentransformationen zu beachten sind.

Kardan-Winkel

Dreht man der Reihe nach um die momentanen Achsen des körperfesten Systems, so heißen die zugehörigen Drehwinkel KARDAN-WINKEL und werden mit α, β, γ bezeichnet. Zu beachten ist, dass die Elementardrehungen nacheinander um die Achsen desjenigen Systems erfolgen, das durch die vorhergegangenen Drehungen entstanden ist.



Die zugehörige Drehmatrix hat die Form

Elementardrehung um

1. Achse

2. Achse

3. Achse

3 Elementardrehungen

$$S = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Im Inertialsystem $\{O_I, \mathbf{e}_{I1}, \mathbf{e}_{I2}, \mathbf{e}_{I3}\}$ lautet der Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

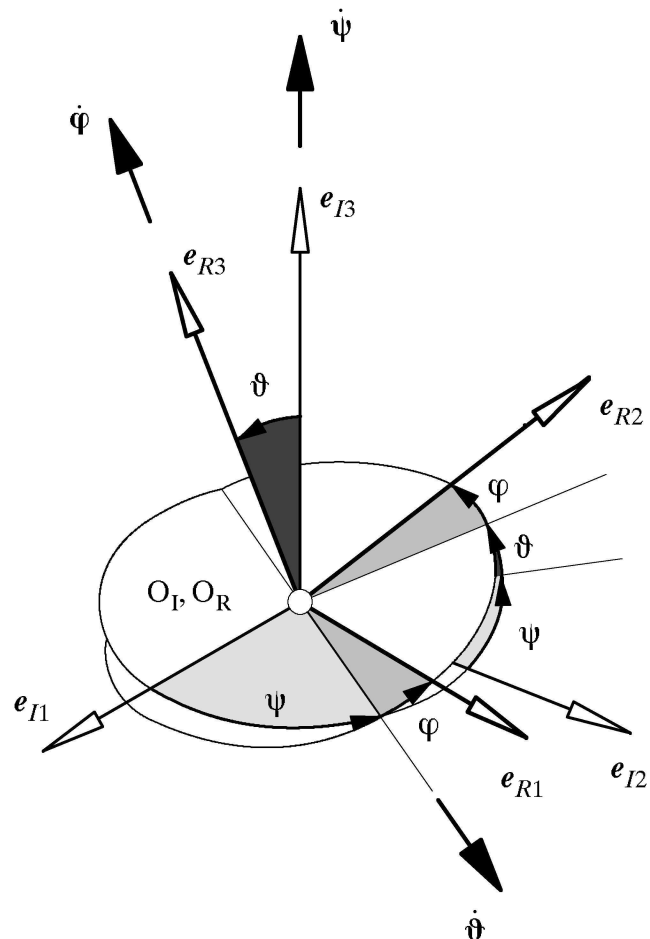
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Jacobi-Matrix

Elementardrehgeschwindigkeitsvektoren

Euler-Winkel

Führt man dagegen die Elementardrehungen so aus, dass sie nacheinander um die momentanen Achsen des körperfesten Systems erfolgen, so heißen die Drehwinkel EULER-WINKEL und werden mit ψ , ϑ , ϕ bezeichnet.





Die entsprechende Drehmatrix lautet

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \phi & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \phi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \cos \phi & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

und der Winkelgeschwindigkeitsvektor hat im Inertialsystem $\{O_I, \mathbf{e}_{I1}, \mathbf{e}_{I2}, \mathbf{e}_{I3}\}$ die Form

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \vartheta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ 1 & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

Drehreihenfolge beachten

*Reihenfolge der Elementardrehungen wichtig!
(Matrix-Multiplikation nicht kommutativ)*

Die EULER-WINKEL benutzt man hauptsächlich in der Kreiseltheorie, während für technische Probleme und in der Luftfahrt meist KARDAN-WINKEL verwendet werden. Manchmal ist auch ein Wechsel der Beschreibungsart notwendig, um Singularitäten zu vermeiden und die Eindeutigkeit der Beschreibung zu gewährleisten.

2.2.1 Homogene Koordinaten, Struktur von MKS

Montag, 26. November 2018

12:30

Es war $(i) \underline{r}_p = \underbrace{(i) \underline{r}_{o_i}}_{\text{transl. Anteil}} + \underbrace{\underline{C}_{o_i} (i) p}_{\text{rotat. Anteil}}$ inhomogene Transformation

$(3 \times 1) \quad (3 \times 1) \quad (3 \times 3) (3 \times 1)$

beide Anteile lassen sich in einer (4×4) -Matrix ${}_{o_i} \underline{T}$ zusammenfassen

↳ homogene Koordinaten

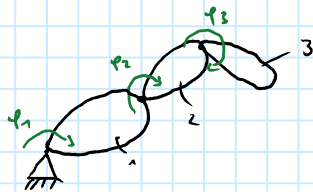
↳ homogene Transformation

↳ Roboterdynamik

Strukturen von Mehrkörpersystemen

Zahl $f \equiv \text{FHG}$ wichtig!

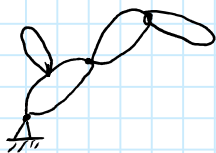
• Kettenstruktur



z.B. Ebene: jedes Gelenk hat einen Dreifreiheitsgrad

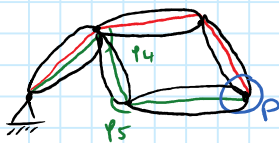
$\Rightarrow$ 3 völlig. Koord. $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \Rightarrow f=3$

• Baumstruktur, verzweigte Ketten



$f=4$

• MKS mit Schleifen



2 "Pfade" möglich

$\rightarrow$ Gelenk- ϕ sind nicht mehr komplett unabhängig

zur Berechnung: Auftrennen der Schleife

$\Downarrow$
Baumstruktur + algebraische Schließbedingungen

$\Rightarrow$ Zwangsbedingungen

hier: $\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3$
 $\phi_4 \quad \phi_5$

2 Zwangsbedingungen in P

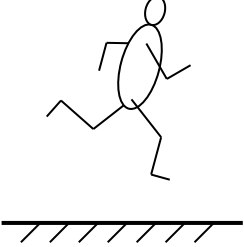
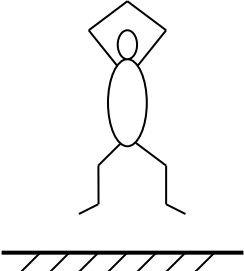
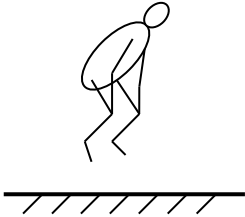
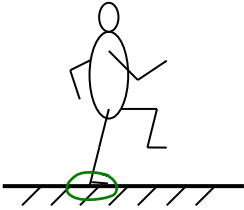
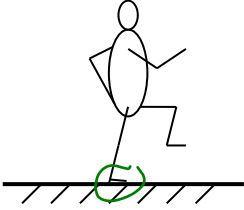
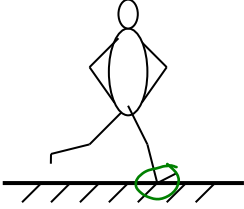
$f=5-2=3$ Freiheitsgrade

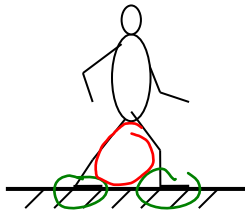
alternativ: nicht aufgetrennt

z.B. $\phi_1 \phi_2 \phi_3$ alle Körper sind festgelegt

$\Rightarrow f=3$

Körperkonfigurationen

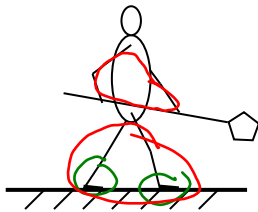
		Fixpunkte	Schleifen
	Rennen; Hüpfen	0	0
	Tauchen; Turmspringen; Händeklatschen	0	1
	Hände auf den Knien beim Salto	0	2
⇒ Starrkörperfreiheitsgrad (Null eigenwert)			
	Gehen	1	0
	Gehen, Rennen mit Hand in Hüfte	1	1
	beide Hände in Hüfte; Eislauf	1	2



Gehen
beide Füße
am Boden;
Skaten

2

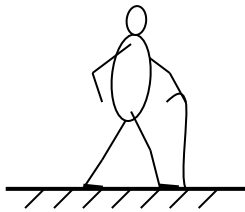
1



Golf;
Schaufeln

2

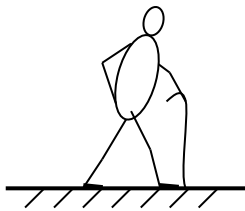
2



Gehen
mit Stock;
Graben mit Schaufel

3

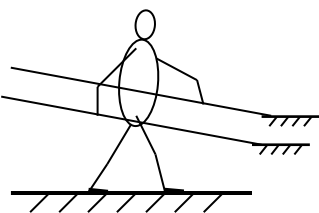
2



Gehen mit
Stock und
Hüftstütze

3

3



Gehen
an
2 Geländern

4

3

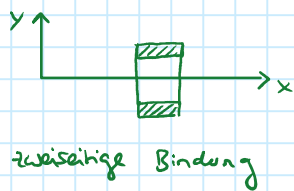
Systeme sind strukturvariabel in Laufe der Zeit

Freiheitsgrade

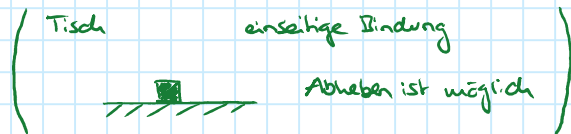
- Zahl f
- 1 freier Körper : $f = 6$ (3 Trans. + 3 Rotat.)
 - n freie Körper : $f = n \cdot 6$

Bindungen : schränken Bewegungsmöglichkeiten ein

- q holonome Bindungen schränken Lage und Geschwindigkeit ein

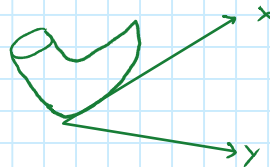


$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \\ z &= 0 \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}$$



- nicht-holonome Bindungen schränken nur Geschwindigkeit ein

z.B. Schlittschuh
rollendes Rad



- keine Geschwindigkeit
quer Kufe

- alle Orte auch quer zur Kufe erreichbar

Holonome Systeme

$$f = 6n - q$$

f vorgegebene Koordinaten notwendig zur eindeutigen Beschreibung von Lage und Orientierung.

$\Rightarrow$ Vektor der vorgeg. Koordinaten q_i :

$$\underline{q} \quad (f \times 1)$$

q_i sind frei wählbar, linear unabhängig

2.2.2 Inverse Kinematik

Montag, 3. Dezember 2018 11:53

allg. Raumkoordinaten Ortsvektoren z.B. kartesische Koord. x_i, y_i, z_i
Drehmatrizen z.B. Kardan $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

Lagevektor (freies Körper i)

$$\underline{z}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ \alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i]^T \quad (6 \times 1)$$

n freie Körper:

$$\underline{Z} = [\underline{z}_1^T \ \underline{z}_2^T \ \dots \ \underline{z}_n^T]^T \quad (6n \times n)$$

• völlig. Koord. (gebundene Körper)

$\underline{q}$ $(f \times 1)$ Lagevektor des gebundenen Systems

Raumkoord. $\longleftrightarrow$ völlig. Koord

$$\underline{z} = \underline{f}(\underline{q})$$

i.a. nichtlineare Vektorfunktion

VORWÄRTSKinematik

RÜCKWÄRTSKinematik (inverse Kinematik)

$$\underline{q} = \underline{f}^{-1}(\underline{z})$$

• eindeutig lösbar, wenn $\underline{z}$ vollständig bekannt ist

• Relevante Frage ist:

gegeben seien Bahnen von Körperpunkten (Hüfte, Fuß, Hand, ...)

wie sind die zugehörigen Gelenke $\&$

$\Rightarrow$ nicht eindeutig lösbar



2.3 Kinetik

Montag, 3. Dezember 2018

12:14

Körper :

Newton : $m_i(o) \underline{a}_i = (o) \underline{f}_i$

Euler : $(o) \underline{I} \cdot \underline{\dot{\omega}}_i + (o) \underline{\tilde{\omega}}_i (o) \underline{I} \cdot \underline{\omega}_i = (o) \underline{L}_i$

bzgl. Schwerpunkt S'

↳ gleiche Form in (o) und in (i) (körperfestes KS)

rechte Seite aufspalten :

eingeprägte "Kräfte" $\underline{f}^e, \underline{L}^e$

zwangs "Kräfte"
(Reaktionskräfte) $\underline{f}', \underline{L}'$

(leisten keine Arbeit während der Bewegung)

> A5

Biomechanik :

- Kräfte und Momente kommen aus Zugkräften der Bänder und Muskeln
- An einem Gelenk oder Element sind meist mehrere Muskeln beteiligt, die teilweise auch gegeneinander arbeiten können
 - ↳ Koordination notwendig (neg. Beispiel: Spastiker)
 - ↳ Bewegungen können "gesperst" werden durch Muskelaktivität (evtl. tritt innere Arbeit auf)

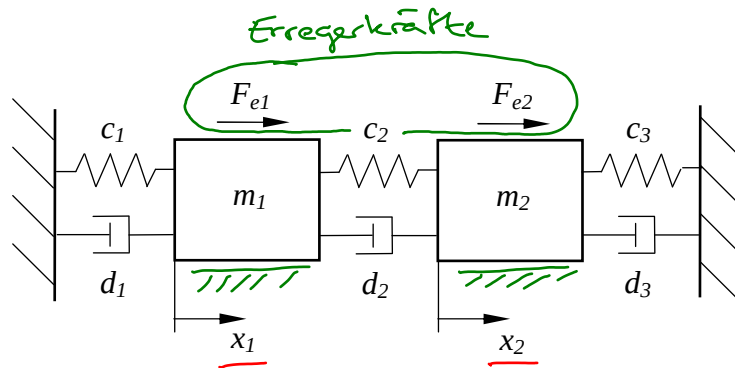
2.3.1 Inverse Kinetik

Aufg. Aus vorgegebener Bewegung die eingepprägten Kräfte bestimmen

Problematik in der Biomechanik

- kinematische Überbestimmtheit (überzählige Freiheitsgrade)
- überzählige Muskeln

Beispiel: Geradlinige Bewegung eines Zweimassenschwingers



$f=2$
Zwei Koordinaten x_1 und x_2 zur Beschreibung der Bewegung

Kinematik

Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage: x_1, x_2

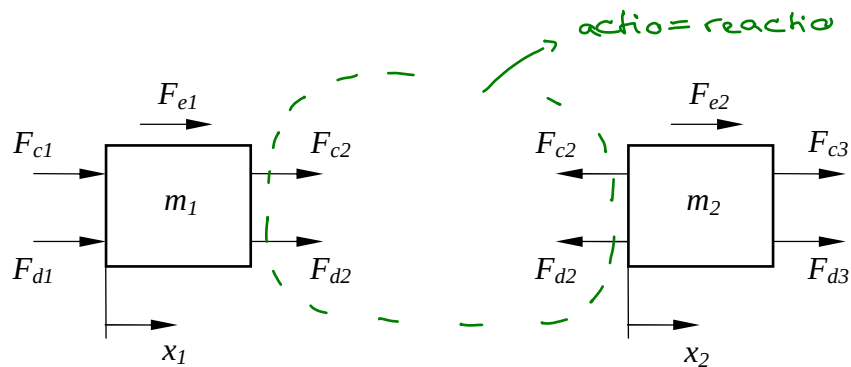
Freiheitsgrad $f=2$

Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y}$ wählen, z.B.

$$\mathbf{y} = [x_1 \quad x_2]^T \text{ oder } \mathbf{y} = [x_1 \quad x_2 - x_1]^T$$

hier: $\mathbf{y} = [x_1 \quad x_2]^T$

Freischneiden



Federkräfte:

$$F_{c1} = -c_1 x_1$$

$$F_{c2} = c_2 (x_2 - x_1)$$

$$F_{c3} = -c_3 x_2$$

Federn ohne Verspannung

Dämpferkräfte:

$$F_{d1} = -d_1 \dot{x}_1$$

$$F_{d2} = d_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$F_{d3} = -d_3 \dot{x}_2$$

Erregerkräfte F_{e1}, F_{e2}



Impulssatz (Newtonsche Gleichung)

Masse m_1

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) - d_1 \dot{x}_1 + d_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_{e1}$$

Masse m_2

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1) - c_3 x_2 - d_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - d_3 \dot{x}_2 + F_{e2}$$

KINETIK

> keine Energiegleichungen,
da Massepunkte

gekoppelte Gleichungen

• „Stapeln“: unterinanderschreiben
von Newton und Euler für
jeden einzelnen Körper

Bewegungsgleichung in Matrizenform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 + d_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

• Übergang zu verallg.
Koordinaten

Erregungskräfte

↳ Vektor d. verallg. Koordinaten

Eigenfrequenzen des Systems ($F_{e1} = F_{e2} = 0$)

Ansatz: $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} e^{\lambda t}$, $\lambda = \sigma \pm i\omega$

→ Eigenwertaufgabe: $(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}) \cdot \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$

↳ Steifigkeitsmatrix

↳ Dämpfungsmatrix

↳ Massenmatrix

Lösung $\tilde{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, wenn $\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}) = 0$ (charakteristisches Polynom)

⇒ Bewegungsgleichung

Spezialfall ungedämpftes System ($d_i = 0$)

charakteristisches Polynom: $\lambda^4 + \left(\frac{c_2 + c_3}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) \lambda^2 + \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{m_1 m_2} = 0$

Lösungen des charakteristischen Polynoms: $\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \sigma_2 \pm i\omega_2$

hier $\sigma_{1,2} = 0$ (ungedämpft):

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{m_1(c_2 + c_3) + m_2(c_1 + c_2) - \sqrt{((c_2 + c_3)m_1 + (c_1 + c_2)m_2)^2 - 4m_1 m_2(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)}}{2m_1 m_2}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{m_1(c_2 + c_3) + m_2(c_1 + c_2) + \sqrt{((c_2 + c_3)m_1 + (c_1 + c_2)m_2)^2 - 4m_1 m_2(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)}}{2m_1 m_2}}$$

Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 (Kreisfrequenzen in rad/s) aus Imaginärteil

Schwingungsfrequenz in Hertz (Hz = 1/s): $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \omega_{1,2}$

Die zu den Eigenfrequenzen gehörigen Schwingungsformen ergeben sich aus den Eigenvektoren (Lösungen der obigen Eigenwertaufgabe).

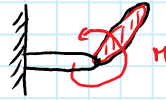
2.4 Antrieb in den Gelenken

Montag, 3. Dezember 2018 12:57

zwei unterschiedliche Modellierungsvarianten:

1) pro Drehfreiheitsgrad ein eingprägtes Moment

idealisierte Vorstellung



→ geeignet für Untersuchung der Gesamtbewegung

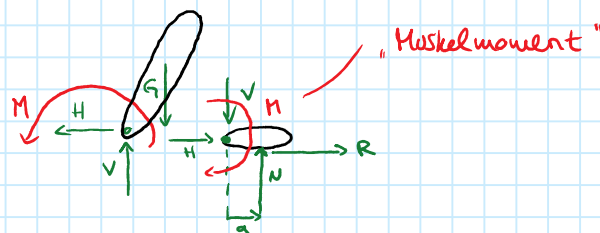
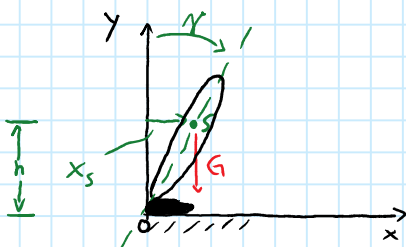
2) Kräfte aus den Muskeln gemäß der Anatomie

- Anzahl der Muskeln
- geometrische Anordnung

2.4.1 Einzelmoment pro "Drehfreiheitsgrad"

AUFRABE	SYSTEM..	.. OHNE Schließen	.. MIT Schließen
vorwärts Kinematik		bei gegebenen Gelenk $\dot{\varphi}$ ist die Bewegung eindeutig bestimmbar	ebenso
vorwärts Kinetik		bei vorgegebenen Momenten ist Bewegung eindeutig bestimmbar	ebenso
rückwärts Kinematik		Gelenk $\dot{\varphi}$ bei vorgegebenen Endpunktbedingungen <u>nicht</u> eindeutig bestimmbar	ebenso
rückwärts Kinetik		Momente bei vorgegebener Bewegung bestimmbar	Momente <u>nicht</u> eindeutig bestimmbar

Beispiel ①: Aufrechtes System in der Sagitalebene (1 Freiheitsgrad)



Fuß: $\sum F_x = 0 : H + R = 0$

$\sum F_y = 0 : V - N = 0$

$\sum M = 0 : M - N \cdot a = 0$

KÖRPER: z.B. y als veralg. Koord.

↳ kinematische Beziehung $x_s = h \sin y$

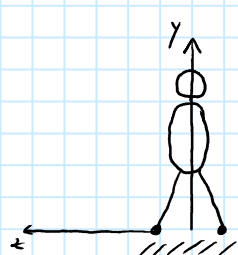
kleine Bewegungen um $y = 0 : \sin y \approx y$
 $\cos y \approx 1$

Impulssatz, Drallsatz ... $\rightarrow I_0 \ddot{y} - G h y = -G a$ oder $I_0 \frac{\ddot{x}_s}{h} - G x_s = -M$

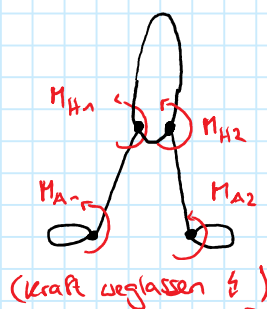
Fazit: System ohne Schleife

↳ M aus vorgegebener Bewegung bestimmbar

Beispiel 2: Aufrechtes System in der Frontalebene



Modell 1
MIT Füßen



Modell 2
OHNE Füße



Hüfte

Springgelenk

Freischnitten, Lagerreaktionen
 Muskelmomente

Impulssatz
 Drallsatz

für jeden einzelnen Körper

↳ Bewegungsgleichung

- Fazit:
- beide Systeme enthalten eine Schleife
 - Bei Modell 1 kann die Bewegung durch jedes der 4 "Gelenkmomente" beeinflusst werden
 - Bei Modell 2 kann die Bewegung durch jedes der 2 "Gelenkmomente" bestimmt werden
 - Sind die Momente bekannt, dann kann die Bewegung berechnet werden
 - umgekehrt: Bei bekannter Bewegung können die Momente nicht eindeutig bestimmt werden
 überbestimmtes System

HINWEIS: der menschliche Körper hat sehr viel mehr Freiheitsgrade

- ↳ mehrere "Gelenkmomente" ("Muskelmomente") sind zur Stabilisierung notwendig
- es gibt "gesperre" Gelenke durch Muskelaktivität

Diskussion der Bewegungsgleichung Beispiel 1

$$\frac{I_0}{h} \ddot{x}_s - G x_s = -\frac{M a}{h}$$

a) Messung: Aufstandskraft über Messplattform bestimmen

Einzelzellen z.B. $5 \times 5 \text{ mm}$



kapazitiv, induktiv ... → Änderung des Widerstands → Maß für Kraft

Aus Signalen der Einzelzellen

- Gelenkkraft N
- Aufstandspunkt, Abstand a

b) statisches Gleichgewicht

$\ddot{x}_s = \dot{x}_s = 0$ z.B. Aufstandspunkt und Schwerpunkt liegen auf einer Senkrechten $x_{s0} = a$

c) dynamisches Gleichgewicht

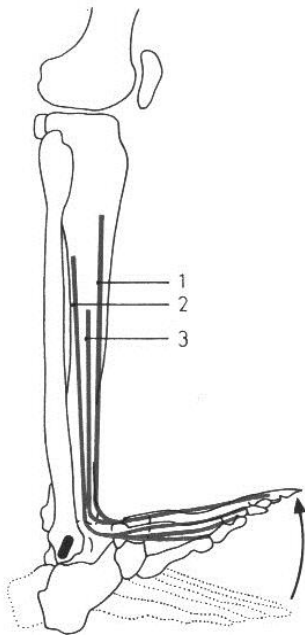
z.B. Normalform $\ddot{x}_s - G \frac{h}{I_0} x_s = -\frac{G h}{I_0} a$

Gleichgewicht: $0 \leq a \leq 1$

instabil für: $M = 0$

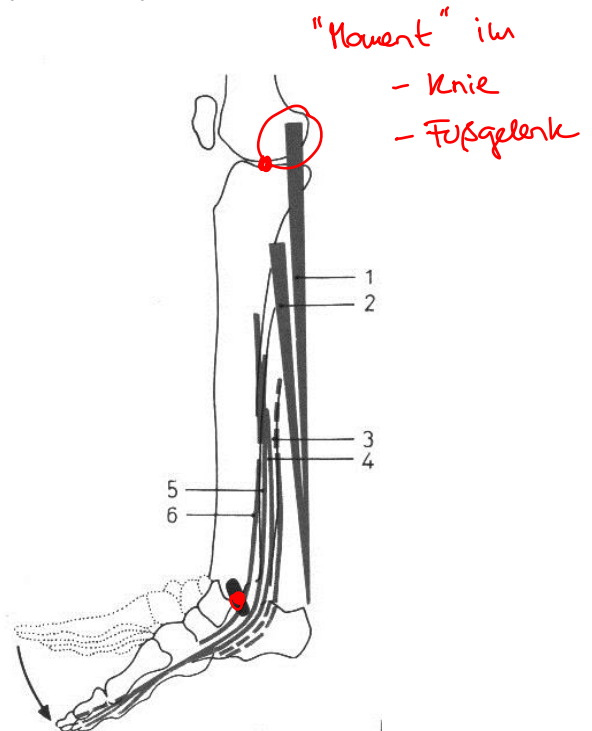
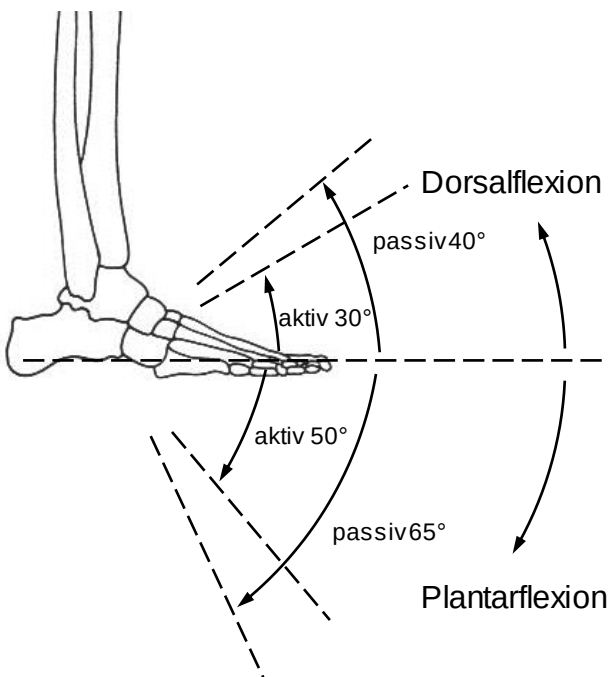
↳ Stabilisierung durch Moment M ("Muskelmoment") möglich

Bewegungen im oberen Sprunggelenk (Tittel, 1994)



Dorsalflexion:

- 1: M. tibialis anterior
(vorderer Schienbeinmuskel)
- 2: M. extensor digitorum longus
(langer Zehenstrecker)
- 3: M. extensor hallucis longus
(langer Großzehenstrecker)



Plantarflexion

- 1: M. gastrocnemius
(Zwillingswadenmuskel)
 - 2: M. soleus
(Schollenmuskel)
 - 3: M. peroneus longus
(langer Wadenbeinmuskel)
 - M. peroneus brevis
(kurzer Wadenbeinmuskel)
 - 4: M. flexor hallucis longus
(langer Großzehenbeuger)
 - 5: M. flexor digitorum longus
(langer Zehenbeuger)
 - 6: M. tibialis posterior
(hinterer Schienbeinmuskel)
- M. triceps surae

mehrere Muskelgruppen/
Muskelzüge beteiligt

Für sinnvolle Bewegungsabläufe sind die beteiligten Muskelzüge zu koordinieren, sonst

- hohe Gelenkkräfte (Kontaktkräfte)
- hohe Muskelkräfte
- hoher Energieverbrauch

2.4.2 Kräfte der Muskeln gemäß Anatomie

Montag, 10. Dezember 2018

12:45

genaue Kenntnis der an der Bewegung beteiligten Muskeln notwendig

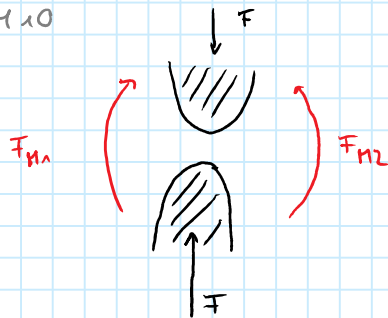
- Muskeln können nur Ziehkraft ausüben

- an jeder Bewegung sind mindestens 2 Muskeln beteiligt (Beuger (Agonist) & Strecken (Antagonist))

Muskeln können über mehrere Gelenke hinweg wirken

z.B. Kräfte für Momente in mehreren Gelenken

> H10



Last I

- Muskelkräfte

$F_{M1} = F_{M2} = 0$: System ist instabil

$F_{M1} \neq F_{M2} \neq 0$: Gelenk beweglich

(Hausaufgabe A6)

Gelenkkräfte (Belastung des Gelenks) nicht eindeutig bestimmbar

z.B. Kontaktkraft im Gelenk nicht eindeutig bestimmbar

→ gemittelte Spannung $\bar{\sigma} = \frac{F + F_{M1} + F_{M2}}{A}$

03. GELENKE

Montag, 17. Dezember 2018

11:29

Biomechanik : große Unterschiede zu technischen Gelenken

- kinematik komplexer
- "nicht ideale" Gelenke

Unterscheidung

Fibrose Gelenke : verbinden Knochen mittels Gewebe

- für Stabilisierung
- lassen keine oder sehr kleine Bewegungen zu (Schädeldecke, Schienbein / Unterschenkel)

Korpelige Gelenke : verbinden Knochen mittels Knorpel

- zur Stabilisierung
- lassen geringe Bewegungen zu (Rippenbereich, Wirbelsäule)

Synoviale Gelenke : verbinden Knochen mittels Bänder

- dienen der Bewegung
- große Rotationen, kleine Translationen (Knie, Hüfte ...)

Aufbau synovialer Gelenke

- Knochen
- knorpelige Gelenkshale
- Bänder
- Muskeln

> 11.3.2

Mechanische Beschreibung

Starrkörpermechanik :
- Zahl der Freiheitsgrade (abhängig von Fragestellung) ?
- sind Kräfte berechenbar (abschätzbar) ?

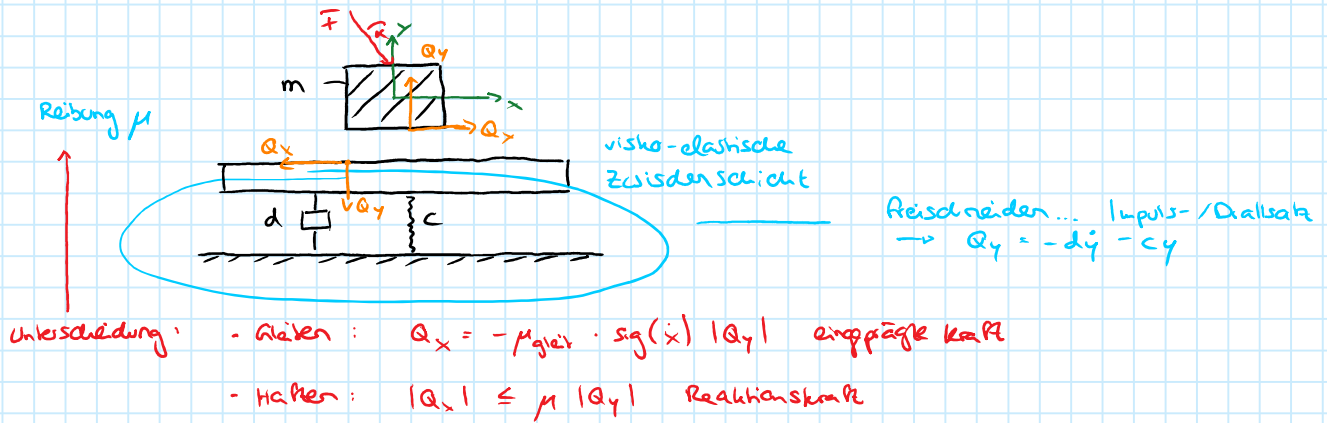
hängen ab :
* Muskelkräfte
* spezifische Form des Gelenks

können ein Vielfaches der statischen Lasten sein

=> Bänder- und Muskelkräfte sind mit einzubeziehen

Gelenke sind meistens "nichtideal" im Sinne der Mechanik

- a) geometrisch : Oberflächen sind meistens nicht konkurrenz (Punkt- und Linienberührung)
oft ist Rotation und Translation vermisch
- b) nachgiebig : elastische Gelenkschalen
- c) verschiebungsbehaftet : in der Biomechanik untergeordnet



> H 9.1



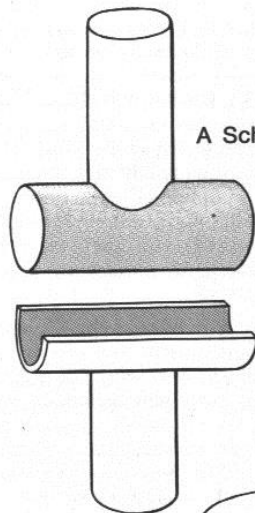
Literatur: oft sehr grob vereinfacht

Gelenke

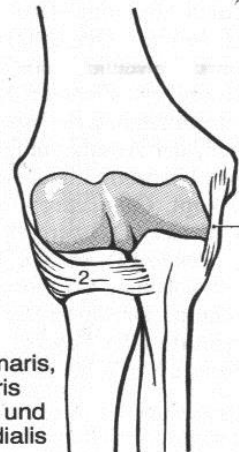
Zahl der Freiheitsgrade (vereinfacht)

(Speckmann, Wittkowski; Platzer 1991)

$f = 1$



A Scharniergelenk (Schema)



B Articulatio cubiti mit
Articulatio humero-ulnaris,
Articulatio radio-ulnaris
proximalis und
Articulatio humeroradialis

$f = 2$

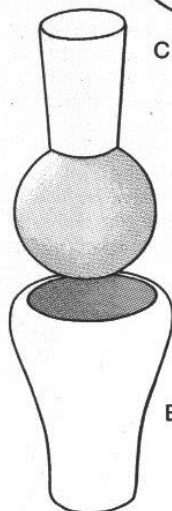


C Sattelgelenk (Schema)

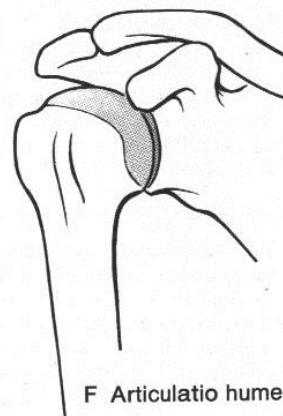


D Articulatio carpometacarpalis pollicis

$f = 3$



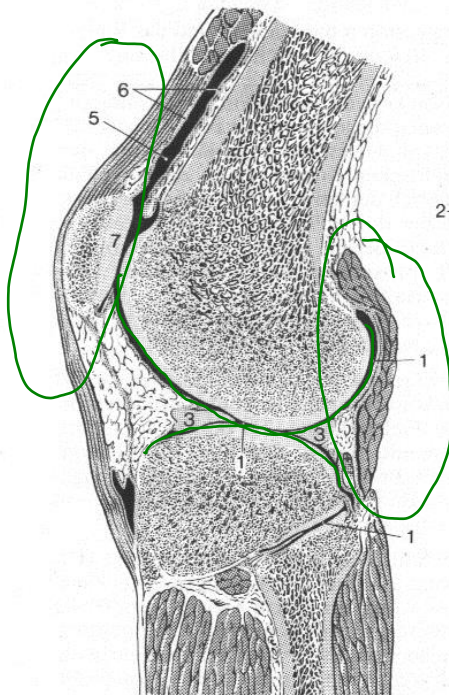
E Kugelgelenk (Schema)



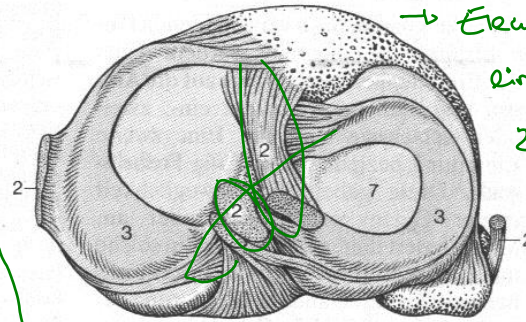
F Articulatio humeri

z.B. Knie

=> 2 konvexe Oberflächen
-> Bänder zur Stabilisierung
-> Elemente stark miteinander verschoppelt
2x komplexe Wechselwirkung



A Kniegelenk im Schnitt

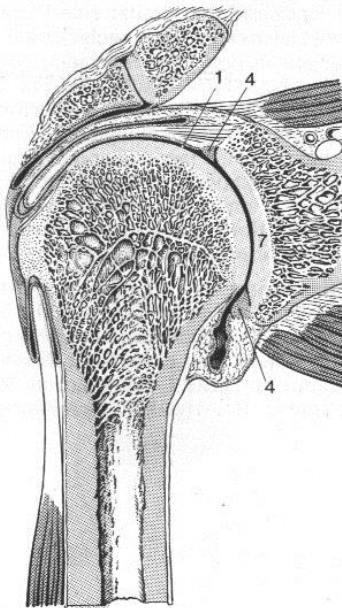


B Menisci

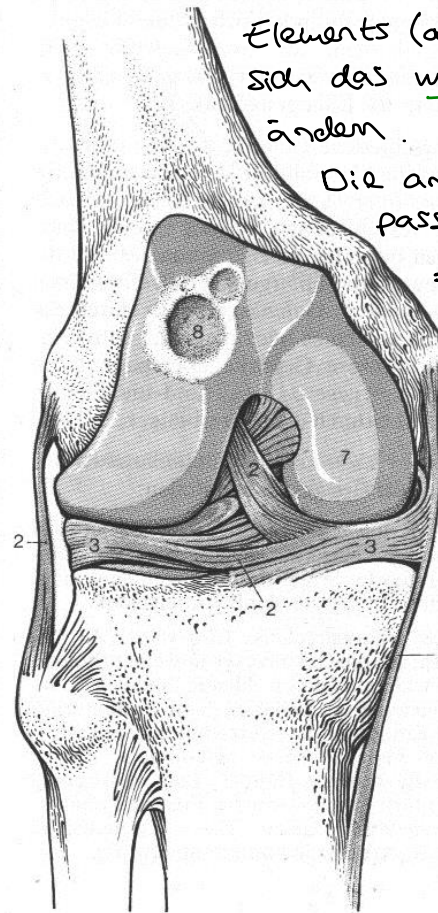
Bei Ausfall oder Veränderung eines Elements (oder eines Teils) wird sich das mechanische Verhalten ändern.

Die anderen Elemente passen sich an

=> joint adaption



C Schultergelenk im Schnitt



D Kniegelenk von vorne

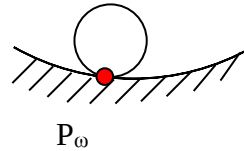
Schulter- und Kniegelenk:

- 1 – Gelenkspalt Cavitas articularis
- 2 – Ligamenta
- 3 – Disci oder Menisci articulares
- 4 – Gelenklippen
- 7 – Gelenkknorpel

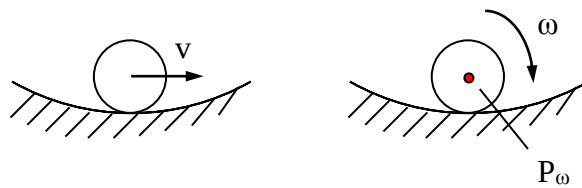
(Speckmann, Wittkowski; Platzer 1991)

Bewegungen der Gelenkoberflächen

Rollen



Gleiten (Translation, Rotation)



Reibung: $\mu = 0.003 - 0.011$ (Schweineschulter)

$\mu \leq 0.01$ (menschl. Knie)

$\mu = 0.0075 - 0.018$ (menschl. Finger, fallend mit zunehmender Last)

$\mu = 0.01 - 0.03$ (menschl. Hüfte)

3.1 Kinematik, Kupplung von unterschiedlichen Bewegungen

Montag, 17. Dezember 2018

11:29

allg. gilt: $f = 6$

↳ im strengen Sinne "kein Gelenk"

Wichtigkeit von Gelenken oder Lagern

9 Anzahl der Bindungen (Zwangs- oder Reaktionskräfte)
" " "gesperrten" Bewegung

(Im Gegensatz zu den eingeprägten Kräften leisten die idealen Zwangskräfte keine Arbeit an der Bewegung)

Biologische Gelenke

"Sperremechanismen" weist anders als in technischen Gelenken

a) oft liegen alle 6 Bewegungsmöglichkeiten vor (mehr oder weniger stark ausgeprägt)

Modellbildung: - je nach Signifikanz der Bewegungen
- je nach Zielstellung der Aufgabe

solche Bewegungen vernachlässigen, die vernachlässigbar klein oder unbedeutend sind

z.B. Knie: * Schenkelgelenk $f=1$
* Roll-, Dreh-, Schubbelenk

b) Bei bestimmten Bewegungsabläufen werden die Gelenke durch Muskelaktivität "gesperrt"

↳ simultane gezielte Aktivität von Agonist und/oder Antagonist

=> streng genommen:

Bewegung ist nicht kinematisch gesperrt, sondern gezielte Sollbewegung

trotzdem: für mathematische Betrachtungen

=> unterlagerte Regelkreise als kinematische Bindung betrachtbar

⇓

- | | |
|--|--|
| - aufrechtes Stehen | - skleronome Bindungen, wenn keine explizite Zeitabhängigkeit auftritt |
| - fixe Haltung beim Tumspringen | |
| - vorgeschriebene Beuge- oder Streckbewegungen | - rheonome Bindungen, wenn Zeit explizit auftritt |

"Zwangskräfte" aus diesen Bindungen sind wegen möglicher Verspannungen nicht eindeutig bestimmbar

3.2 Nachgiebigkeit im Gelenk

Montag, 17. Dezember 2018

12:47

spielt bei Betrachtung der makroskopischen Bewegung keine große Rolle,
aber wichtig für die Betrachtung der Gelenkkräfte

- Bildung von Stößen
- Verteilung der Flächenpressung

3.3 Anpassung von Gelenkfunktionen

z.B. Knie komplexer Bänderapparat

- Kreuzbänder
- Seitenbänder
- Menisken
- Kapseln

} komplexe Wechselwirkung

Ausfall eines Elements $\Rightarrow$ joint adaption

Beispiel: Knie mit durchtrennten vorderen Kreuzband

Kinematik verändert (

- stärkere Bewegung beim Laufen
- keine komplette Streckung beim Stehen

Kinetik verändert (

- abgeschwächte Kräfte zwischen Fuß und Boden

Mechanische Veränderungen

- Steifigkeit gegen Verschieben des Unterschenkels nach vorne/hinten ist geringer (Schubladeneffekt)
- Steifigkeit des Verdrehens des Unterschenkels nach innen geringer
- Steifigkeit insgesamt geringer

Hausaufgabe A6 + A7

(07.01.19)

Biologische Veränderungen

- Verdickung der Knorpelschichten (Knorpel wird nachgiebiger)
- Verdickung des Seitenbandes (insb. des Innern)

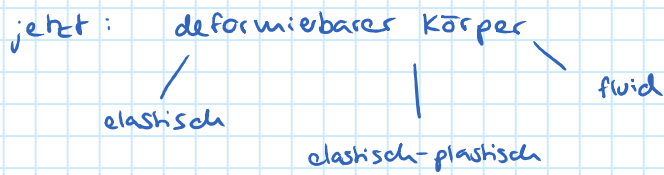
↳ geänderte Gelenkkräfte im System bewirken Wachstumsprozesse

↳ Vernetzung

Mechanik
↔
Zellbiologie

04. KNOCHEN

Montag, 7. Januar 2019 11:30



- Körper stabilisieren (Stützskelett)
- Muskelkräfte übertragen (Arm, Bein)
- Schutz vor äußeren Einwirkungen (Schädel)

4.1 Arten, Strukturen

> M 11.1 Kompositionsmaterial (Mineralien, Wasser, Kollagen, Elastin)

4.2 Mechanische Eigenschaften, Zeitverhalten

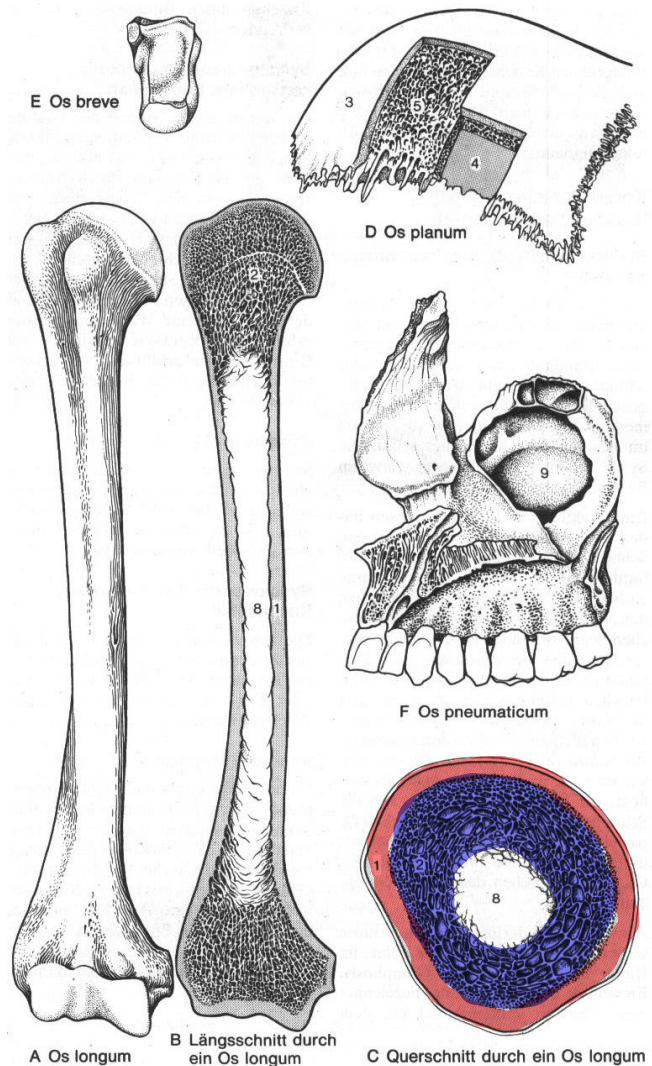
> M 11.2

Knochen

Knochenformen:

lang: A, B, C
kurz: E
flach: D
luftthaltig: F
irregulär (z.B. Wirbel)
sesamoid (z.B. Kniescheibe)

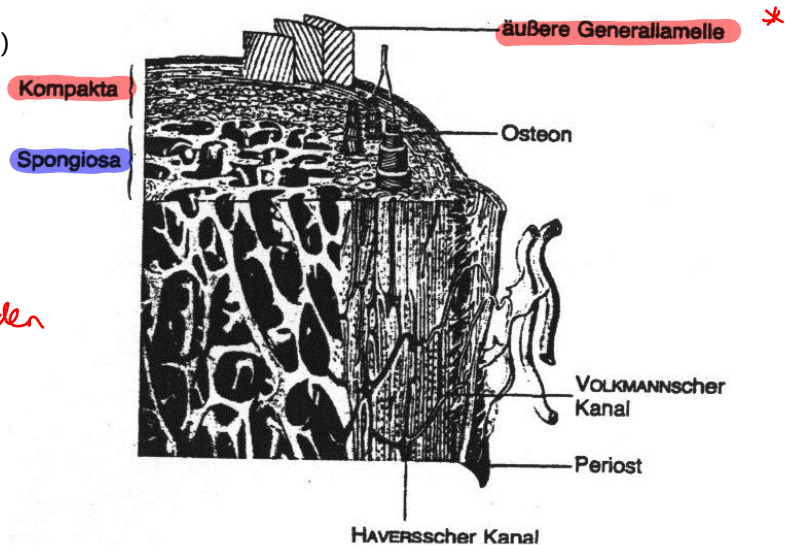
- 1: Rindenschicht
(Substantia compacta)
2: Bälkchenstruktur
(Substantia spongiosa)
8: Markhöhle
(Cavitas medullaris)



Knochenaufbau: Oberschenkelknochen (Speckmann, Wittkowski)

⇒ Kompositmaterial

* Kollagenfasern richten sich nach den
Hauptspannungsrichtungen aus



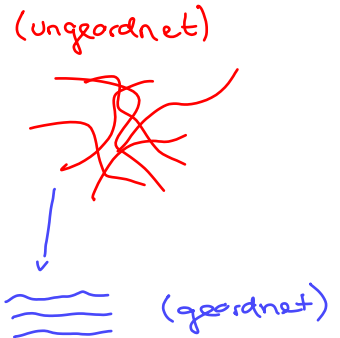


Strukturen:

Geflechtknochen: Kollagenfibrillen (10 – 20 mm lang) ungeordnet
(z.B. bei Kallusbildung)

Lamellenknochen: Kollagenfasern geordnet

mit höherem Alter

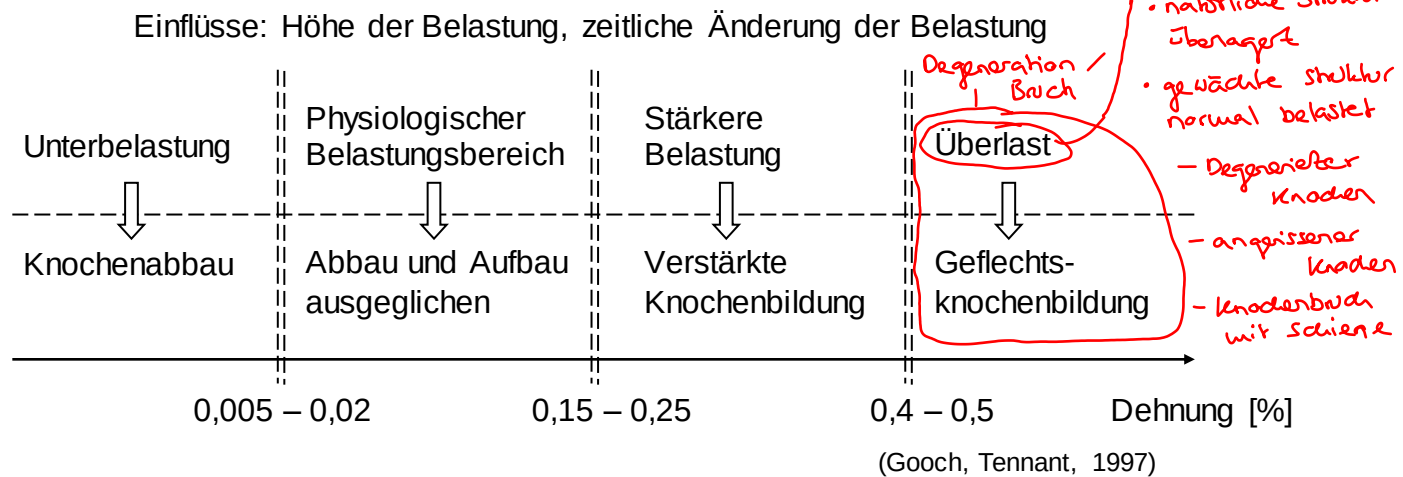


Zeitveränderungen (Bone adaption):

- Alterung: Geflechtknochen $\Rightarrow$ Lamellenknochen
- Mechanische Belastung:

Osteoblasten: Knochenaufbauende Zellen (bone modelling) "bauen"

Osteoclasten: Knochenabbauende Zellen (bone remodelling) "klauen"



Wolffsches Gesetz (1870): "Knochenform wird durch (statische) Last beeinflusst"
ist überholt

Knochenbildung wird nur durch zyklische Belastungen ($>0,5$ Hz) angeregt, insbesondere durch Druckspannungen

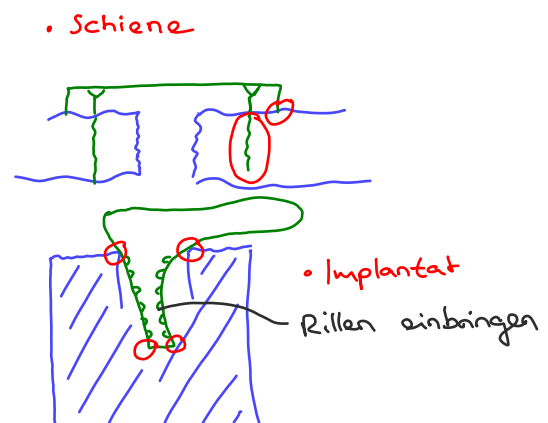
Materialzusammensetzung

Mineralien (Hydroxyapatit), Wasser, Collagen



Unterschied zu Metallen
 $\hookrightarrow$ Droht Gefahr
durch Ermüdungsbruch
(Wöhlerkurve)

Spannungskonzentration
• abbauen



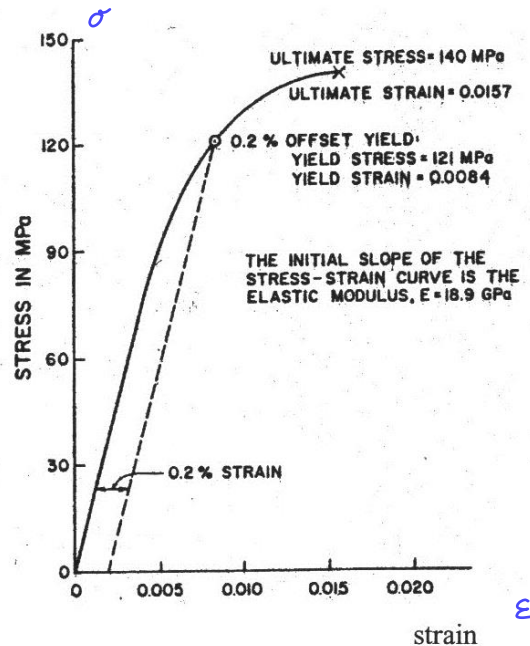


Mechanische Eigenschaften

(Gooch, Tennant, 1997, Fung 1993)

• inhomogen (Mineralien)

- von Mensch zu Mensch verschieden
- unterschiedlich von Knochen zu Knochen
- von Ort zu Ort verschieden



Versuch, die Eigenschaft mit bekannten Materialgesetzen abzubilden

E-Modul

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

Spannungs-Dehnungs-Kurve von Knochen (Dehnungsgeschwindigkeit: $\dot{\varepsilon} = 0,01 \text{ s}^{-1}$)

• rheonom

Bruchspannung und E-Modul abhängig von Belastungsgeschwindigkeit

$$\sigma_B, E \sim \dot{\varepsilon}^{0,06}$$

• elasto-plastisch

Ramberg – Osgood Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{c \dot{\varepsilon}^{0,06}} + a \sigma^n \dot{\varepsilon}^b$$

• anisotrop, nichtlinear

richtungsabhängig

Annahmen:

- * linearelastisch (21 Konstanten)

$$\begin{array}{c} T_{ij} = c_{ijkl} E_{kl} \\ \text{Spannungstensor} \quad \text{Elastizitätstensor} \quad \text{Verzerrungstensor} \end{array}$$

Matrixschreibweise: (Normal- und Schubspannungen zusammengefasst)

$$\begin{array}{c} \sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \\ (6 \times 1) \text{ "Spannungs"vektor} \quad (6 \times 1) \text{ "Verzerrungs"vektor} \\ (6 \times 6) \text{ Steifigkeitsmatrix} \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{c} \varepsilon_i = s_{ij} \sigma_j \\ \text{Nachgiebigkeitsmatrix} \end{array}$$



Darstellung in Ingenieurkonstanten: E_i : E-Modul in i-ter Richtung

ν_{ij} : Poissonzahl für Last in Richtung i,
Dehnung in Richtung j

G_{ij} : Schubmodul für Flächennormale in Richtung i,
Last in Richtung j

* orthogonal anisotrop (orthotrop), 3-Achse ist Knochenlängsachse

→ c_{ij} , s_{ij} enthalten nur 9 unabhängige Elemente, beide sind symmetrisch

Schichtholz
Knochen
Gewebe

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12} E_1^{-1} & -\nu_{13} E_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21} E_2^{-1} & E_2^{-1} & -\nu_{23} E_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31} E_3^{-1} & -\nu_{32} E_3^{-1} & E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

* transvers isotrop (beide Querrichtungen identisch)

→ 5 unabhängige Elemente

$$c_{11} = c_{22}$$

$$c_{13} = c_{23}$$

$$c_{44} = c_{55}$$

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$E_1 = E_2$$

$$\nu_{13} = \nu_{31}$$

$$G_{31} = G_{23}$$

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}$$

Rundholz
Faserseile
Bänder
z.B. Stahl
(Hook's)

* isotrop

→ 2 unabhängige Elemente (μ , λ oder E , G)

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & & E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$



~ Klausur: Zahlen sind nicht wichtig, aber Größenordnungen!

Kennwerte:

- kompakte Knochen (Substantia compacta)

Bone	Horses	Cattle	Pigs	Human (20-39 yrs.)
<u>Ultimate Tensile Strength (MPa)</u>				
Femur	121 ± 1.8	113 ± 2.1	88 ± 1.5	124 ± 1.1
Tibia	113	132 ± 2.8	108 ± 3.9	174 ± 1.2
Humerus	102 ± 1.3	101 ± 0.7	88 ± 7.3	125 ± 0.8
Radius	120	135 ± 1.6	100 ± 3.4	152 ± 1.4
<u>Ultimate Percentage Elongation</u>				
Femur	0.75 ± 0.008	0.88 ± 0.020	0.68 ± 0.010	1.41
Tibia	0.70	0.78 ± 0.008	0.76 ± 0.028	1.50
Humerus	0.65 ± 0.005	0.76 ± 0.006	0.70 ± 0.033	1.43
Radius	0.71	0.79 ± 0.009	0.73 ± 0.032	1.50
<u>Modulus of Elasticity in Tension (GPa)</u>				
Femur	25.5	25.0	14.9	17.6
Tibia	23.8	24.5	17.2	18.4
Humerus	17.8	18.3	14.6	17.5
Radius	22.8	25.9	15.8	18.9
<u>Ultimate Compressive Strength (MPa)</u>				
Femur	145 ± 1.6	147 ± 1.1	100 ± 0.7	170 ± 4.3
Tibia	163	159 ± 1.4	106 ± 1.1	
Humerus	154	144 ± 1.3	102 ± 1.6	
Radius	156	152 ± 1.5	107 ± 1.6	
<u>Ultimate Percentage Contraction</u>				
Femur	2.4	1.7 ± 0.02	1.9 ± 0.02	1.85 ± 0.04
Tibia	2.2	1.8 ± 0.02	1.9 ± 0.02	
Humerus	2.0 ± 0.03	1.8 ± 0.02	1.9 ± 0.02	
Radius	2.3	1.8 ± 0.02	1.9 ± 0.02	
<u>Modulus of Elasticity in Compression (GPa)</u>				
Femur	9.4 ± 0.47	8.7	4.9	
Tibia	8.5		5.1	
Humerus	9.0		5.0	
Radius	8.4		5.3	
<u>Ultimate Shear Strength (MPa)</u>				
Femur	99 ± 1.5	91 ± 1.6	65 ± 1.9	54 ± 0.6
Tibia	89 ± 2.7	95 ± 2.0	71 ± 2.8	
Humerus	90 ± 1.7	86 ± 1.1	59 ± 2.0	
Radius	94 ± 3.3	93 ± 1.8	64 ± 3.2	
<u>Torsional Modulus of Elasticity (GPa)</u>				
Femur	16.3	16.8	13.5	3.2
Tibia	19.1	17.1	15.7	
Humerus	23.5	14.9	15.0	
Radius	15.8	14.3	8.4	

Bruchspannung

↳ Knochen hält ca. die Hälfte von Stahl aus

Bruchdehnung

Zug

Druck

Bei Aussagen zur zulässigen Belastung

beachten:

- Material
- Bauform und Struktur des Elements

Mechanical properties of Wet Compact Bone in Tension, Compression, and Torsion Parallel to Axis. Data Adopted from Yamada (1970)

allg.: $\sigma_{BDruck} \approx 1,4 \sigma_{BZug}$!

Druckverhalten höher als Zugverhalten

- spongiöse Knochen (Substantia spongiosa):
Werte etwa 1 Zehnerpotenz kleiner

Messung der mechanischen Eigenschaften: Zugversuche, Ultraschall

Umrechnung von einachsigen Spannungszuständen auf mehrachsige anders als

- bei technischen Werkstoffen (besondere Anstrengungskriterien),
- ebenso Dauerbruchverhalten (bone modelling)

↳ Vorsicht bei Anwendung von gebräuchlichen Programmsystemen (z.B. Finite elementprogrammen)

05. WEICHGEWEBE

Montag, 14. Januar 2019 12:01

$$> H_{12.1} - H_{12.2}$$

Einschub: "E-Modul"

hier: "visko-elastische Elemente"

Spannungen σ - Deformation ϵ
 / \
 elastisch plastisch

abhängig :

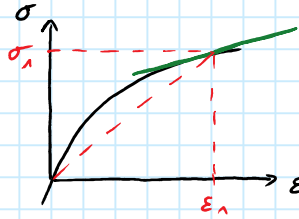
- Einwirkzeit t
- Beanspruchungshöhe σ
- Temperatur
- Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma}$

2. universelle Kerngröße wie E-Modul nicht sehr sinnvoll

Hilfsweise $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

sekantenmodul $E_s = \frac{\sigma_n}{\epsilon_n}$

Ursprungsmodell $\epsilon_0 = \lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \frac{\sigma_n}{\epsilon_n}$



Tangentenmodell (tangentialer Modul) $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_1}$

$$> M_{12.3} - M_{12.5}$$

Oszillationsmessung

Eingang: z.B. Auslenkung $x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t)$

Ausgang: z.B. Kraft $F(x) = F(\hat{x}, t, \omega)$

z.B. Voigtmodell

elastisch $F_e = c x = c \hat{x} \sin(\omega t) \rightarrow \sigma_E = E \hat{e} \sin(\omega t)$

viskos $F_v = d\dot{x} = \underbrace{d\dot{x}}_{\text{Verlustmodul } E'} \cos(\omega t) \rightarrow \sigma_v = E' \hat{\epsilon} \cos(\omega t)$

visko-elastisch

$$\sigma_{ve} = E \cdot \hat{\epsilon} \sin(\omega t) + E' \hat{\epsilon} \cos(\omega t)$$

komplexe Schreibweise

Ansatz $E^* = E + jE'$

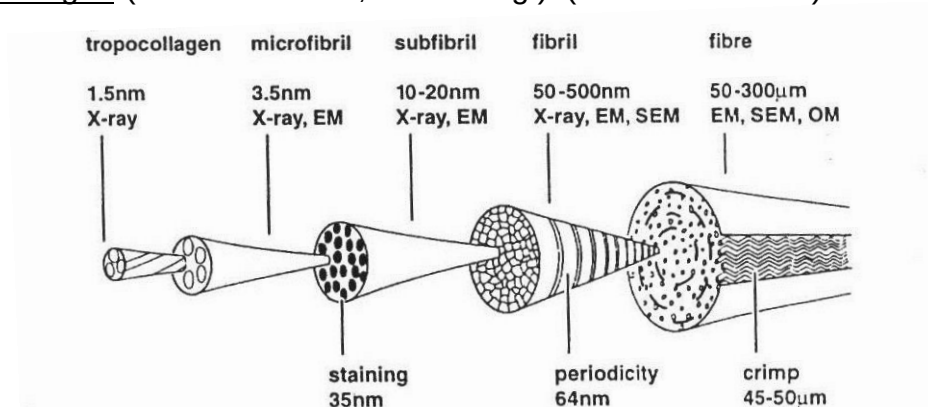
$$\sigma_{ve} = |E^*| \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{komplexer } E\text{-Modul}$$

5. Weichgewebe

Fasern, die Wasser binden können

Wichtige Molekülketten:

5.1 • Kollagen (fibröses Protein, unverzweigt) (auch in Knochen)



Schematic illustration depicting the hierarchical structure of collagen in ligament midsubstance, EM = electron microscope; SEM = scanning EM; OM = optical microscope (from Kastelic et al., 1978)

Gewundene Fasernbündel (dreifach Helix) unterschiedlicher Anordnung (Typ I ... XII),
enthalten u.a. Fibroblasten (bilden Zellen),
Bruchdehnung etwa 12%

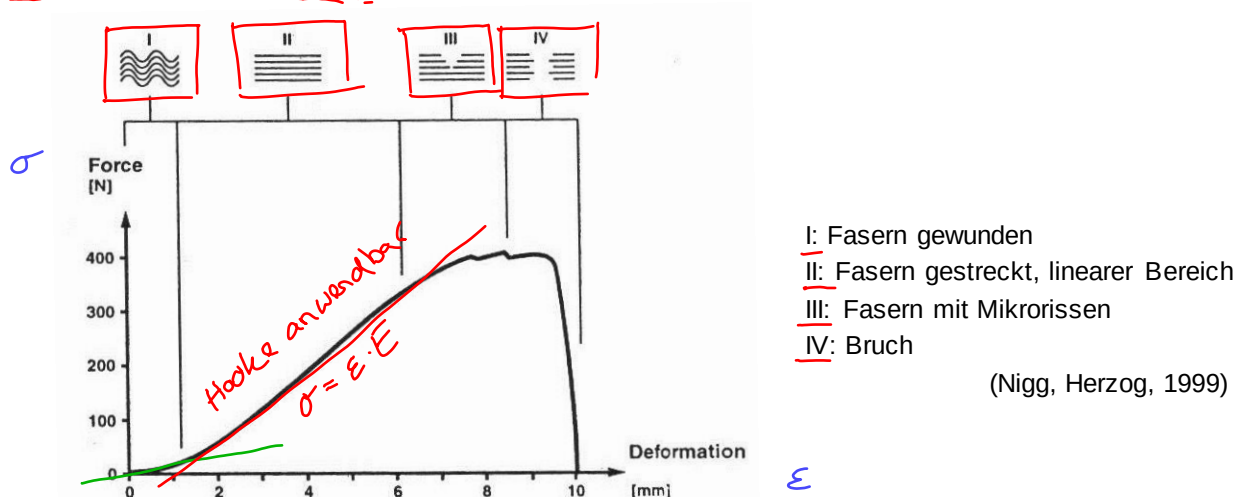
• Elastin (fibröses Protein, unverzweigt)

Schwer löslich, wärmefest
extrem elastische Molekülkette, stark gewunden

Bruchdehnung 200 ~ 300%

Festigkeit 1/25 von Kollagen

Mechanische Eigenschaften, Modellierung



(Nigg, Herzog, 1999)

A typical force-deformation curve for a typical rabbit ligament under monotonic forcing

↳ Band

5.2 Ansätze für E-Modul

(Fung, 1983)

I. Kompositmaterial mit Elastin (E-Modul $E_E \approx 0,6 \text{ MPa}$) und

Kollagen (E-Modul $E_K \approx 10^3 \text{ MPa}$), teilweise nicht straff

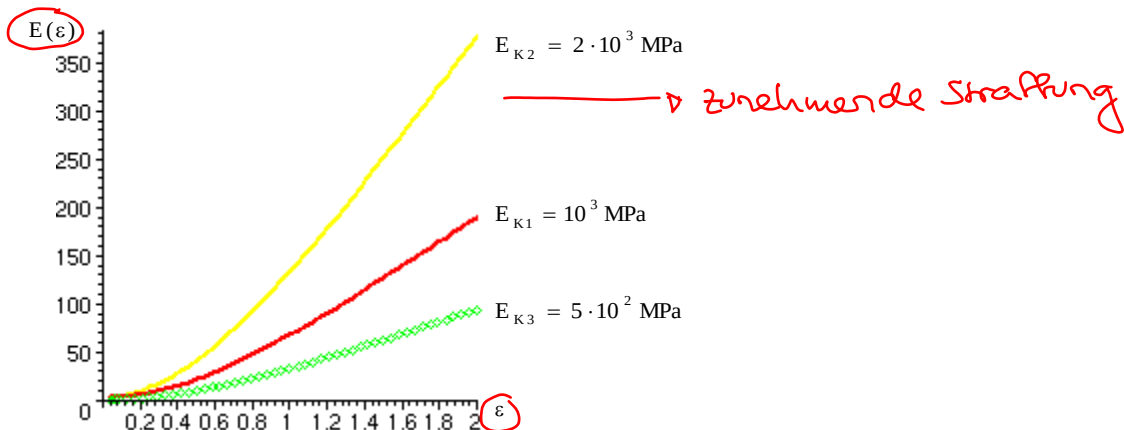
Kollagenfasern straffen sich mit wachsendem ε .

Sei n die Verteilungsdichte der Fasern, die bei ε' gerade straff werden und ε^* der Wert, bei dem die Hälfte aller Kollagenfasern straff ist,

$$\text{so folgt mit } n = b^2 \varepsilon' e^{-b \varepsilon'} \text{ und } b = \frac{1,68}{\varepsilon^*}$$

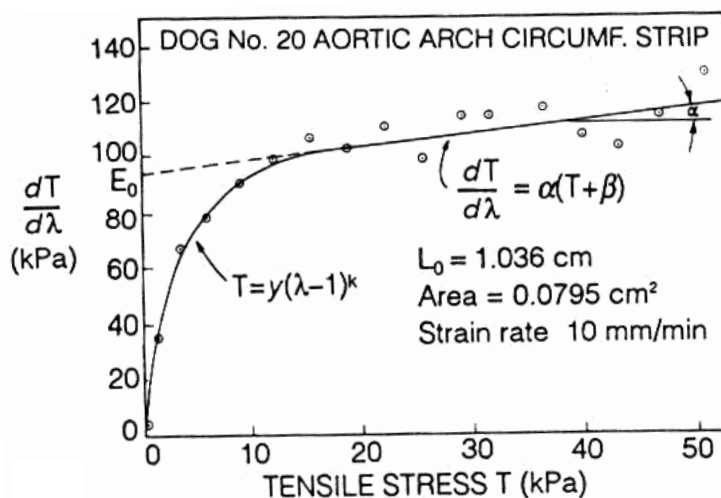
der E-Modul

$$E(\varepsilon) = E_E + E_K \left[1 - \frac{2}{b\varepsilon} + e^{-b\varepsilon} \left(1 + \frac{2}{b\varepsilon} \right) \right]$$



Kurve für $E_E = 0,6 \text{ MPa}$, $E_{K1} = 10^3 \text{ MPa}$, $E_{K2} = 2 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $E_{K3} = 5 \cdot 10^2 \text{ MPa}$, $b = 0,75$

II. Approximation von gemessenen Deformationskurven



Deformation einer Aorta eines Hundes

$\lambda = \frac{L}{L_0}$ T = Zugspannung, es gilt $\frac{dT}{d\lambda} = \frac{dT}{d\varepsilon}$ (E-Modul $\hat{=}$ Tangentialer E-Modul)

Dehnungsquotient $\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$



- Approximation der Werte $20 \text{ kPa} < T < 60 \text{ kPa}$ durch Gerade

$$E = \alpha (T + \beta) = \frac{dT}{d\lambda} \quad \alpha : \text{Steigung}$$

$$\alpha \beta = E_0 : \text{Achsenabschnitt auf } \frac{dT}{d\lambda} \text{-Achse}$$

Lösung der linearen Dgl

$$T = c e^{\alpha \lambda} - \beta$$

Sei (T^*, λ^*) ein Messpunkt, So ist

$$c = (T^* + \beta) e^{-\alpha \lambda^*} \text{ und}$$

$$T = (T^* + \beta) e^{\alpha(\lambda - \lambda^*)} - \beta$$

- $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ sind die Tangenten an die Deformationskurve

⇒ in der Literatur wird deshalb auch vom “tangentialen E-Modul” gesprochen)

Hochgradig nichtlinear und inelastisch

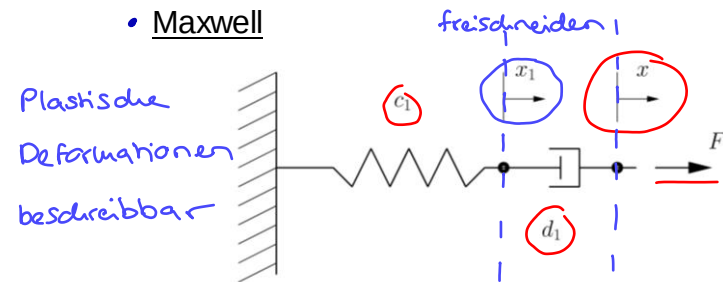
Energiedissipation

Vereinfachungen und Ansätze:

- Thermodynamik elastischer Deformation
- Formulierung von inkrementellen Gesetzen
- Pseudoelastizität
 - anwendbar für periodische Be- und Entlastungen nach “Vorkonditionierung” der Materialien
 - unterschiedliche Materialgesetze für Be- und Entlastung → *Hysteresis*
 - Quasilineare viskoelastische Materialien

5.3 Viskoelastische Modelle (eindimensional, räumliche Erweiterung möglich)

• Maxwell



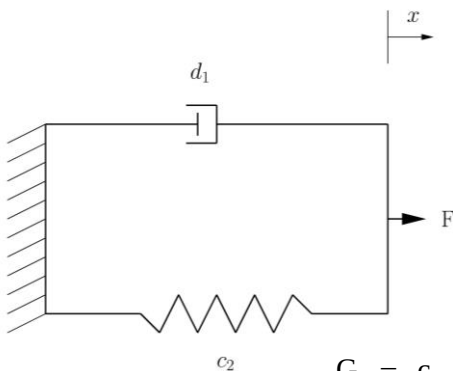
Dgl: $F + \frac{d_1}{c_1} \dot{F} = d_1 \dot{x}$

Übertragungsfunktion: $G(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{c_1 d_1^2 \omega^2}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} + \frac{c_1^2 d_1 \omega}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} j$

Impedanz: $Z(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{v(j\omega)} = -\frac{G}{\omega} j = \frac{c_1^2 d_1}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} - \frac{c_1 d_1^2 \omega}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} j$

• Zeitbereich
• Frequenzbereich
- Ansatz: harmonische Funktion als Eingangsgröße
- Lösung im eingeschwungenen Zustand
→ harmonische Funktion
↓
Amplitude* und Phase* unterschiedlich zur Erregung
↓
komplexe Schreibweise
* frequenzabhängig

• Voigt

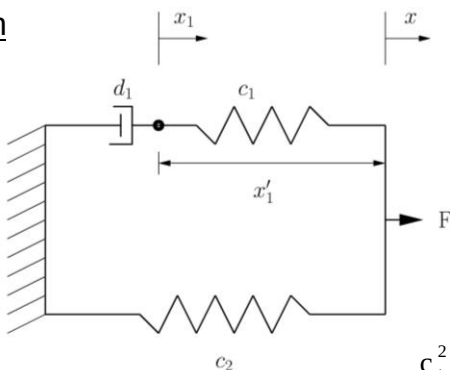


$F = d_1 \dot{x} + c_2 x$

$G = c_2 + d_1 \omega j$

$Z = d_1 - \frac{c_2}{\omega} j$

• Kelvin



$F + \frac{d_1}{c_1} \dot{F} = c_2 x + d_1 \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) \dot{x}$

$G = \frac{c_1^2 c_2 + d_1^2 \omega^2 (c_1 + c_2)}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} + \frac{c_1^2 d_1 \omega}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} j$

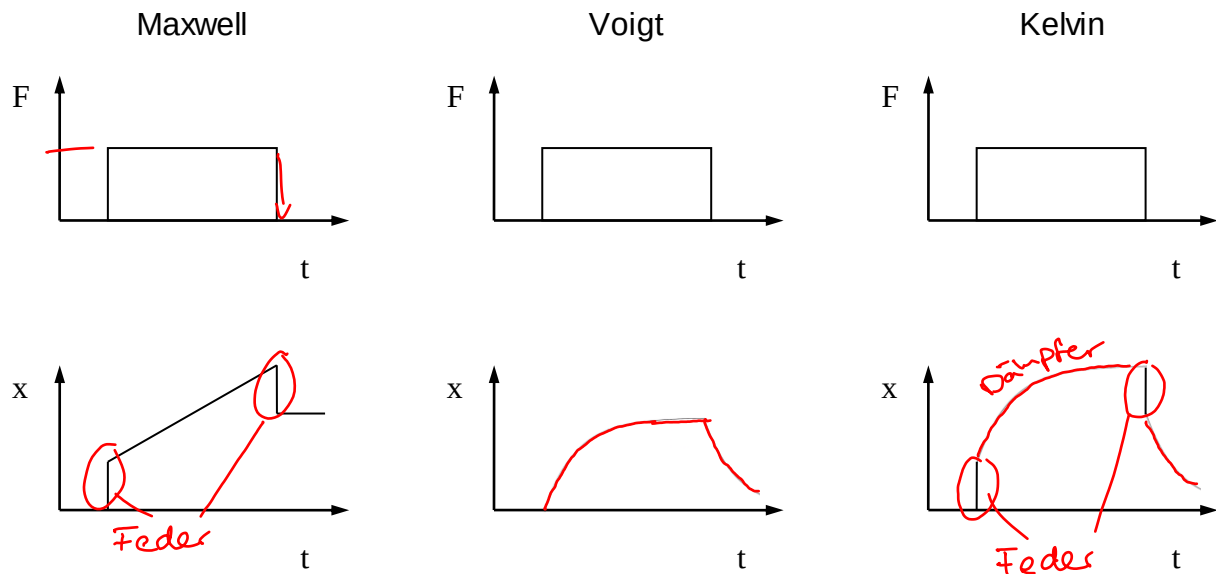
$Z = \frac{d_1 c_1^2}{c_1^2 + d_1^2 \omega^2} - \frac{c_1^2 c_2 + d_1^2 \omega^2 (c_1 + c_2)}{(c_1^2 + d_1^2 \omega^2) \omega} j$

Wird in der Biomechanik verwendet

Beliebige Kombinationen möglich, insbesondere Serienschaltung von Kelvin-Elementen mit unterschiedlichen Zeitkonstanten

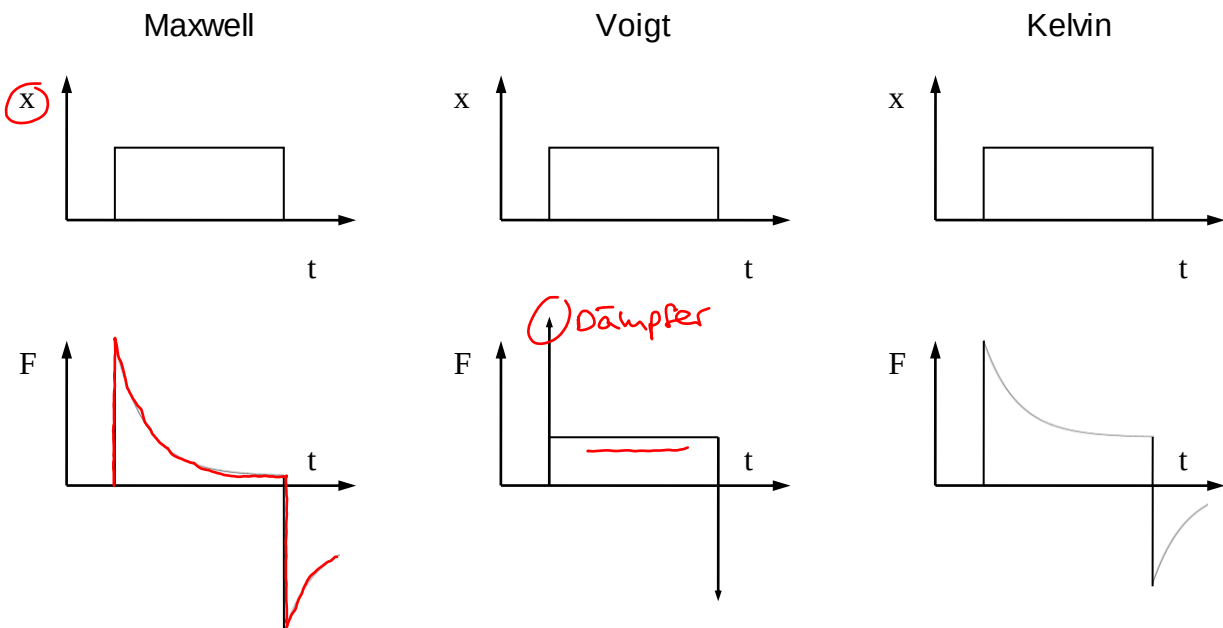


- Kriechfunktionen (Sprung in F)



Zeitbereich

- Relaxationsfunktion (Sprung in x)



5.4 Knorpel, Bänder, Sehnen



5.4.1 Knorpel (Nigg, Herzog, 1999; Fung, 1983)

Hyalin

strukturlos

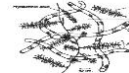
Gelenknorpel

faserig



Bandscheiben

elastisch



20 – 25% Feststoffe
(60 – 70% Kollagen,
mit dem Alter zunehmend)

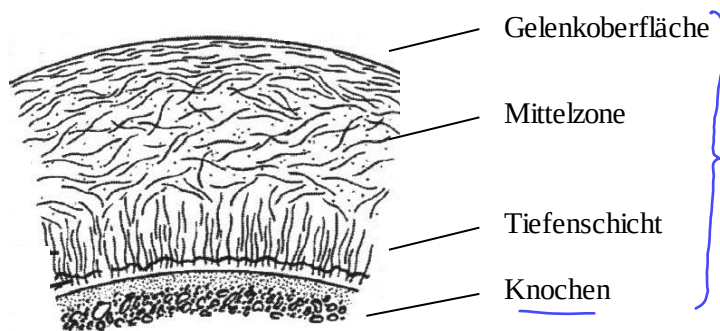
75 – 80% Flüssigkeiten

belastungsabhängig:
Flüssigkeitsaustausch
→ Nährstoffversorgung

allg.

Aufbau Gelenk

unterschiedliche
Faserrichtungen



Stoßdämpfer-
effekt

Spannungs- / Dehnungsverlauf: Progressive Kennlinie
viskoses Verhalten
porös, Flüssigkeitsgehalt ändert sich mit der Belastung

Mechanische Eigenschaften:

z.B. Rinderknorpel mit $E = \alpha(T + \beta)$

Spannung

	α	β
Oberfläche	2	6,8 MPa
Mittlere Zone	2,6	8,0 MPa
Tiefenschicht	2,3	6,1 MPa

Spannungen im Hüftgelenk gemessen in vivo 6 Monate post. op.

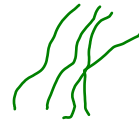
	Max. Spannung
Einbeinstandphase	6,7 MPa
Aufstehen	9,2 MPa
Leichtes Jogging	7,7 MPa
Treppensteigen	10 MPa

Zyklische Belastung: Nährstoffversorgung, Verstärkte Knorpelbildung
Ruhe: Knorpelabbau



5.4.2 Bänder (Ligaments)

- verbinden Knochen, Teil der Gelenkfunktion
- Kollagenfasern nahezu parallel



teilweise mit Vorspannung

5.4.3 Sehnen (Tendons) (Nigg, Herzog, 1999)

- verbinden Muskeln mit Knochen
- Kollagenfasern parallel



Speichervermögen von elastischer Formänderungsenergie (spielt beim Laufen, Hüpfen und Rennen eine große Rolle. Verformungen in der Sehne oft größer als im Muskel)

↳ Muskel muss sich kaum bewegen

30 – 40% Feststoffe

60 – 70% Flüssigkeit

i.a. < 3% Elastin

} Umgekehrt
bei

lig. flavum; zwischen Wirbelbögen

70 – 80% Kollagen

lig. nuchae (Pferd); zwischen Nacken und Schweif

Nährstoffversorgung von den Einspannregionen her

Mechanische Eigenschaften: (Fung, 1983)

Mittelwert $\pm$ Standardfehler des Mittels

Specimen type	<u>E-Modul</u> (MPa)	<u>Bruchspannung</u> (MPa)	<u>Bruchdehnung</u> (%)
Human MCL	332,2 $\pm$ 58,3	38,6 $\pm$ 4,8	17,1 $\pm$ 1,5
Human PCL, anterolateral bundle	248 $\pm$ 119	35,9 $\pm$ 15,2	18,0 $\pm$ 5,3
Human ACL, LCL, PCL	345,0 $\pm$ 22,4	36,4 $\pm$ 2,5	15,0 $\pm$ 0,8
Rabbit MCL	740 $\pm$ 90	77,7 $\pm$ 1,9	12,9 $\pm$ 1,2
Rabbit ACL	516 $\pm$ 64	62,3 $\pm$ 5,2	12,5 $\pm$ 1,5
Human patellar tendon	643,1 $\pm$ 53,0	68,5 $\pm$ 6,0	13,5 $\pm$ 0,7
Goat patellar tendon	1639,1 $\pm$ 435,9	126,8 $\pm$ 20,8	15,2 $\pm$ 3,9

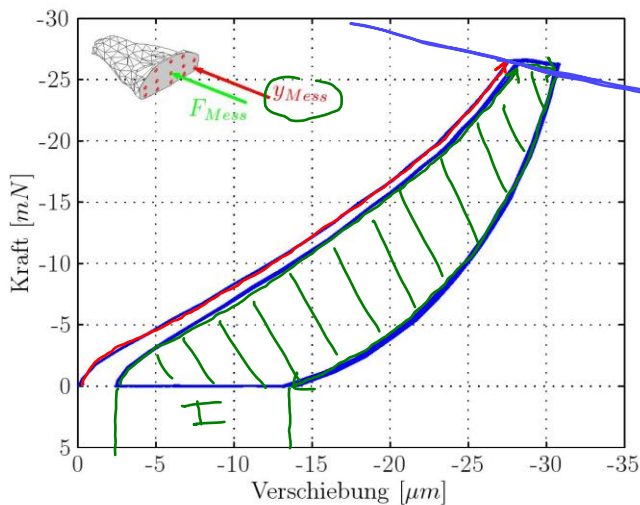
LCL: lateral collateral lig., äußeres Seitenband

MCL: medial collateral lig., inneres Seitenband

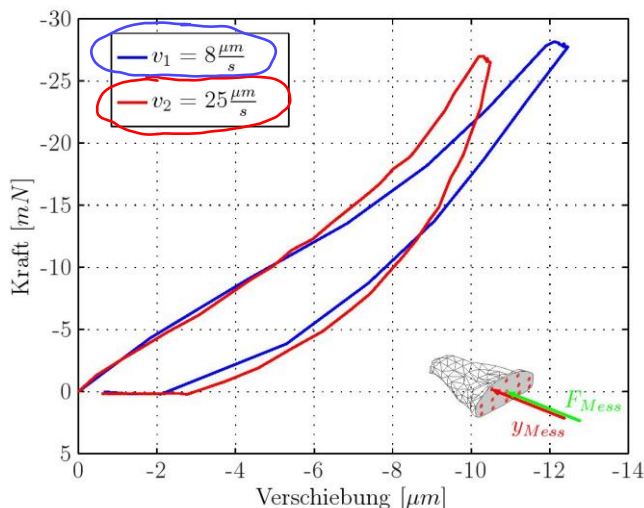
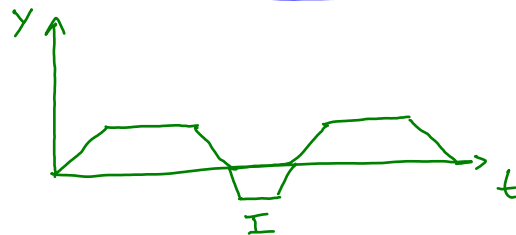
ACL: anterior cruciate lig., vorderes Kreuzband

PCL: posterior cruciate lig., hinteres Kreuzband

Gemessene Kraft-Verschiebungskurven: Kraft auf den Steigbügel des Mittelohrs durch Verschieben einer Kraftmessdose



- Vorkonditionierung
- nichtlinear
- Hysteresis (Energiedissipation)
- Kriechen an den Umkehrpunkten



- geschwindigkeitsabhängig
- Steifigkeit $\frac{\partial F}{\partial s}$ nicht direkt ablesbar

Beschreibung der Kraft-Verschiebungskurven

I: Komplexer E - Modul

II: Kraftgesetz

$$F = F(s, v, t)$$

III: Viskoelastische Elemente

anschaulich, einfach für harmonische Analyse um Arbeitspunkt

- Zeitverhalten
- Nichtlinearität (erfordert $c=c(s, \dots)$)

Klausur:

– allg. Vorgehen!

• Skizze

• Freischneiden

• Kräfte einzeichnen

• banales rechnen

Vorkonditionierung schwierig beschreibbar

07. Muskeln

• Arten

Glatter Muskel
Herzmuskel
Skelettmuskel

(Blutgefäße, Peristaltik)

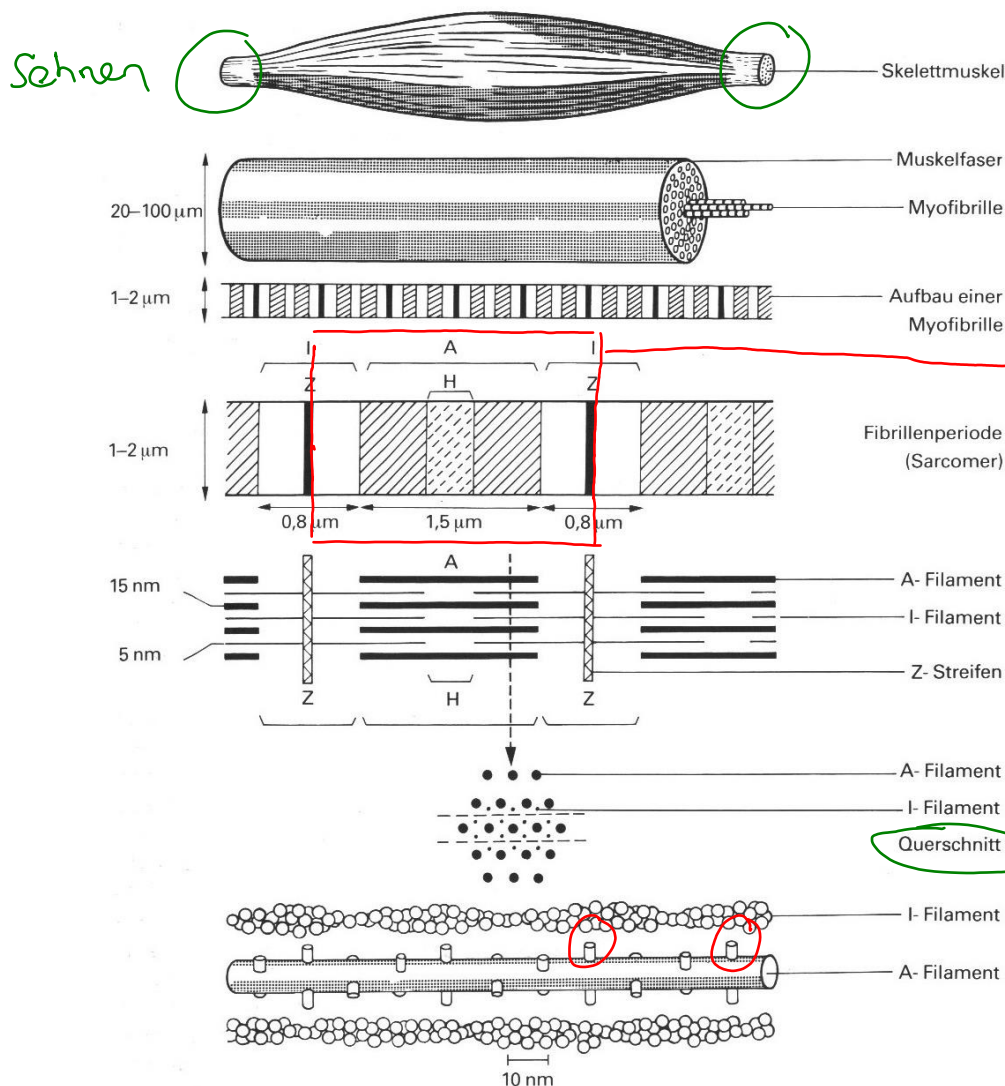
Nervenenden übertragen Signale vom ZNS
⇒ abgestufte Kräfte möglich

• Skelettmuskel

quergestreift

(treten i.a. paarweise auf: Agonist, Antagonist)
(I-Streifen hell, A-Streifen dunkel)

(Kraftstenglieder)



Sarkomer
(kleinste Einheit, die kontrahieren kann)

Querschnitt

2 Fasertypen:

Langsame Fasern (Slow-twitch), $T_{\text{Kontr.}} \approx 60 \text{ ms}$

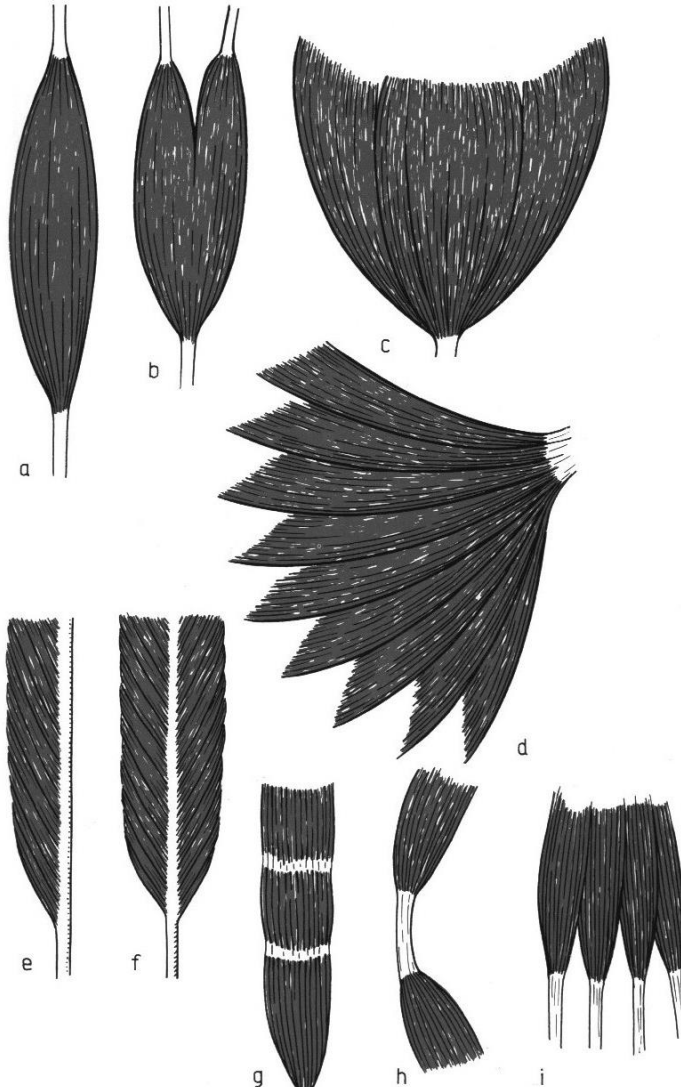
Schnelle Fasern (Fast-twitch), $T_{\text{Kontr.}} \approx 25 \sim 50 \text{ ms}$

energieeffizient
(Ausdauer Sport)
z.B. Wadenmuskeln

z.B. Biceps

Muskelformen und Sehnenansätze

gefiedert oder parallel
↓
Sehnen + Fasern
≠
↓
//

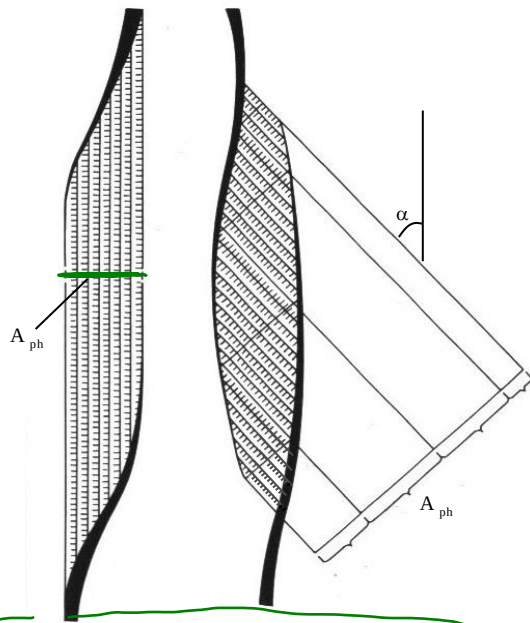


- a: einfacher, spindelförmiger Muskel mit Muskelbauch und Sehne
- b: zweiköpfiger Muskel (*Biceps*)
- c: dreiteiliger Muskel (*Delta-Muskel*)
- d: vielfach gezackter Muskel (*vorderer Säge-Muskel*)
- e: einseitig gefiederter Muskel
z.B. Kurzer Wadenbeinmuskel,
Langer Großzehenstrecker
- f: doppelseitig gefiederter Muskel
z.B. Vorderer Schienbeinmuskel
- g: Muskel mit sehnigen Einschreibungen
(*gerader Bauch-Muskel*)
- h: zweibäuchiger Muskel (*Schulter-Zungenbein-Muskel*)
- i: mehrschwänziger Muskel

(Tittel, 1994)

Parallelfaserige Muskeln: Schnelligkeitsmotore

Gefiederte Muskeln: Kraftmotoren mit großem physiologischen Querschnitt A_{ph}



Physiologischer Muskelquerschnitt

Fiederungswinkel α

Kraftvermögen: $\sigma \leq 60 \text{ N/cm}^2$

Schollenmuskel: $A_{ph} = 60 \text{ cm}^2$

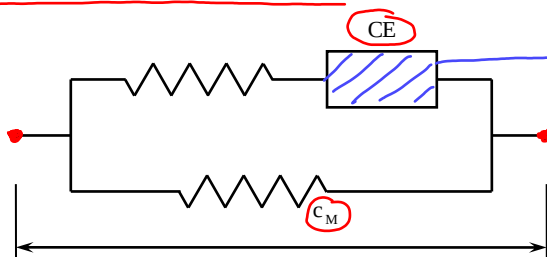
Modelle

- Klassisch Hillsche Modelle; Cross-Bridge Modelle
Makroskopische Modelle
(einfach, nichtlinear)
- Molekulare Modelle
Chemie $\rightarrow$ Mechanik
- Verteilte Modelle
Kombination von klassischen Hill-Typ Modellen und Molekularmodellen

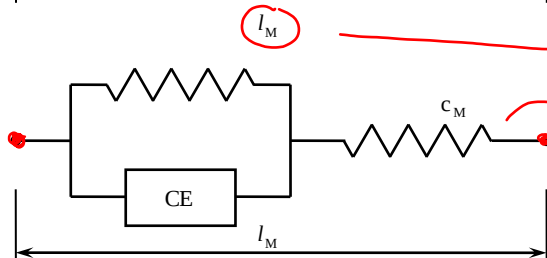
Modelle vom Hill-Typ

Kontraktiler Element CE kombiniert mit Federelementen (c_i)

in unterschiedlichen Kombinationen



- kontraktiler Element: Wegestellglied
- kann parallel oder schräg zur Sehne liegen
- Nachteil: - keine Dämpfer
- keine Massen



l_M : Muskellänge

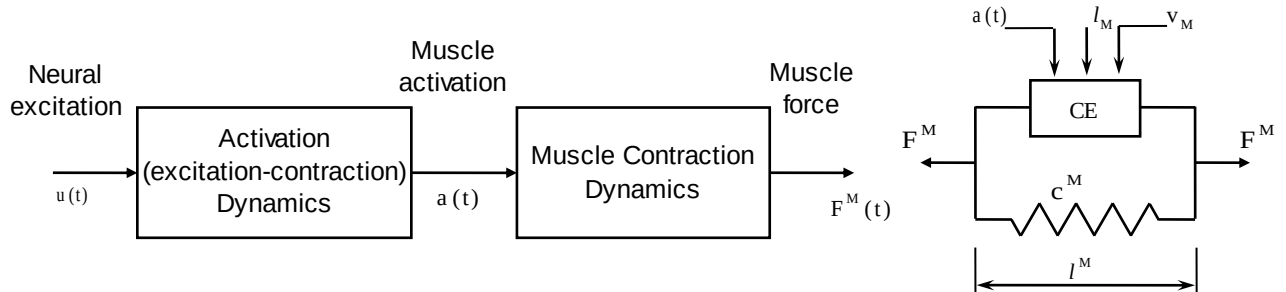
könnte z.B. Sehne sein

Anmerkung: Zur Beschreibung der Kräfte zwischen den Knochen muss die Sehnenelastizität mitberücksichtigt werden

Motor Einheit (Muskelfaser isoliert)

(Zajac, 1989)

Kontraktionsverhalten eines vereinfachten Hillmodells
(Muskellänge = $\sum$ Sarkomerlängen)



Isometrische Aktivität

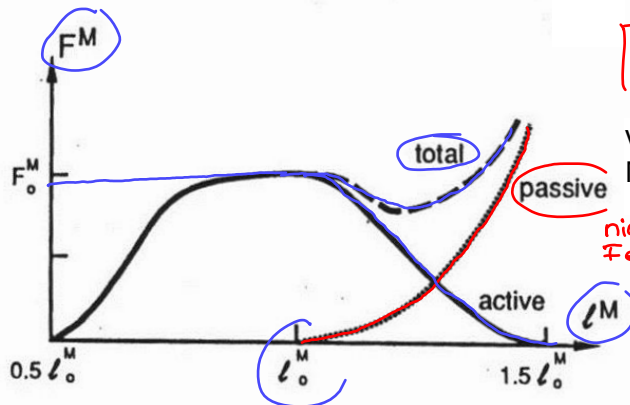
(Kraftänderung bei konstanter Länge)

Kraft in Motoreinheit ist abhängig von der aktuellen Muskellänge l_M ,
optimale Muskellänge l_0

Isotonische Aktivität

(Bewegung bei konstanter Kraft)

Betrachtet wird $l_M = l_0$



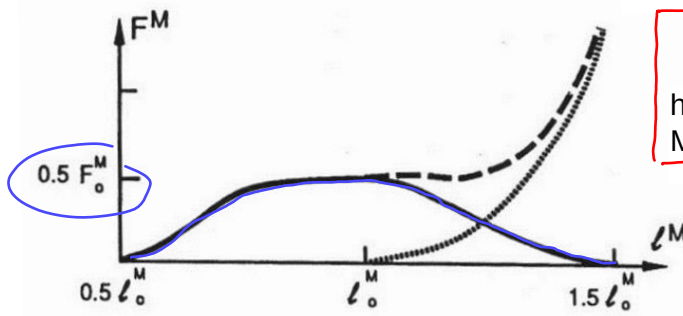
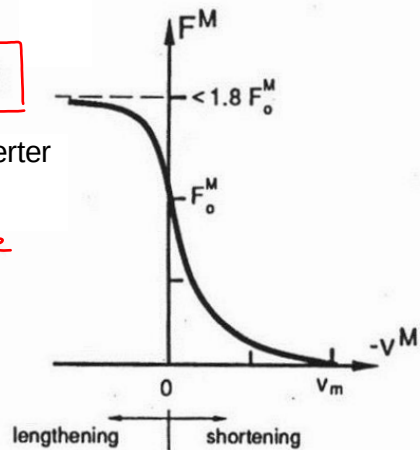
alle Sarkomere
aktiviert



$a(t) = 1$

voll aktivierter
Muskel

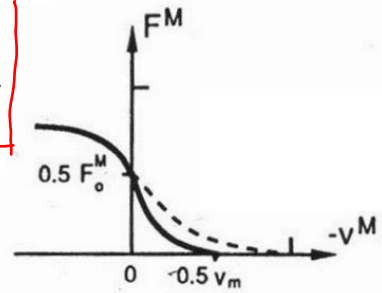
nichtlineare
Feder



$a(t) = 0.5$

halb aktivierter
Muskel

Halbte der
Sarkomere aktiviert



(Zajac, 1989)

Mathematische Beschreibung

Ansätze

- Aktivierungsdynamik $\frac{da}{dt} + \left\{ \frac{1}{\tau_{\text{act}}} [\beta + (1 - \beta)u] \right\} a = \frac{1}{\tau_{\text{act}}} u$
 τ_{act} Zeitkonstante

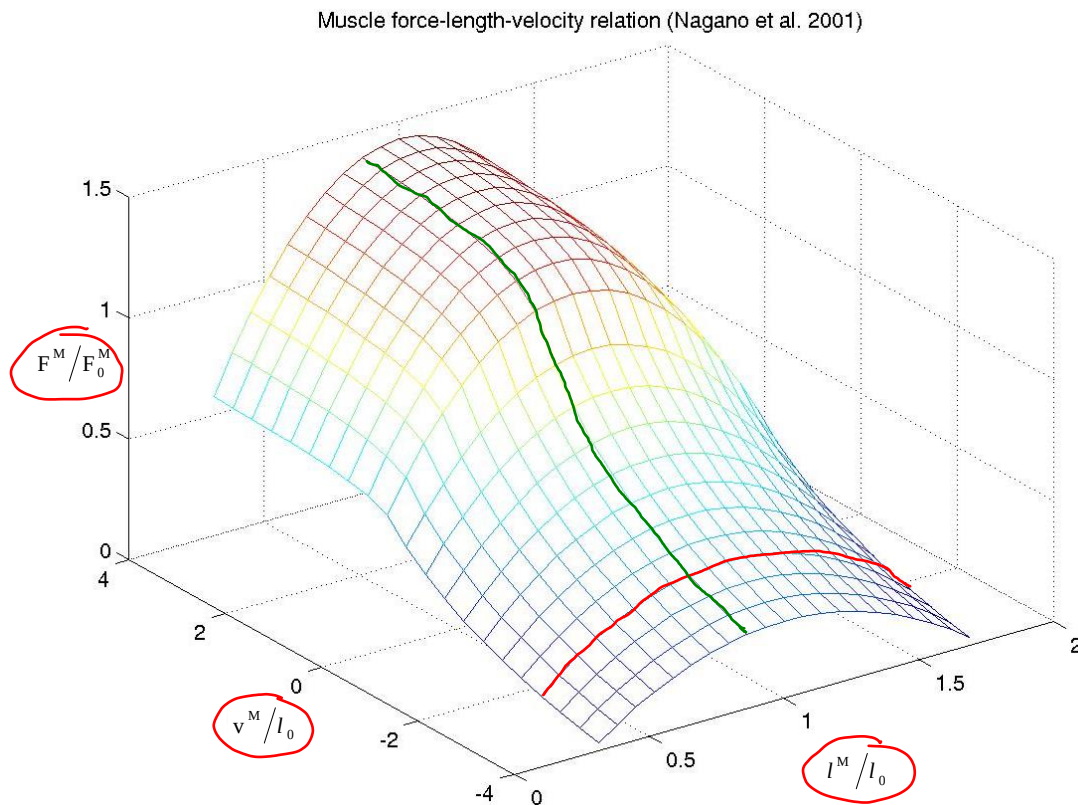
- Kraftdynamik (Vergleich mit gemessenen Elektromyogrammen möglich)

$$F^M = F^M(a(t), l_M, v_M)$$

Beispiel:

Slow-twitch Fasern: $v_{\text{max}} \approx 4 l_0/s$

Fast-twitch Fasern: $v_{\text{max}} \approx 12 l_0/s$

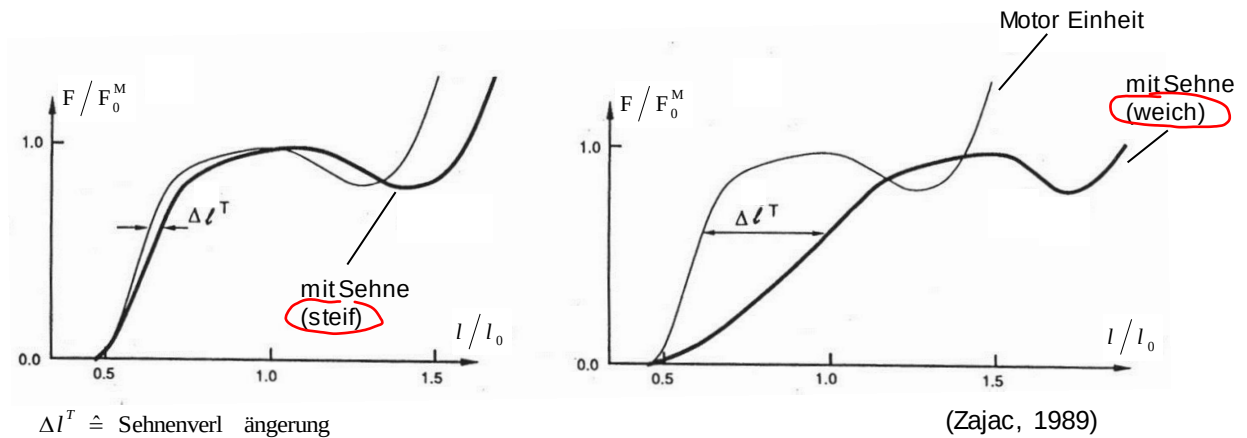


Zwillingsswadenmuskel m. gastrocnemius (50% Slow-twitch, 50% Fast-twitch)

Muskel – Sehnen Komplex

Sehne ist nichtlineare Feder

Isometrische Aktivität: Muskelverkürzung + Sehnenverlängerung



• Sensorische Elemente

Afferente Nerven von

- Muskelspindeln (parallel zu Muskelfasern)
- Muskel – Sehnen-Übergängen (Golgiorgane)

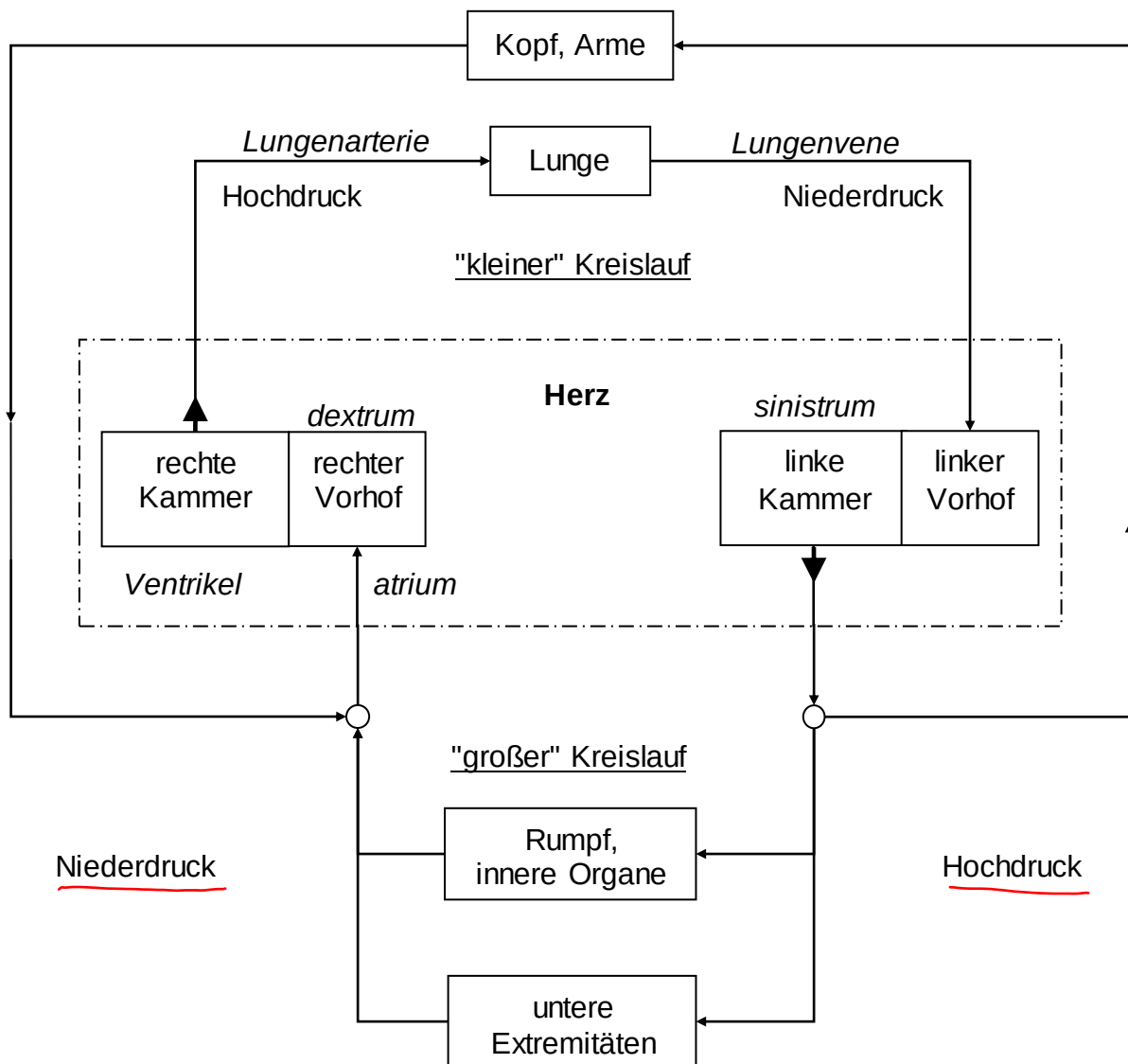
zum ZNS

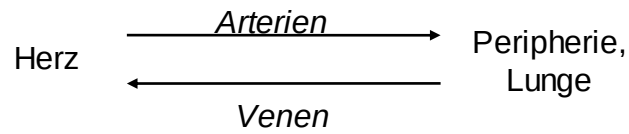
- Muskelspindeln melden: Muskellänge
Muskelgeschwindigkeit
behindern Kontraktion des Antagonisten
- Golgiorgane melden: Muskelkraft
behindern Kontraktion des Antagonisten

08. Kreislauf

Transport von

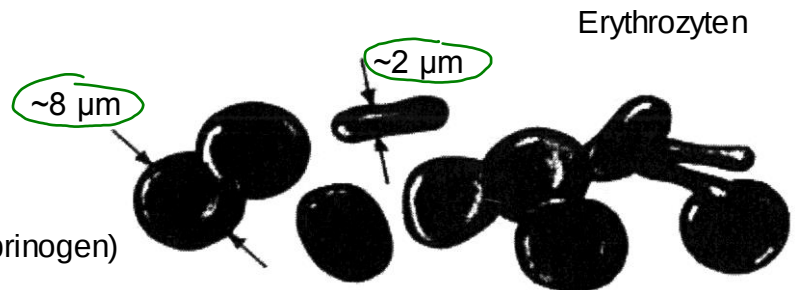
- Blutgase (Sauerstoff, Kohlendioxid)
- Nährstoffe (Kohlehydrate, Aminosäuren, Vitamine, Mineralstoffe)
- Wärme
- Hormone (Botenstoffe)
- Abwehrstoffe (Antikörper)
- Wasser, Schlackenstoff





"Kreislauf" "klein", "groß":
hintereinander liegende Sektionen (seriell), nicht getrennt (eher Zweige des Kreislaufs)

Blut:



- Blutplasma
(Serum nach Entzug von Fibrinogen)
 - Formelemente
 - rote Blutkörperchen (Erythrozyten)
 - weiße Blutkörperchen (Leukozyten)
 - Blutplättchen (Thrombozyten)
- } Hämatokritgehalt (HK)

90% Wasser (Newtonsche Flüssigkeit)

8.1 Exkurs in die Kontinuumsmechanik

- Modelle
- Tensorkalkül
- Kinematik
- Kinetik
- Materialgesetze

8.1.1 Modelle

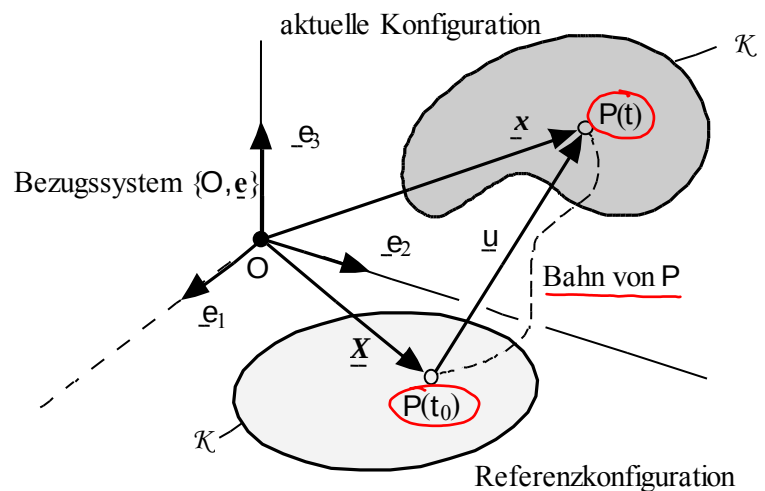
Materielle Punkte P , stetig verteilt

Körper K als zusammenhängende Menge materieller Punkte

Masse m , Dichte $\rho = dm(P) / dV(t)$ *zeitabhängig*

8.1.2 Kinematik

- **Lagrangesche** oder **materielle Koordinaten** ($\underline{X}$)
(Festkörpermechanik)
Teilchenbezogen (wo geht Teilchen hin)
- **Eulersche** oder **lokale Koordinaten** ($\underline{x}$)
(Strömungsmechanik)
Ortsbezogen (wer kommt vorbei)



Geschwindigkeit am Ort x, y, z

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z$$

Beschleunigung eines materiellen Teilchens (totale, substantielle Ableitung)

$$\mathbf{a} = \underbrace{u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}}_{\text{konvektiv}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{lokal}} = (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}(x, t, t_0) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t, t_0) - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, t_0)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t, t_0) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t, t_0) - \mathbf{X}$$

- Deformationsgradient $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, t_0) = [F_{\alpha\beta}] = \left[\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_\beta} \right] = \text{Grad } \mathbf{x}$

- Verschiebungsgradient $\mathbf{S} = \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\beta} \right] = \mathbf{F} - \mathbf{E} = \text{Grad } \mathbf{u}$

Abbildung $dx = F dX$

Linienelement



Translation + Verzerrung!



Deformationsgeschwindigkeit $\dot{F}$

mit

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} dX_k = L_{ij} F_{jk} dX_k$$

ist

$$\dot{F} = L \cdot F = \text{Grad } v$$

materieller

$$L = \text{grad } v$$

räumlicher

Geschwindigkeitsgradient

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1} = \underbrace{D}_{D = D^T} + \underbrace{W}_{W = -W^T}$$

Tensor der

Verzerrungs-
geschwindigkeit

Dreh-
geschwindigkeit

Rivlin-Ericksen-Tensoren (für allgemeinere Materialverhalten)
Geschwindigkeitsgradienten k-ter Ordnung

$$L_k(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} F(X, t, t_0)$$

• Bahnlinie:

Von einem materiellen Punkt mit der Zeit durchlaufene Bahn

• Stromlinie:

Integalkurven des Richtungsfeldes von v (Tangenten an momentane Geschwindigkeiten)

• Streichlinie:

Ort aller mat. Punkte zum Zeitpunkt t_0 , die zu irgendeiner Zeit einen bestimmten Ort passiert haben oder diesen passieren werden.

8.1.3 Kinetik

- Oberflächenkräfte (Spannungsvektor t)
 - Volumenkräfte (Volumkraftvektor f)
- (bei COSSERAT-Kontinua additiv Oberflächenmomente und Volumenmomente)





Bilanzgleichungen

- Körper, Kontrollraum KR (global)
- infinitesimales Element (lokal)
- Energiebilanz
Thermodynamik
- Massenbilanz

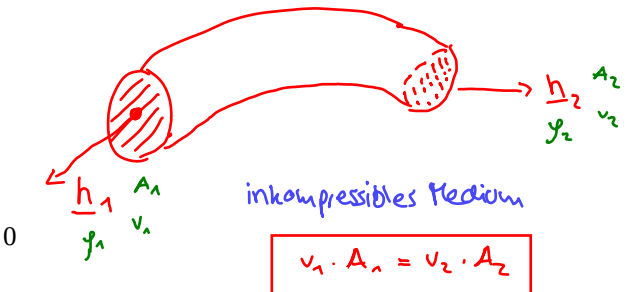
Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \rho + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

zeitliche Dichteänderung
des Flusses

$$\int_{V(KR)} \frac{d}{dt} \rho dV + \int_{A(KR)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$



zu- und abfluss der Masse

Impulssatz am infinitesimalen Volumenelement

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Volumenkräfte Spannungstensor
Oberflächenkräfte

Impuls- und Drallbilanzen in endlichen Volumenbereichen

$$\int_{V(KR)} \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{A(KR)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{V(KR)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{A(KR)} \mathbf{t} dA$$

$$\int_{V(KR)} \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV + \int_{A(KR)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{V(KR)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV + \int_{A(KR)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA$$

Cauchy'sche Bewegungsgleichung

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Spannungstensor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{t}_k$

Navier-Stokes (zähes Fluid); Bernoulligleichung (reibungsfrei)

8.1.4 Materialgesetze

Spannungstensor $\mathbf{T} \leftrightarrow$ Deformation $\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}} \dots$

Spezielle Eigenschaften von Fluiden

• Dichte

Masse pro Einheitsvolumen, temperaturabhängig

Wasser $\rho = 999 \text{ kg m}^{-3}$ (15 °C)

Blut $\rho = 1060 \text{ kg m}^{-3}$ (37 °C)

Luft $\rho = 1,22 \text{ kg m}^{-3}$ (15 °C, 101.3 hPa)

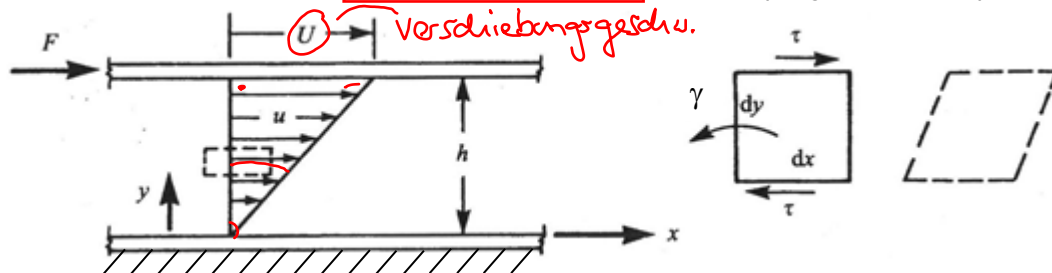
• Viskosität, Zähigkeit

- Haftbedingung an Festkörpern
- Schubspannungen $\tau = F/A$ [N m⁻²]
- Viskosität (Zähigkeit) μ [N s m⁻²], [Pa s]; 1 Poise = 0,1 Pa s *dynam. Zähigkeit*
- Kinematische Zähigkeit $\nu = \mu / \rho$ [m² s⁻¹]; 1 Stoke = 10⁻⁴ m² s⁻¹

Schubspannungen $\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma}$ Schergeschwindigkeit)

Einfachste Definition eines **Newtonschen Fluids**

(Berger et.al, 1996)



Viskosität nimmt mit zunehmender Temperatur ab

Näherung für Blut bei:

- Hohen Scherungen $\dot{\gamma}$
- In kleinen Grenzschichten

• Oberflächenspannung

Kapillarwirkung
Benetzbarkeit

• Kompressibilität

Kompressionsmodul $E = \rho dp/d\rho$

Wasser $E = 2,15 \cdot 10^9$ N m⁻² (15 °C)

Schallgeschwindigkeit $c = (E / \rho)^{1/2}$

Wasser $c = 1470$ m s⁻¹ (15 °C)

(Ultraschalluntersuchungen)

8.2 Einteilung, Klassifizierung von Strömungen

- eindimensional, eben, räumlich
- reibungsfrei, zäh
- laminar, turbulent
- stationär, instationär
- kompressibel, inkompressibel
- starre oder nachgiebige Berandung

8.3 Abschätzungen durch vereinfachte Betrachtung

8.3.1 Reibungsfreie Strömungen

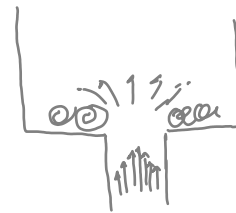
Bernoulli, Torricelli

- Staudruck
- Rohrverengungen

Kräfte auf Berandungen,
Druck- und Geschwindigkeitsveränderungen

8.3.2 Reibungsbehaftete Strömungen

- **Turbulenz** (Abhängig von der Reynoldszahl)
 - erhöhte Wandscherkräfte
 - erhöhter Druckabfall
 - erhöhte Widerstandskräfte an umströmten Objekten
 - erhöhter Wärme- und Stoffübergang
- **Ausbildung von Grenzschichten**
 - Entmischungsprozesse
 - Erhöhter Durchsatz in Rohren
- **Strömungsablösung**
 - Wirbelbildung



Laminare Strömung im geraden Rohr

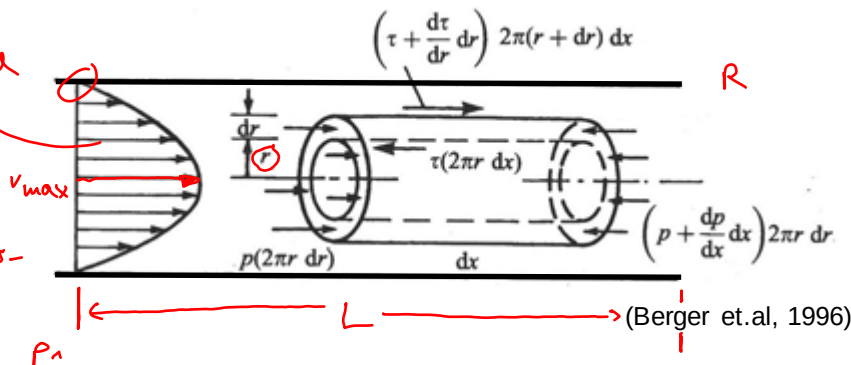
$v(r)$ Rotationsparaboloid

$$= \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Durchflussmenge Q

$$Q = A \cdot v \quad \text{mittlere Strömungsgeschwindigkeit}$$

$$v = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} = \frac{1}{2} v_{\max}$$



Reynoldszahl $Re = \rho V d / \mu$

$Re_{krit} \approx 2300$,
darüber turbulent

Hagen - Poiseuille

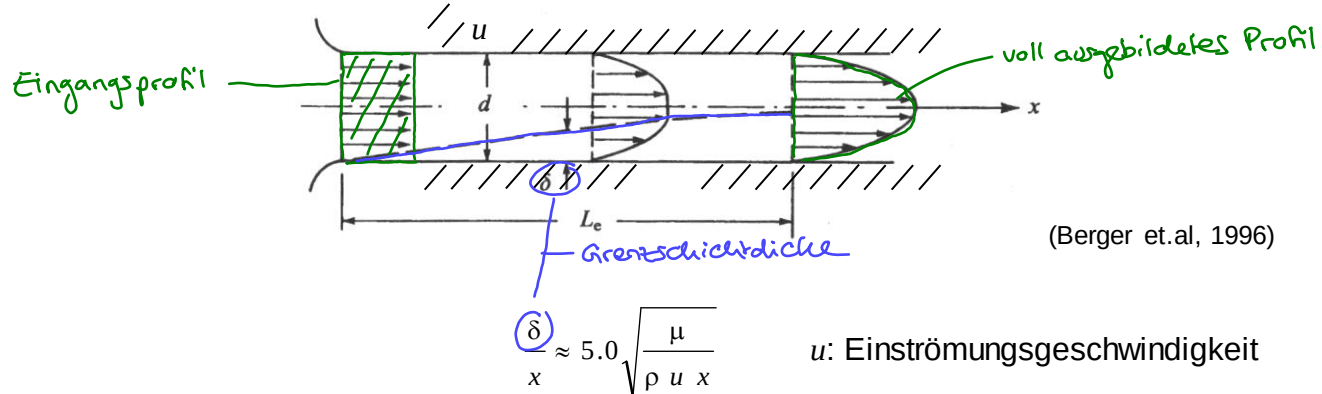
$$\Delta p = \frac{32 \mu L V}{d^2}$$

V : mittlere Strömungsgeschwindigkeit

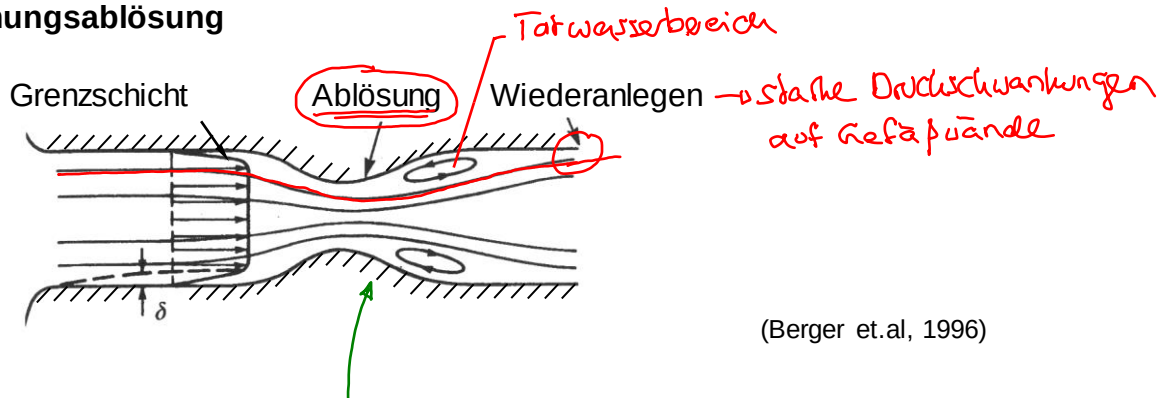
L : Rohrlänge

Rohrverengungen

- **Grenzschichtausbildungen**



- **Strömungsablösung**



- Grenzschichten können laminar oder turbulent sein
- Ablösungen treten bei Stenosen auf
- Wiederanlegen der Strömung erzeugt turbulente Druckschwankungen auf Gefäßwände
- Effekte treten auch bei **Herzklappen** auf (Stethoskop)
- Sphygmomanometer (**Blutdruckmessgerät**):
 - Kein Ton bei komplettem Verschluss
 - Systolischer Druck; scharfe Peaks (Arterie kollabiert)
 - Weicherer Ton durch Freistrah

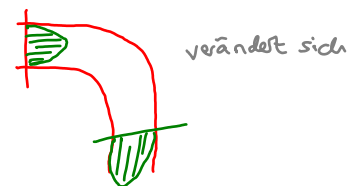
- **Gekrümmte Rohre**

Verzerrung der Poiseuille- Strömung

Sekundärströmungen, gegenläufige Wirbel im Querschnitt

Erhöhter Druckabfall

j. erhöht



Umströmte Objekte

- Widerstand von der Reynoldszahl abhängig
- Auftriebseffekte



8.3.3 Instationäre Strömungen

Pulsationen im Herz und Arterien, Dämpfung durch viskose Dissipation, nachgiebige Gefäße und Kapillaren.

Langsame Pulsation: quasistatische Betrachtung

Schnelle Pulsation: Grenzschicht (Stokes-Layer)

$$\delta_s \approx 5 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

Womersley Parameter

harmonische Reynoldszahl

$$\alpha = a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

Bsp. Aorta ($a = 0,0125 \text{ m}$, $\nu = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f = 1 \text{ Hz}$): $\alpha = 16,8$

8.3.4 Ähnlichkeitsgesetze

Reynoldszahl (Trägheits- und Reibungskräfte in zähen Flüssigkeiten)

Froudezahl (Trägheits- und Gewichtskräfte in Flüssigkeiten)

Pécletzahl (Wärmeleitung)

...

8.4 Strömungen im Kreislaufsystem

8.4.1 Gefäße

- Nachgiebig
 - nichtlinear
 - inhomogen
 - anisotrop
 - Vorspannung
- komplexe Geometrie
 - Verengungen und Verzweigungen, konisch
 - gekrümmte Bahnen
- teilweise aktiv
- können kollabieren
- Vereinfachungen
 - viskoelastisches Material
 - dickwandige, dünnwandige Rohre

Weichgewebe

Regelung von Q (Durchfluss)



Gefäßabmessungen (Burton)

Hochdrucksystem
→ höhere Wandstärke

Druckflussregelung
/

	Aorta linker Ventrikel	Arterien	Arteriolen	Sphinkter (Verschlussmuskeln)
Innen-Ø	25 mm	4 mm	30 µm	35 µm
Wand- dicke	2 mm	1 mm	20 µm	30 µm
Endothel				
Elastinfasern				
Muskel, glatt				
Kollagenfasern				
	<i>Festigkeit</i> <i>Elastizität</i>			
	Kapillare	Venolen	Venen	Vena cava rechter Vorhof
Innen-Ø	8 µm	20 µm	5 mm	30 mm
Wand- dicke	1 µm	2 µm	0,5 mm	1,5 mm
Endothel				
Elastinfasern				
Muskel, glatt				
Kollagenfasern				

Niederdrucksystem
→ geringere Wandstärke

Gefäße sind meist so kurz, dass die Strömung nach dem Einlauf oft nicht vollständig ausgebildet ist.



dynamische Zähigkeit

Number of red blood cells (mm ⁻³)	5 × 10 ⁶	Specific gravity	1.06
Number of white blood cells (mm ⁻³)	10 ⁴	Heart rate (min ⁻¹)	60–70
Blood volume (L)	5–6	Cardiac output (L min ⁻¹)	5–6
<u>Viscosity of whole blood (mPa s; cP) μ</u>	3–4	Stroke volume (mL)	70

Vessels	Diameter (mm)	Length (cm)	Wall thickness (mm)	Contained volume (cm ³ or mL)	Mean pressure (mmHg)	Average velocity (cm s ⁻¹)	Reynolds number	
							Average	Maximum
Aorta	25.0	40.0	2.0	100	100(av.)	40(av.)	3000	8500
Arteries	15–0.15	15.0	0.8	350	90(av.)	40–10	500	1000
Arterioles	0.14–0.01	0.2	0.02	50	60	10–0.1	0.7	—
Capillaries	0.008	0.05	0.001	300	30–20	< 0.1	0.002	—
Venules	0.01–0.14	0.2	0.002	300	20	< 0.3	0.01	—
Veins	0.15–15	18.0	0.6	2500	15–10	0.3–5	150	—
Vena cava	30.0	40.0	1.5	300	10–5	5–30	3000	—

⊙ In the larger vessels. (in den großen Gefäßen)

$\mu_{\text{Wasser}} = 1.01 \text{ mPa s (20}^\circ \text{C)}$

(Berger et al, 1996)

Turbulenzübergang
 $Re > 2300$
evtl. Turbulenzen

8.4.2 Beispiel zu Reibungsfreie Strömungen

- Elastisches Gefäß, Längsgeschwindigkeit $u(x,t)$, $\rho = \text{const.}$, $\mu = 0$

- Bernoulligleichung

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} v_0^2 + gz_0 + \frac{p_0}{\rho} = \text{const.}$$

(Bernoulli) (kin.) (pot.) (spann.)

* instationärer Anteil

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial x} = 0$$

- Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- Radialsteifigkeit dünnwandiges Rohr

$$c_r = \frac{E h}{2 a^2}$$

- Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E h}{2 \rho a}}$$

wichtig für Ultraschalluntersuchungen

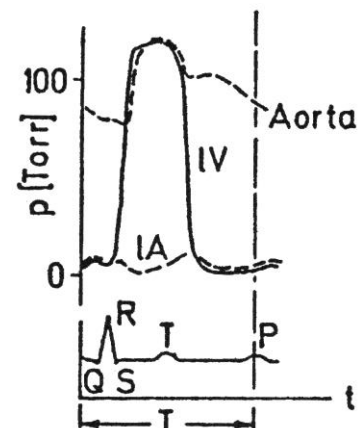
Beispiel zu Instationäre Strömungen (periodische Schwankungen)

$\rho = \text{const.}$, $\mu \neq 0$ Newtonsches Fluid

(Navier-Stokes Gleichung (nichtlinear, konvektiver Term))

Herzschlag

EKG





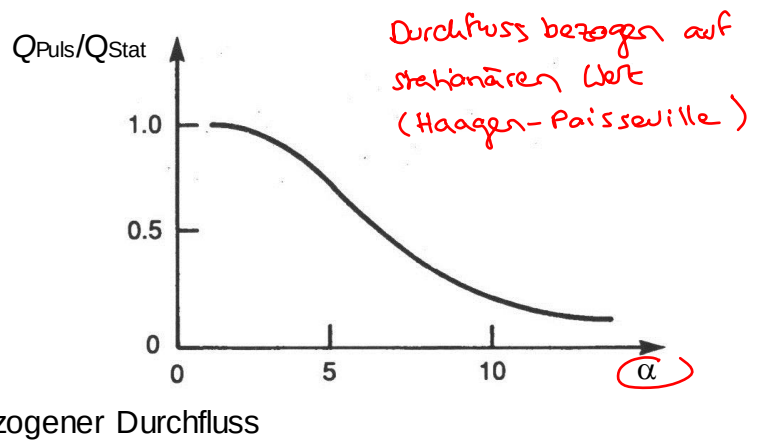
- Womersley (harmonische Reynoldszahl) $\alpha = a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$

Aorta $\alpha \approx 10 - 16$

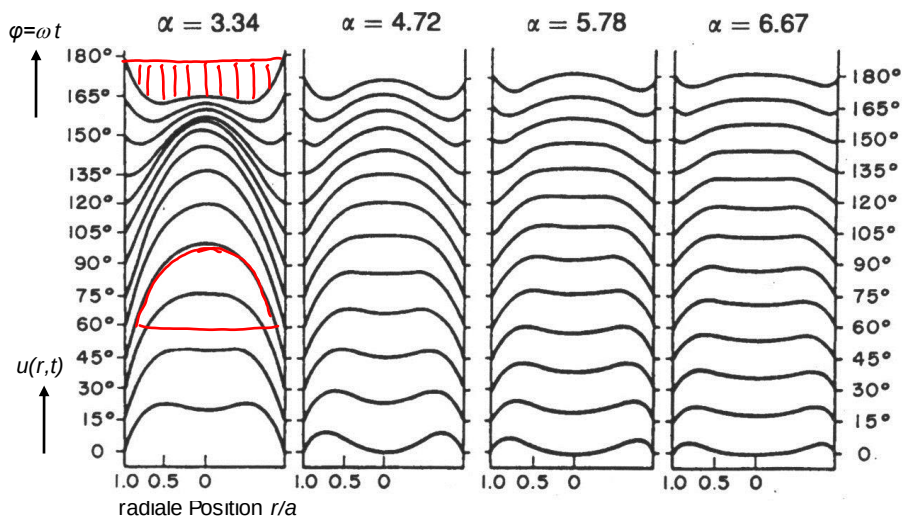
Arteriolen $\alpha \approx 0.02$

(Poisueille $\alpha = 0$,
da stationär)

Animal	Aorta	Femoral arteries
Mouse	1.5	—
Rabbit	4	1.6
Dog	10	2.4
Human	15	3
Elephant	50	—



Aufteilung der Kompressionswellen (gerades, starres Rohr)



(Berger et.al, 1996)

- Pulswellen haben große Wellenlänge $\lambda = c/f \approx 6 \text{ m}$ ($c \approx 6 \text{ m/s}$ in Aorta).
- Dämpfung kommt durch Gefäßwände, Flüssigkeitsdämpfung ist dagegen schwach.

8.5 Blutrheologie

Zähigkeit abhängig von:

- Schergeschwindigkeit
- Temperatur
- Gefäßdurchmesser
- HK-Wert

Messung: Viskosimeter

8.5.1 Unterschiedliche Modelle:

- Aufgabe
- Gefäßgröße
- Größe des betrachteten Gebiets

- Potenzgesetz (Ostwald - De Waele)

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^s$$

$s=1$: Newtonsches Fluid mit $\kappa \hat{=} \mu$

- Bingham, plastisch

$$\tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma}$$

z.B. Zahnpasta

→ braucht Mindestschubspannung zum Fließen

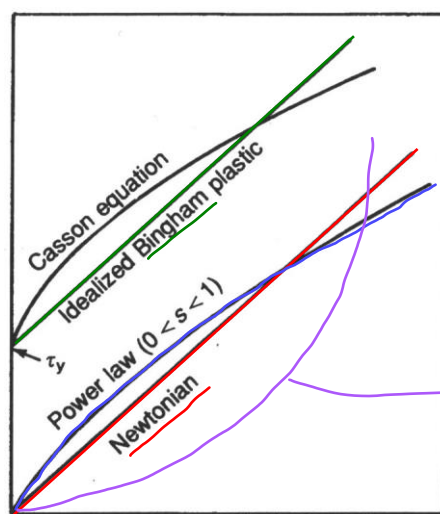
- Casson, plastisch

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + b\sqrt{\dot{\gamma}}$$

z.B. Malerfarbe? (Thixotrope Stoff mit Fließgrenze)

Schubspannung τ

„Fließgrenze“ τ_y



Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$

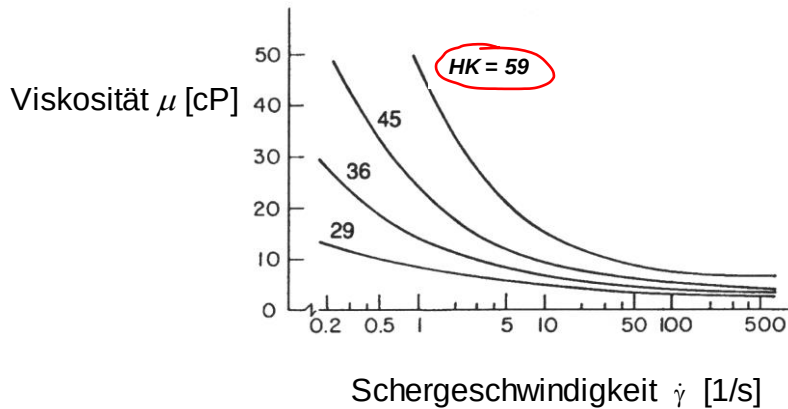
Thixotrop

→ wird dünner wenn man streicht / schert

Rheopex

→ wird steifer wenn man schnell schert
(z.B. schnell mischen und schnell rausziehen → ganz fest)

(Berger et.al, 1996)

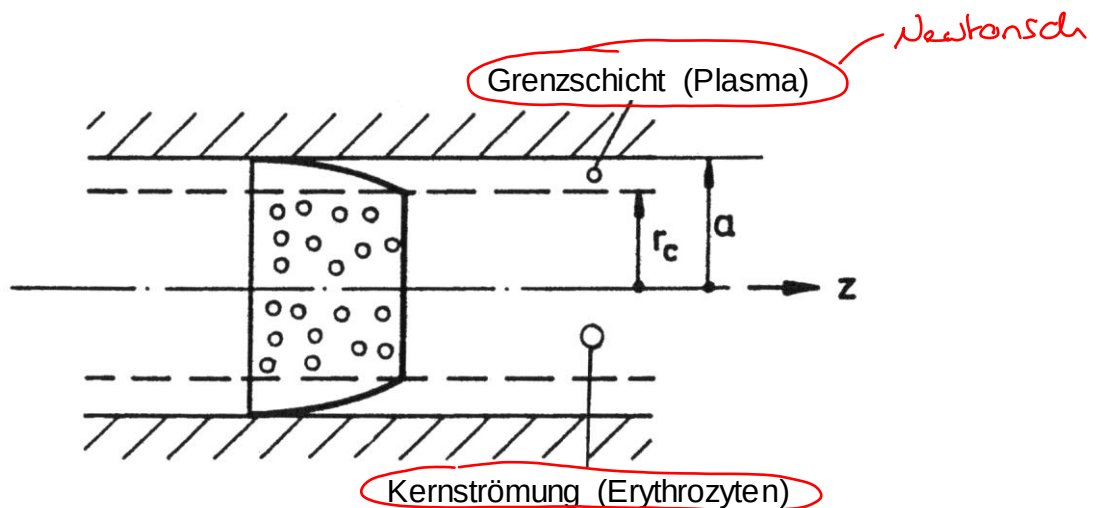


(Berger et.al, 1996)

8.5.2 Anomalien des Blutes

- Mit abnehmendem Gefäßdurchmesser wird nominelles μ kleiner
 - Skimming: Blutplättchenkonzentration am Rand geringer
 - Entmischung: Plasma am Rand, Festkörperchen im Kern
(Abhängig von Re -Zahl:
niedrig: elastische Teilchen wandern ins Zentrum, starre bleiben außen
hoch: elastische und starre Teilchen bilden Röhre)

Fahraeus-Lindquist Effekt



Modelle:

• Arterien

$\dot{\gamma} \gg 100 \text{ 1/s}$, Newtonsches Fluid

• Arteriolen

Nominal $\dot{\gamma} \gg 100 \text{ 1/s}$, aber Newtonfluid nicht passend

Casson mit $0.68 \leq s \leq 0.80$ für $5 \text{ 1/s} \leq \dot{\gamma} \leq 200 \text{ 1/s}$

• Kapillaren

Blut nicht mehr als homogene Flüssigkeit modellierbar,

Bewegung der Teilchen im (newtonschen) Fluid betrachten.

Strömung weitgehend stationär ohne Pulsation. Re -Zahl sehr klein, $\approx 10^{-3}$

* $D \approx 8 \mu\text{m}$:

Erythrozyten strömen als undeformierte "Pfropfen"

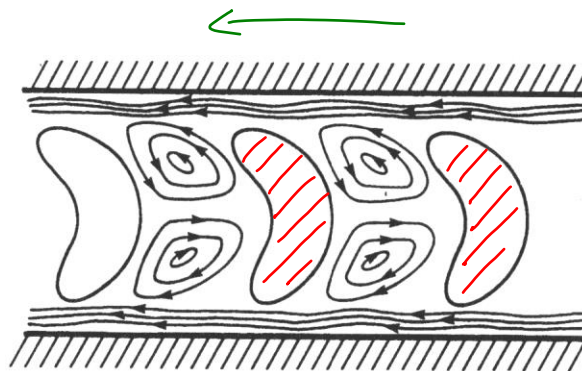
Bewegungsgleichung ist linear, Schleichströmung

* $3 < D < 7 \mu\text{m}$:

Erythrozyten sind kappenförmig deformiert

Grenzschicht am Gefäßrand

Bewegungsgleichung ist linear



(Berger et.al, 1996)

Stromlinien bezüglich eines mit den Körperchen bewegten Systems

* $D < 3 \mu\text{m}$:

Erythrozyten sind gefaltet

(Nominelle Viskosität stark vom Gefäßdurchmesser abhängig, 5 bis 10 - fach größer als bei Hagen-Poiseuille

• Venensystem

Keine Pulsationen vom Herz

Blutdruck ist niedrig

Bluttransport u. a. durch Muskeln in Gefäßnähe

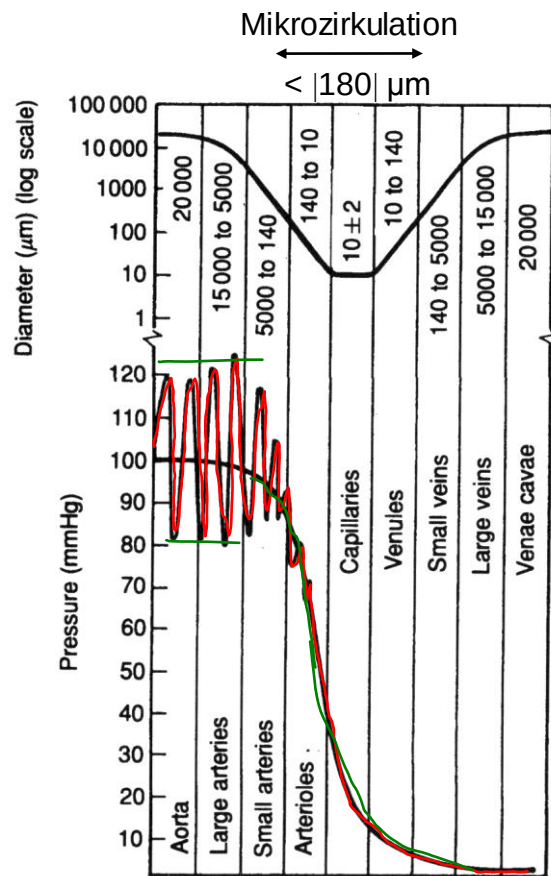
Rückflussverhinderung durch Venenklappen

Weitgehend stationäre Strömung

| Druck innerhalb oft niedriger als außerhalb der Vene : Gefäße können kollabieren

bei geringem Durchfluss
kann es zum kollabieren kommen
bei nachgiebigen Gefäßen

Durchmesser, Druck,
Pulsation und Druckabfall in
Gefäßen (Berger et.al, 1996)



Numerische Simulation CFD

Finite Volumen Verfahren

Finite Elemente

Randelemente

Visualisierung der Strömung

Messverfahren

- Sonographie, Dopplerverfahren (Frequenzverschiebung)
- Elektromagnetische Verfahren

Allgemeine Lösungsschritte

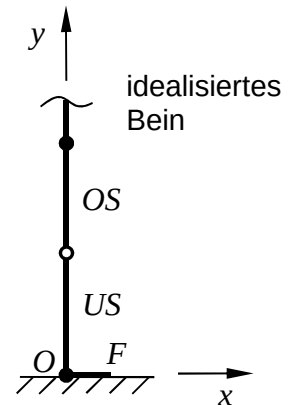
Montag, 19. November 2018 11:32

(→ bei Bearbeitung von Aufgaben)

- was ist gegeben
- was ist gesucht
- Zeichnung zum Sachverhalt
 - Koordinatensystem (Richtungen)
 - geometrische Angaben
 - Kräfte / Momente (Namen festlegen)
- gegebene Größen kennzeichnen
- Gleichungen aufstellen
- Auflösen nach gesuchten Größen

Aufgabe 1: Trägheitseigenschaften des Beins

Eine Person mit Masse M und Körpergröße H steht aufrecht auf dem Boden. Für ein Bein (Oberschenkel OS , Unterschenkel US , Fuß F) sollen mechanische Kenngrößen im dargestellten Koordinatensystem (Ursprung O) bestimmt werden. Das Knie- und das Sprunggelenk sind versteift.



Folgende anthropometrische Daten seien bekannt:

	Oberschenkel OS	Unterschenkel US	Fuß F
$\frac{\text{Segmentmasse}}{\text{Gesamtmasse}}$	0.14	0.04	0.01
$\frac{\text{Segmentlänge}}{\text{Körpergröße}}$	0.24	0.25	0.15
$\frac{\text{proximale Schwerpunktslage}}{\text{Segmentlänge}}$	0.46	0.41	0.44
$\frac{\text{Trägheitsradius bzgl. Segment Schwerpunkt}}{\text{Segmentlänge}}$	0.27	0.28	0.25

Anmerkung:

Bei der hier durchgeführten idealisierten Betrachtung liegen die Einzelschwerpunkte auf den Segmentachsen und die Fußhöhe wird vernachlässigt. Rechenoperationen mit Zahlenwerten sollen zur besseren Nachvollziehbarkeit des Lösungswegs hier **nicht** ausgeführt werden. Alle Ergebnisse sind in den gegebenen Größen auszudrücken.

a) Welche Masse hat das Bein?

$m =$ _____

b) Geben Sie die Segmentlängen an.

$l_{OS} =$ _____ , $l_{US} =$ _____ , $l_F =$ _____



c) Die Lage des Schwerpunkts eines Körpers K_i ist allgemein definiert als

$$\mathbf{r}_{S,i} = \frac{1}{m_i} \int_{K_i} \mathbf{r} dm.$$

Für einem aus n Einzelkörpern K_i bestehenden starren Gesamtkörper K der Masse m gilt damit

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int_K \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \int_{K_i} \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{S,i} m_i.$$

d) Geben Sie die Lagen der Schwerpunkte der Segmente bzgl. O an.

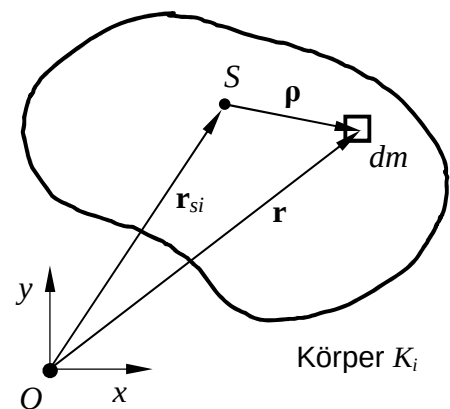
$$\mathbf{r}_{S,OS} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{S,US} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-0.41) \cdot 0.25 \cdot H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{S,F} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts des starren Beins.

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

f) Für einen Körper i gilt allgemein bei ebener Betrachtung für das Trägheitsmoment bezüglich eines Punktes O

$$\begin{aligned} J_{i,O} &= \int_{K_i} \text{---} dm \\ &= \int_{K_i} (\text{---} + r_{Si})^2 dm \\ &= \int_{K_i} \rho^2 dm + \int_{K_i} \text{---} dm + \int_{K_i} \text{---} dm \\ &= J_{i,S} + \text{---} \int_{K_i} dm + \text{---} \\ &= J_{i,S} + r_{Si}^2 m_i \end{aligned}$$





Damit ist für einen aus n Einzelkörpern K_i bestehenden Gesamtkörper K (starr)

$$J_O = \int_K r^2 dm = \sum_{i=1}^n J_{i,S} + r_{Si}^2 m_i$$

- g) Welcher Zusammenhang besteht allgemein zwischen Trägheitsradius k und Massenträgheitsmoment J ? Welche physikalische Dimension haben diese?

$$J = \text{-----}, \quad \dim(J) = \text{-----}, \quad \dim(k) = \text{-----}$$

- h) Geben Sie die Trägheitsradien und die Trägheitsmomente der Segmente bzgl. ihres Schwerpunkts an.

$$k_{OS,S} = 0.27 \cdot 0.24 \cdot H$$

$$k_{US,S} = \text{-----}$$

$$k_{FS,S} = 0.25 \cdot 0.15 \cdot H$$

$$J_{OS,S} = \text{-----}$$

$$J_{US,S} = 0.04 \cdot M \cdot (0.28 \cdot 0.25 \cdot H)^2$$

$$J_{FS,S} = 0.01 \cdot M \cdot (0.25 \cdot 0.15 \cdot H)^2$$

- i) Wie groß sind die Trägheitsmomente der einzelnen Segmente bzgl. des Ursprungs O ?

$$J_{OS,O} = 0.14 \cdot M \cdot (0.27 \cdot 0.24 \cdot H)^2 + 0.14 \cdot M \cdot (0.25 + (1 - 0.46) \cdot 0.24)^2 \cdot H^2$$

$$J_{US,O} = 0.04 \cdot M \cdot (0.28 \cdot 0.25 \cdot H)^2 + 0.04 \cdot M \cdot ((1 - 0.41) \cdot 0.25)^2 \cdot H^2$$

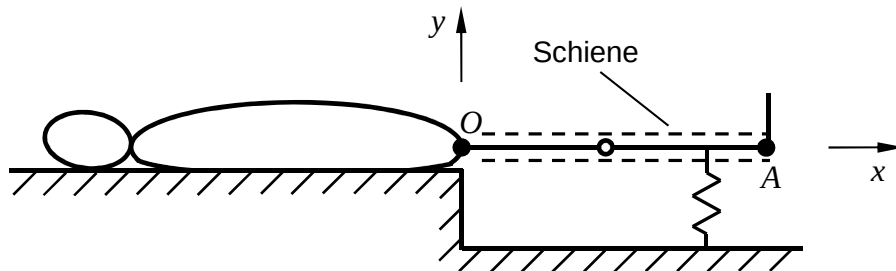
$$J_{FS,O} = \text{-----}$$

- j) Wie groß ist das Trägheitsmoment des starren Beins bzgl. O ?

$$J_O = \text{-----}$$

Aufgabe 2: Vorbereitung eines Schwingversuchs

Eine Person liegt auf einer Schwingplattform zur Bestimmung massengeometrischer Daten. Am Bein (Masse m , Länge l) trägt sie vom Hüftgelenk O ab eine Schiene (Masse m_{sch}). Die Schiene kann als schlanker Stab betrachtet werden.



- a) Geben Sie das Trägheitsmoment der Schiene bzgl. ihres Schwerpunkts an.

$$J_{sch,S} = \text{-----}$$

- b) Wie lautet das Trägheitsmoment der Schiene bzgl. des Hüftgelenks O ?

$$J_{sch,O} = \text{-----}$$

- c) Das Trägheitsmoment des Beins ohne Schiene bzgl. A betrage $J_{B,A}$, die Lage seines Schwerpunkts sei $\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Beins ohne Schiene bzgl. des Hüftgelenks O .

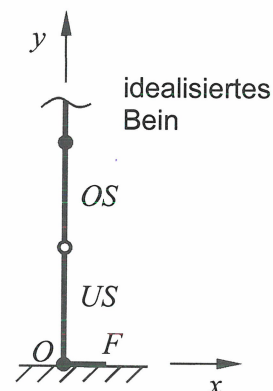
$$J_{B,O} = \text{-----}$$

- d) Geben Sie das Trägheitsmoment J_O des geschienten Beins bzgl. des Hüftgelenks O an.

$$J_O = \text{-----}$$

Aufgabe 1: Trägheitseigenschaften des Beins

Eine Person mit Masse M und Körpergröße H steht aufrecht auf dem Boden. Für ein Bein (Oberschenkel OS , Unterschenkel US , Fuß F) sollen mechanische Kenngrößen im dargestellten Koordinatensystem (Ursprung O) bestimmt werden. Das Knie- und das Sprunggelenk sind versteift.



Folgende anthropometrische Daten seien bekannt:

	Oberschenkel OS	Unterschenkel US	Fuß F
$\frac{\text{Segmentmasse}}{\text{Gesamtmasse}}$	0.14	0.04	0.01
$\frac{\text{Segmentlänge}}{\text{Körpergröße}}$	0.24	0.25	0.15
$\frac{\text{proximale Schwerpunktslage}}{\text{Segmentlänge}}$	0.46	0.41	0.44
$\frac{\text{Trägheitsradius bzgl. Segment Schwerpunkt}}{\text{Segmentlänge}}$	0.27	0.28	0.25

Anmerkung:

Bei der hier durchgeführten idealisierten Betrachtung liegen die Einzelschwerpunkte auf den Segmentachsen und die Fußhöhe wird vernachlässigt. Rechenoperationen mit Zahlenwerten sollen zur besseren Nachvollziehbarkeit des Lösungswegs hier **nicht** ausgeführt werden. Alle Ergebnisse sind in den gegebenen Größen auszudrücken.

a) Welche Masse hat das Bein?

$$m = (0,14 + 0,04 + 0,01) M$$

b) Geben Sie die Segmentlängen an.

$$l_{OS} = 0,24 H, \quad l_{US} = 0,25 H, \quad l_F = 0,15 H$$



c) Die Lage des Schwerpunkts eines Körpers K_i ist allgemein definiert als

$$\mathbf{r}_{S,i} = \frac{1}{m_i} \int_{K_i} \mathbf{r} \, dm.$$

Für einen aus n Einzelkörpern K_i bestehenden starren Gesamtkörper K der Masse m gilt damit

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int_K \mathbf{r} \, dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \int_{K_i} \mathbf{r} \, dm = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{S,i} m_i.$$

d) Geben Sie die Lagen der Schwerpunkte der Segmente bzgl. O an.

$$\mathbf{r}_{S,OS} = \begin{bmatrix} 0 \\ (0,25 + (1-0,46) \cdot 0,24) \cdot H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{S,US} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-0,41) \cdot 0,25 \cdot H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{S,F} = \begin{bmatrix} 0,44 \cdot 0,15 \cdot H \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts des starren Beins.

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{(0,14 + 0,04 + 0,01) M} \begin{bmatrix} 0,44 \cdot 0,15 \cdot H \cdot 0,01 \cdot M \\ (0,25 + (1-0,46) \cdot 0,24) \cdot H \cdot 0,14 \cdot M + (1-0,41) \cdot 0,25 \cdot H \cdot 0,04 \cdot M \end{bmatrix}$$

f) Für einen Körper i gilt allgemein bei ebener Betrachtung für das Trägheitsmoment bezüglich eines Punktes O

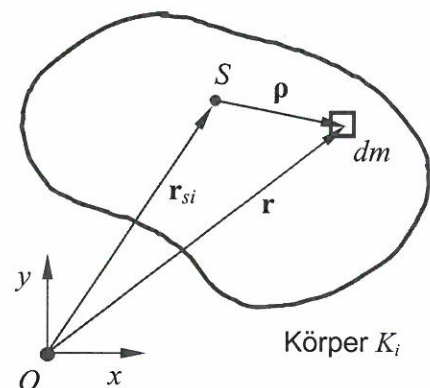
$$J_{i,O} = \int_{K_i} r^2 \, dm$$

$$= \int_{K_i} (\underline{\underline{0}} + r_{Si})^2 \, dm$$

$$= \int_{K_i} \rho^2 \, dm + \int_{K_i} r_{Si}^2 \, dm + \int_{K_i} 2 \underline{\underline{0}} r_{Si} \, dm$$

$$= J_{i,S} + r_{Si}^2 \int_{K_i} dm + 0$$

$$= J_{i,S} + r_{Si}^2 m_i$$



$$= 2 r_{Si} \underbrace{\int_{K_i} 0 \, dm}_{= 0, \text{ siehe c) Definition des Schwerpunkts}}$$

$= 0$, siehe c) Definition des Schwerpunkts



Damit ist für einen aus n Einzelkörpern K_i bestehenden Gesamtkörper K (starr)

$$J_O = \int_K r^2 dm = \sum_{i=1}^n J_{iO} = \sum_{i=1}^n J_{iS} + r_{Si}^2 m_i$$

- g) Welcher Zusammenhang besteht allgemein zwischen Trägheitsradius k und Massenträgheitsmoment J ? Welche physikalische Dimension haben diese?

$$J = \underline{m k^2}, \quad \dim(J) = \underline{kg m^2}, \quad \dim(k) = \underline{m}$$

- h) Geben Sie die Trägheitsradien und die Trägheitsmomente der Segmente bzgl. ihres Schwerpunkts an.

$$k_{OS,S} = 0.27 \cdot 0.24 \cdot H$$

$$k_{US,S} = \underline{0.28 \cdot 0.25 \cdot H}$$

$$k_{F,S} = 0.25 \cdot 0.15 \cdot H$$

$$J_{OS,S} = \underline{0.14 \cdot M \cdot (0.27 \cdot 0.24 \cdot H)^2}$$

$$J_{US,S} = 0.04 \cdot M \cdot (0.28 \cdot 0.25 \cdot H)^2$$

$$J_{F,S} = 0.01 \cdot M \cdot (0.25 \cdot 0.15 \cdot H)^2$$

- i) Wie groß sind die Trägheitsmomente der einzelnen Segmente bzgl. des Ursprungs O ?

$$J_{OS,O} = 0.14 \cdot M \cdot (0.27 \cdot 0.24 \cdot H)^2 + 0.14 \cdot M \cdot (0.25 + (1 - 0.46) \cdot 0.24)^2 \cdot H^2$$

$$J_{US,O} = 0.04 \cdot M \cdot (0.28 \cdot 0.25 \cdot H)^2 + 0.04 \cdot M \cdot ((1 - 0.41) \cdot 0.25)^2 \cdot H^2$$

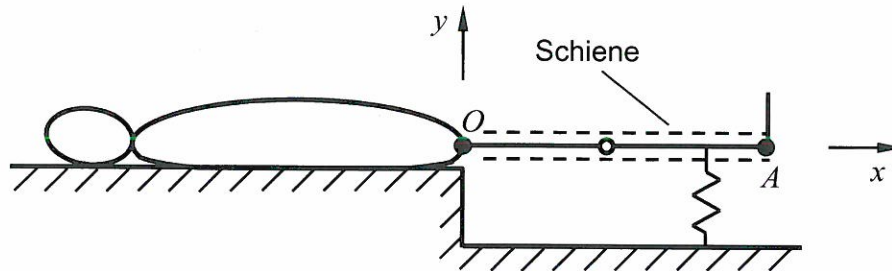
$$J_{F,O} = \underline{0.01 \cdot M \cdot (0.25 \cdot 0.15 \cdot H)^2 + (0.44 \cdot 0.15 \cdot H)^2 \cdot 0.01 \cdot M}$$

- j) Wie groß ist das Trägheitsmoment des starren Beins bzgl. O ?

$$J_O = \underline{J_{OS,O} + J_{US,O} + J_{F,O} = \dots}$$

Aufgabe 2: Vorbereitung eines Schwingversuchs

Eine Person liegt auf einer Schwingplattform zur Bestimmung massengeometrischer Daten. Am Bein (Masse m , Länge l) trägt sie vom Hüftgelenk O ab eine Schiene (Masse m_{sch}). Die Schiene kann als schlanker Stab betrachtet werden.



- a) Geben Sie das Trägheitsmoment der Schiene bzgl. ihres Schwerpunkts an.

$$J_{sch,S} = \frac{1}{12} m_{sch} l^2$$

- b) Wie lautet das Trägheitsmoment der Schiene bzgl. des Hüftgelenks O ?

$$J_{sch,O} = \frac{1}{12} m_{sch} l^2 + m_{sch} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m_{sch} l^2$$

- c) Das Trägheitsmoment des Beins ohne Schiene bzgl. A betrage $J_{B,A}$, die Lage seines Schwerpunkts sei $\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Beins ohne Schiene bzgl. des Hüftgelenks O .

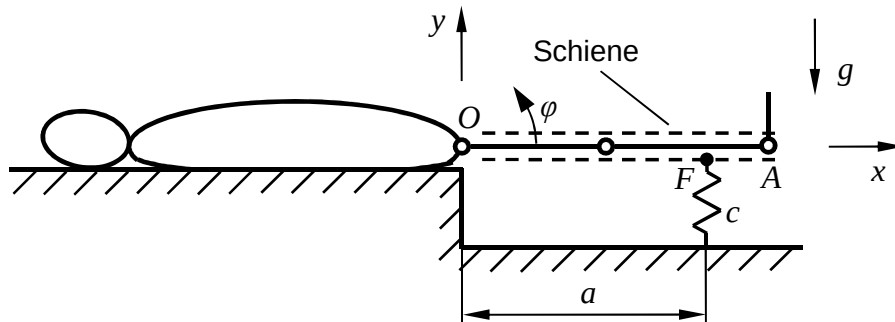
$$J_{B,O} = J_{B,A} - ((l - x_S)^2 + y_S^2)m + (x_S^2 + y_S^2)m = J_{B,A} + (2lx_S - l^2)m$$

- d) Geben Sie das Trägheitsmoment J_O des geschienten Beins bzgl. des Hüftgelenks O an.

$$J_O = J_{B,O} + J_{sch,O} = J_{B,A} + (2lx_S - l^2)m + \frac{1}{3} m_{sch} l^2$$

Aufgabe 1: Schwingversuch

Eine Person liegt auf einer Schwingplattform, an einem Bein trägt sie vom Hüftgelenk O ab bis über den Fuß eine Schiene. Das geschiente Bein liegt entspannt auf einer Feder (Steifigkeit c , Abstand a vom Hüftgelenk) auf. Diese wird so eingestellt, dass sich das geschiente Bein (Gewicht G , Schwerpunktslage $s = [x_s \ y_s]$, Trägheitsmoment J_O bzgl. O) in der horizontalen Lage im Gleichgewicht befindet. Die Anordnung führt nur kleine Schwingungen aus.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f = \text{-----}$

b) Welche verallgemeinerten Koordinaten eignen sich zur Beschreibung der Bewegung?

☐ $[x_F \ y_F]$

☐ $[y_A \ \varphi]$

☐ $[y_A]$

☐ $[\varphi]$

☐ $[y_O]$

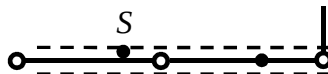
☐ $[y_F]$

☐ $[x_A]$

☐ $[a]$

☐ $[\varphi \ y_F]$

c) Tragen Sie Kräfte und Momente in die Freischnittsskizze ein (S: Massenschwerpunkt).



d) Welcher kinematische Zusammenhang besteht zwischen y_F und φ für kleine Auslenkungen?

$\varphi = \text{-----}$



- e) Berechnen Sie die Federkraft in der Ruhelage.

- f) Welche Beziehung gilt damit für die Federkraft in Abhängigkeit von φ ?

- g) Geben Sie den Drallsatz für das geschiente Bein an.

- h) Wie lautet die Bewegungsgleichung in Normalform für kleine Winkel φ ?

- i) Geben Sie die Eigenfrequenz des Systems an.

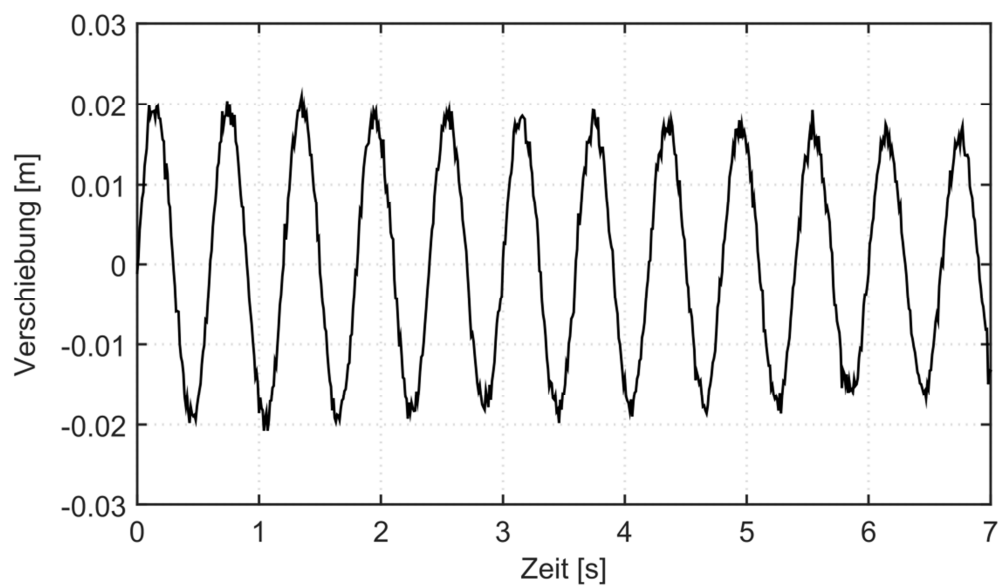
$\nu_0 =$ -----

- j) Als Messgröße wird nun die Federauslenkung y_F verwendet. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung aus h) in die Messgröße y_F um und lesen Sie die Eigenfrequenz ab. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus i).

Fazit: Eigenfrequenzen sind ----- gegen Transformation der beschreibenden Koordinaten.

- k) Nach Anstoßen wurde folgender Messschrieb aufgezeichnet. Bestimmen Sie daraus die Schwingfrequenz f_{Schw} des geschienten Beins. Wie groß ist die Eigenfrequenz ν_0 ?
Hinweis: Das reale System ist schwach gedämpft, hier kann es als ungedämpft betrachtet werden.

$f_{Schw} =$ ----- [Hz] , $\nu_0 =$ ----- [rad/s]



- l) Die Federsteifigkeit beträgt $c = 700 \text{ N/m}$, der Abstand der Feder von der Hüfte ist $a = 75 \text{ cm}$.
Wie groß ist das Trägheitsmoment J_O des geschienten Beins bzgl. des Hüftgelenks?

$J_O = \text{-----} [\text{kg m}^2]$

- m) Bei Verschieben der Feder in Richtung Fuß

- | | |
|--|--|
| ☐ bleibt das Trägheitsmoment J_O gleich | ☐ bleibt die Schwingfrequenz gleich |
| ☐ vergrößert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ vergrößert sich die Schwingfrequenz |
| ☐ verkleinert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ verkleinert sich die Schwingfrequenz |

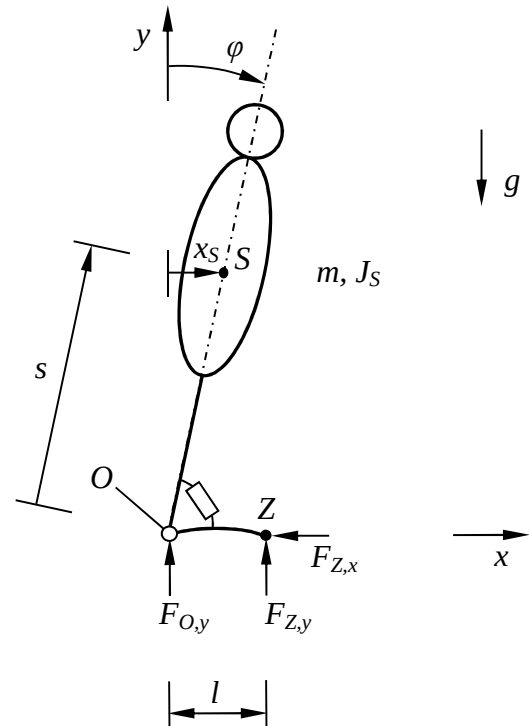
- n) Bei Extension (Streckung) des Fußes

- | | |
|--|--|
| ☐ bleibt das Trägheitsmoment J_O gleich | ☐ bleibt die Schwingfrequenz gleich |
| ☐ vergrößert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ vergrößert sich die Schwingfrequenz |
| ☐ verkleinert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ verkleinert sich die Schwingfrequenz |

Aufgabe 2: Aufrechtes Stehen in der Sagittalebene

Eine Person (Masse m , Massenträgheitsmoment J_S bzgl. des Schwerpunkts S) steht auf dem Boden, die Füße haben festen Bodenkontakt.

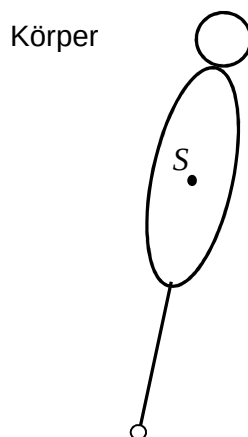
Der Kontakt zwischen Fußsohle und Boden wird stark vereinfacht in den Punkten O und Z angenommen (siehe Skizze). Körper und Fuß werden als zwei Starrkörper modelliert. Der Körper führt eine Kippbewegung φ aus, und die Aktivität der Beinmuskeln wird als Einzelmoment M im Sprunggelenk modelliert.



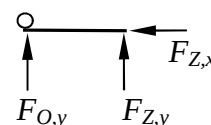
a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System und wie lauten die verallgemeinerten Koordinaten?

$f = \text{-----}$, $y = \text{-----}$

b) Ergänzen Sie die Kräfte und Momente in der Freischnittsskizze.



Fuß





c) Wie lautet das Massenträgheitsmoment J_O des Körpers bzgl. O ?

d) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunkts S und dem Winkel φ ?

$x_S =$ _____ , $y_S =$ _____

e) Geben Sie folgende Gleichungen für den Körper an:

----- (1)
Impulssatz in x-Richtung

----- (2)
Impulssatz in y-Richtung

----- (3)
Drallsatz bzgl. S

----- (4)
Drallsatz bzgl. O

f) Geben Sie folgende Gleichungen für den Fuß an:

----- (5)
"Impulssatz" in x-Richtung

----- (6)
"Impulssatz" in y-Richtung

----- (7)
"Drallsatz" bzgl. O

Für Bewegungen mit kleinen Winkeln φ gilt (Taylorreihe)

$\sin(\varphi) \approx$ _____ , $\cos(\varphi) \approx$ _____



Wie lauten damit die Gleichungen (1) bis (4) für Bewegungen mit kleinen Winkeln φ ?

----- (8)

----- (9)

----- (10)

----- (11)

Die Bewegungsgleichung ergibt sich durch Elimination der Zwangskräfte.

g) Geben Sie die Bewegungsgleichung sowohl in φ als auch in x_S als verallgemeinerte Koordinate an.

----- (12)

----- (13)

h) Ist die Bewegung um $\varphi = 0$ für verschwindendes Moment M stabil?

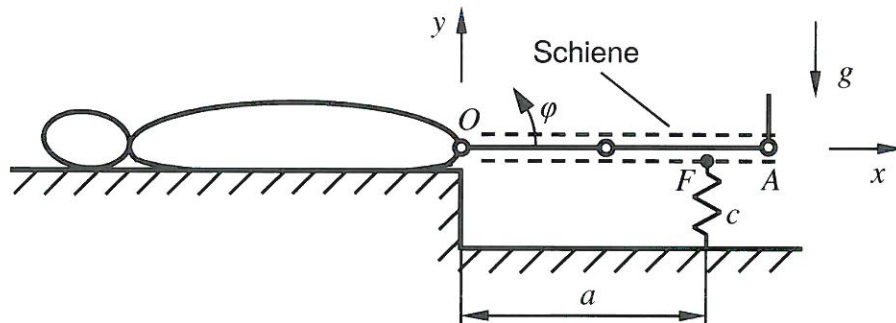
i) Enthält das System kinematische Schleifen? Wenn ja, wieviele?

j) Ist das Moment M im Sprunggelenk aus der vorgegebenen Kippbewegung $\varphi(t)$ berechenbar?

k) Welches Gelenkmoment M_0 ist nötig, um bei einer Verkipfung φ_0 des Körpers das Gleichgewicht zu halten?

Aufgabe 1: Schwingversuch

Eine Person liegt auf einer Schwingplattform, an einem Bein trägt sie vom Hüftgelenk O ab bis über den Fuß eine Schiene. Das geschiente Bein liegt entspannt auf einer Feder (Steifigkeit c , Abstand a vom Hüftgelenk) auf. Diese wird so eingestellt, dass sich das geschiente Bein (Gewicht G , Schwerpunktslage $s = [x_s \ y_s]$, Trägheitsmoment J_O bzgl. O) in der horizontalen Lage im Gleichgewicht befindet. Die Anordnung führt nur kleine Schwingungen aus.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f = \underline{\quad 1 \quad}$

b) Welche verallgemeinerten Koordinaten eignen sich zur Beschreibung der Bewegung?

zweier Kombinationen scheiden aus, da eine verallgemeinerte Koord. nicht in Abhängigkeit von zwei Größen sein kann.. Geeignet ist ein Winkel phi oder die Verschiebung eines repräsentativen Punktes (hier: F oder A)

☐ $[x_F \ y_F]$

☐ $[y_A \ \varphi]$

☒ $[y_A]$

☒ $[\varphi]$

☐ $[y_O]$

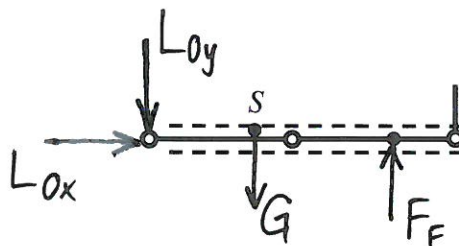
☒ $[y_F]$

☐ $[x_A]$

☐ $[a]$

☐ $[\varphi \ y_F]$

c) Tragen Sie Kräfte und Momente in die Freischnittsskizze ein (S : Massenschwerpunkt).



d) Welcher kinematische Zusammenhang besteht zwischen y_F und φ für kleine Auslenkungen?

$\varphi = \underline{\quad \frac{y_F}{a} \quad}$



- e) Berechnen Sie die Federkraft in der Ruhelage.

$$F_{F,0} = \frac{x_s}{a} G$$

- f) Welche Beziehung gilt damit für die Federkraft in Abhängigkeit von φ ?

$$F_F = \underbrace{\frac{x_s}{a} G}_{F_{F,0}} - ca\varphi$$

- g) Geben Sie den Drallsatz für das geschiente Bein an.

$$\int_0 \ddot{\varphi} = -Gx_s + \left(\frac{x_s}{a} G - ca\varphi\right)a \Leftrightarrow \int_0 \ddot{\varphi} = -ca^2\varphi$$

- h) Wie lautet die Bewegungsgleichung in Normalform für kleine Winkel φ ?

$$\ddot{\varphi} + \frac{ca^2}{J_0} \varphi = 0$$

- i) Geben Sie die Eigenfrequenz des Systems an.

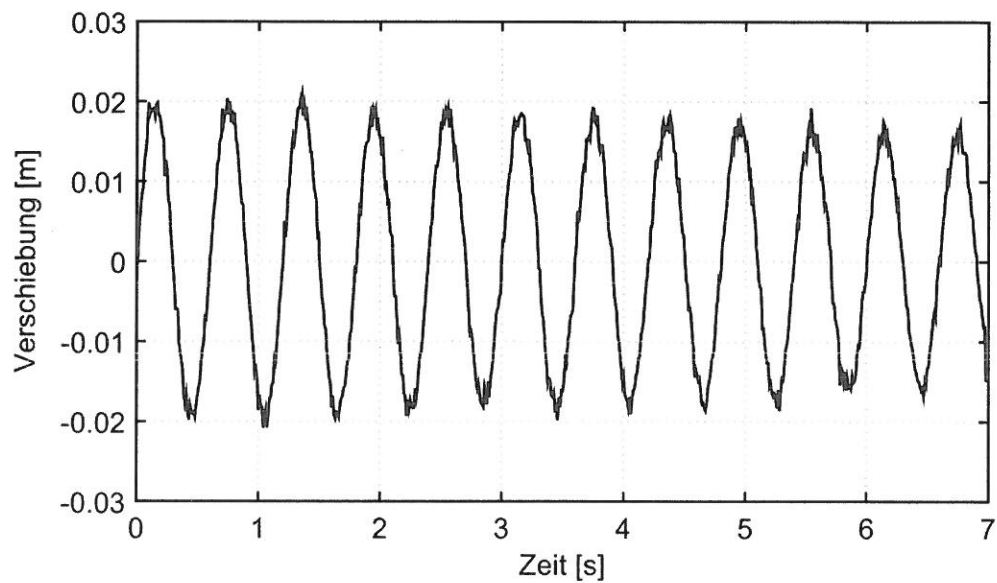
$$v_0 = \sqrt{\frac{ca^2}{J_0}}$$

- j) Als Messgröße wird nun die Federauslenkung y_F verwendet. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung aus h) in die Messgröße y_F um und lesen Sie die **Eigenfrequenz** ab. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus i).

Fazit: Eigenfrequenzen sind invariant gegen Transformation der beschreibenden Koordinaten.

- k) Nach Anstoßen wurde folgender Messschrieb aufgezeichnet. Bestimmen Sie daraus die Schwingfrequenz f_{Schw} des geschienten Beins. Wie groß ist die Eigenfrequenz v_0 ?
Hinweis: Das reale System ist schwach gedämpft, hier kann es als ungedämpft betrachtet werden.

$$f_{Schw} = \frac{5}{3} (\approx 1,667) \text{ [Hz]}, \quad v_0 = 2\pi \cdot \frac{5}{3} \text{ [rad/s]}$$



- l) Die Federsteifigkeit beträgt $c = 700 \text{ N/m}$, der Abstand der Feder von der Hüfte ist $a = 75 \text{ cm}$.
Wie groß ist das Trägheitsmoment J_O des geschienten Beins bzgl. des Hüftgelenks?

$J_O = \underline{\underline{3,62}} \text{ [kg m}^2\text{]} \quad \left(\text{aus } J_O = \frac{ca^2}{\omega^2} \right)$

- m) Bei Verschieben der Feder in Richtung Fuß

- | | |
|--|--|
| ☒ bleibt das Trägheitsmoment J_O gleich | ☐ bleibt die Schwingfrequenz gleich |
| ☐ vergrößert sich das Trägheitsmoment J_O | ☒ vergrößert sich die Schwingfrequenz |
| ☐ verkleinert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ verkleinert sich die Schwingfrequenz |

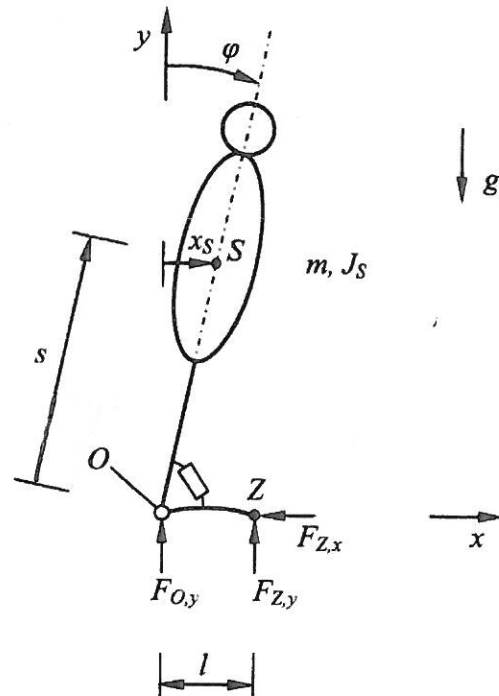
- n) Bei Extension (Streckung) des Fußes

- | | |
|--|---|
| ☐ bleibt das Trägheitsmoment J_O gleich | ☐ bleibt die Schwingfrequenz gleich |
| ☒ vergrößert sich das Trägheitsmoment J_O | ☐ vergrößert sich die Schwingfrequenz |
| ☐ verkleinert sich das Trägheitsmoment J_O | ☒ verkleinert sich die Schwingfrequenz |

Aufgabe 2: Aufrechtes Stehen in der Sagittalebene

Eine Person (Masse m , Massenträgheitsmoment J_S bzgl. des Schwerpunkts S) steht auf dem Boden, die Füße haben festen Bodenkontakt.

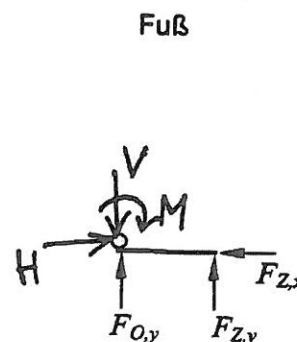
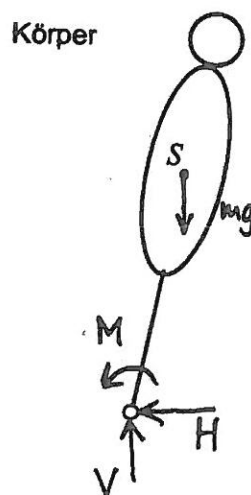
Der Kontakt zwischen Fußsohle und Boden wird stark vereinfacht in den Punkten O und Z angenommen (siehe Skizze). Körper und Fuß werden als zwei Starrkörper modelliert. Der Körper führt eine Kippbewegung φ aus, und die Aktivität der Beinmuskeln wird als Einzelmoment M im Sprunggelenk modelliert.



- a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System und wie lauten die verallgemeinerten Koordinaten?

$f = 1$, $y = \varphi$ oder $y = x_S$

- b) Ergänzen Sie die Kräfte und Momente in der Freischnittsskizze.





- c) Wie lautet das Massenträgheitsmoment J_O des Körpers bzgl. O ?

$$J_O = J_S + m s^2$$

- d) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunkts S und dem Winkel φ ?

$$x_S = s \sin \varphi, \quad y_S = s \cos \varphi$$

- e) Geben Sie folgende Gleichungen für den Körper an:

$$m \ddot{x}_S = -H$$

Impulssatz in x -Richtung (1)

$$m \ddot{y}_S = V - mg$$

Impulssatz in y -Richtung (2)

$$J_S \ddot{\varphi} = V s \sin \varphi + H s \cos \varphi - M$$

Drallsatz bzgl. S (3)

$$(J_S + m s^2) \ddot{\varphi} = -M + m g s \sin \varphi$$

Drallsatz bzgl. O (4)

- f) Geben Sie folgende Gleichungen für den Fuß an:

$$0 = H - F_{z,x}$$

"Impulssatz" in x -Richtung (5)

$$0 = F_{a,y} + F_{z,y} - V$$

"Impulssatz" in y -Richtung (6)

$$0 = M - l F_{z,y}$$

"Drallsatz" bzgl. O (7)

Für Bewegungen mit kleinen Winkeln φ gilt (Taylorreihe)

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \quad \cos(\varphi) \approx 1$$



Wie lauten damit die Gleichungen (1) bis (4) für Bewegungen mit kleinen Winkeln φ ?

$$m\ddot{x}_s = ms\ddot{\varphi} = -H \quad (8)$$

$$m\ddot{y}_s = 0 = V - mg \quad (9)$$

$$J_s\ddot{\varphi} = Vs\varphi + Hs - M \quad (10)$$

$$(J_s + ms^2)\ddot{\varphi} = -M + mgs\varphi \quad (11)$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich durch Elimination der Zwangskräfte.

g) Geben Sie die Bewegungsgleichung sowohl in φ als auch in x_s als verallgemeinerte Koordinate an.

Normalform

$$(J_s + ms^2)\ddot{\varphi} - mgs\varphi = -M \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} - \frac{mgs}{(J_s + ms^2)}\varphi = -\frac{M}{(J_s + ms^2)} \quad (12)$$

$$(J_s + ms^2)\frac{\ddot{x}_s}{s} - mgx_s = -M \quad \text{oder} \quad \ddot{x}_s - \frac{mgs}{(J_s + ms^2)}x_s = \frac{Ms}{(J_s + ms^2)} \quad (13)$$

h) Ist die Bewegung um $\varphi = 0$ für verschwindendes Moment M stabil?

nein

i) Enthält das System kinematische Schleifen? Wenn ja, wieviele?

nein

j) Ist das Moment M im Sprunggelenk aus der vorgegebenen Kippbewegung $\varphi(t)$ berechenbar?

$$\text{ja, } M = mgs\varphi - (J_s + ms^2)\ddot{\varphi}$$

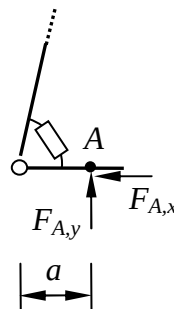
k) Welches Gelenkmoment M_0 ist nötig, um bei einer Verkippung φ_0 des Körpers das Gleichgewicht zu halten?

$$M_0 = mgs\varphi_0 = mgx_{s_0}$$

Aufgabe 1: Aufrechtes Stehen in der Sagittalebene

(Fortsetzung von Aufgabe 2 aus Arbeitsblatt A 6)

Der Kontakt zwischen Fußsohle und Boden soll nun nicht wie in Aufgabe 2 aus Arbeitsblatt A 6 durch Aufstand in zwei Punkten, sondern durch eine einzelne Ersatzkraft im Punkt A beschrieben werden (z.B. für Vergleich mit Betrag und Angriffspunkt einer Ersatzkraft aus Messung mit Zellenmessplatte).



- a) Geben Sie damit den "Impulssatz" in y -Richtung und den "Drallsatz" bzgl. O für den Fuß an.

----- (14)

----- (15)

- b) An welcher Position a_0 greift die Ersatzkraft in der Gleichgewichtslage φ_0 an?

Wie weit kann sich die Person neigen, ohne zu Boden zu fallen?

Zur Untersuchung der Stabilität der Gleichgewichtslage wird eine kleine Störung $\varepsilon = \varphi - \varphi_0$ betrachtet, die auf das im Gleichgewicht befindliche System einwirkt.

- c) Geben Sie die ersten beiden Ableitungen der Störbewegung ε an.

$\dot{\varepsilon} =$ _____, $\ddot{\varepsilon} =$ _____



- d) Welche Bewegungsgleichung ergibt sich für die kleine Störbewegung ε ?

- e) Aus welchem Term lässt sich die Eigenfrequenz ν_0 bestimmen?

$$\nu_0^2 = \text{-----}$$

Hinweis: Der Übergang von reellen Werten zu imaginären Werten für die Eigenfrequenz entspricht dem Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten.

- f) Ist die Gleichgewichtslage stabil?

Zur Stabilisierung der Gleichgewichtslage ist somit ein Regler erforderlich. Bei Annahme eines Reglers mit Verstärkungsfaktor k lautet das Gelenkmoment $M = M_0 + k \varepsilon$ (Moment proportional zur Störung, P-Regler).

- g) Geben Sie die Bewegungsgleichung des geregelten Systems an.

Für welchen Verstärkungsfaktor k wird das System stabilisiert?

- h) Aufgrund der einseitigen Bindung ist das Moment $M = M_0 + k \varepsilon$ in der Größe beschränkt, da sonst Abheben eintreten kann. Der Aufstandspunkt der Ersatzkraft ist nun $a = a_0 + a_k$. Aus welcher Ungleichung lassen sich die Schranken für M ableiten?

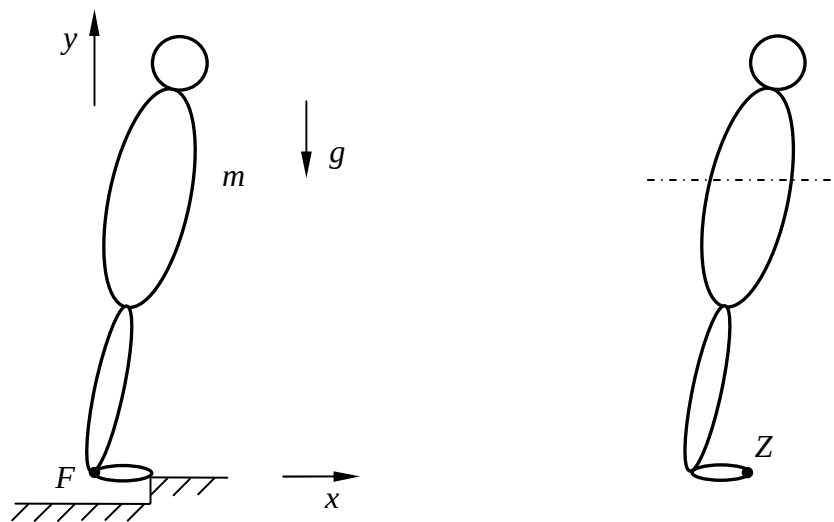
$$0 < \text{-----} < \text{-----}$$

Aufgabe 2: Abschätzung von Kräften im Sprunggelenk

Eine Person (Masse $m = 100 \text{ kg}$) steht einbeinig auf den Zehenspitzen (Punkt Z). Der Abstand zwischen Sprunggelenk (Punkt O) und Zehenspitzen beträgt 25 cm , der zwischen Sprunggelenk und Ferse (Punkt F) beträgt 5 cm . Der Fuß sei waagrecht und die Achillessehne sei um den Winkel $\gamma = 0.1 \text{ rad}$ geneigt.

Wie groß ist die mittlere Flächenpressung im Gelenk bei Annahme die projizierte Gelenkfläche habe 5 cm^2 ?

a) Betrachtung Gesamtkörper (Erstarrungsprinzip)

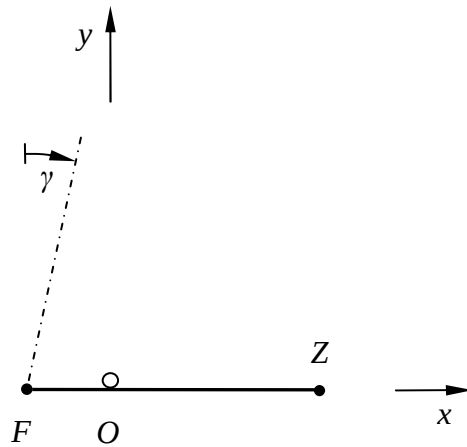


Tragen Sie den Schwerpunkt auf der vorgegebenen Schwerpunktslinie ein und tragen Sie die möglichen Kräfte und Momente ein.

Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Gesamtkörper an.

Wie groß ist die Aufstandskraft im Punkt Z ?

b) Betrachtung Fuß



Tragen Sie die Kräfte und Momente ein.

Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Fuß an.

Bestimmen Sie die Kräfte in der Achillessehne und im Sprunggelenk.

Wie groß ist die gemittelte Flächenpressung im Sprunggelenk?

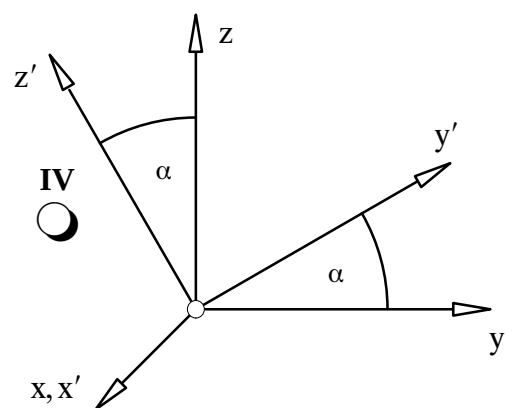
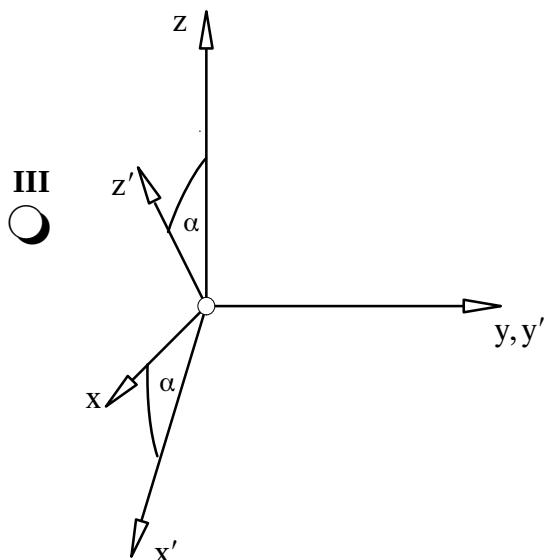
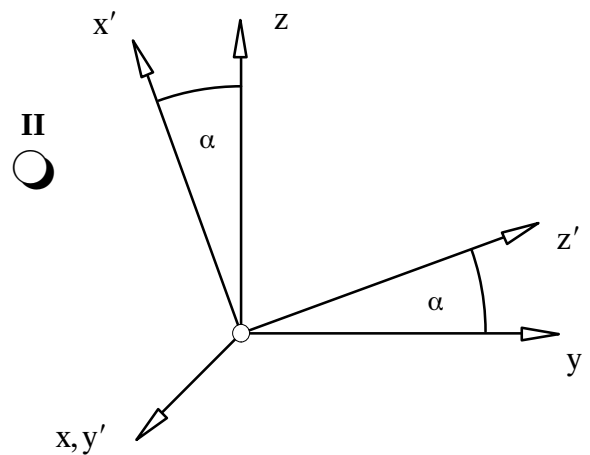
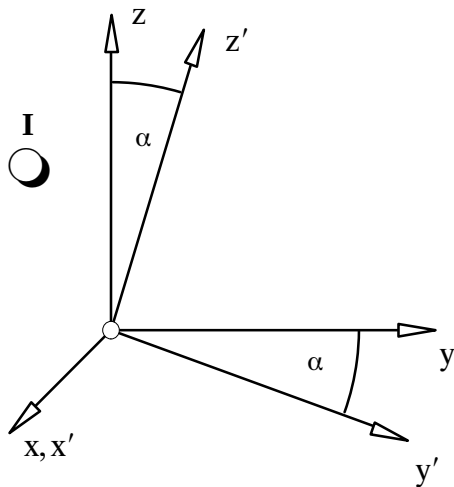
$\sigma =$ _____

Aufgabe 3: Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen K und K' lautet

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?



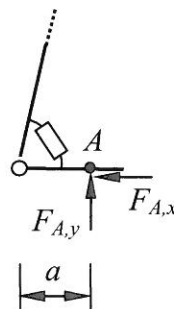
b) Wie lautet die Transformationsmatrix für die in Bild II dargestellte Drehung?

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1: Aufrechtes Stehen in der Sagittalebene

(Fortsetzung von Aufgabe 2 aus Arbeitsblatt A 6)

Der Kontakt zwischen Fußsohle und Boden soll nun nicht wie in Aufgabe 2 aus Arbeitsblatt A 6 durch Aufstand in zwei Punkten, sondern durch eine einzelne Ersatzkraft im Punkt A beschrieben werden (z.B. für Vergleich mit Betrag und Angriffspunkt einer Ersatzkraft aus Messung mit Zellenmessplatte).



- a) Geben Sie damit den "Impulssatz" in y -Richtung und den "Drallsatz" bzgl. O für den Fuß an.

$$0 = -V + F_{A,y} \quad (14)$$

$$0 = M - a F_{A,y} \quad (15)$$

- b) An welcher Position a_0 greift die Ersatzkraft in der Gleichgewichtslage φ_0 an?

$$a_0 = \frac{mgs\varphi_0}{mg} = s\varphi_0 = x_{s0}$$

Wie weit kann sich die Person neigen, ohne zu Boden zu fallen?

$$0 \leq a \leq l \quad \text{oder} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{l}{s}$$

Zur Untersuchung der Stabilität der Gleichgewichtslage wird eine kleine Störung $\varepsilon = \varphi - \varphi_0$ betrachtet, die auf das im Gleichgewicht befindliche System einwirkt.

- c) Geben Sie die ersten beiden Ableitungen der Störbewegung ε an.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varphi}, \quad \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varphi}$$



- d) Welche Bewegungsgleichung ergibt sich für die kleine Störbewegung ε ?

$$(J_s + ms^2) \ddot{\varepsilon} - mgs \varepsilon = 0$$

- e) Aus welchem Term lässt sich die Eigenfrequenz ν_0 bestimmen?

$$\nu_0^2 = -\frac{-mgs}{J_s + ms^2}$$

Hinweis: Der Übergang von reellen Werten zu imaginären Werten für die Eigenfrequenz entspricht dem Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten.

- f) Ist die Gleichgewichtslage stabil?

nein

Zur Stabilisierung der Gleichgewichtslage ist somit ein Regler erforderlich. Bei Annahme eines Reglers mit Verstärkungsfaktor k lautet das Gelenkmoment $M = M_0 + k \varepsilon$ (Moment proportional zur Störung, P-Regler).

- g) Geben Sie die Bewegungsgleichung des geregelten Systems an.

$$(J_s + ms^2) \ddot{\varepsilon} + (k - mgs) \varepsilon = 0$$

Für welchen Verstärkungsfaktor k wird das System stabilisiert?

$$k > mgs$$

- h) Aufgrund der einseitigen Bindung ist das Moment $M = M_0 + k \varepsilon$ in der Größe beschränkt, da sonst Abheben eintreten kann. Der Aufstandspunkt der Ersatzkraft ist nun $a = a_0 + a_k$. Aus welcher Ungleichung lassen sich die Schranken für M ableiten?

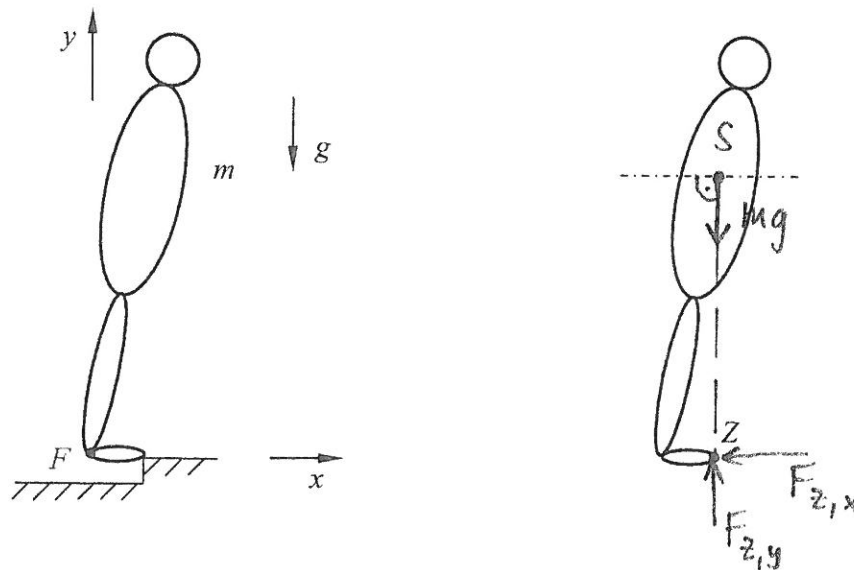
$$0 < a_0 + \frac{k \varepsilon}{mg} < l$$

Aufgabe 2: Abschätzung von Kräften im Sprunggelenk

Eine Person (Masse $m = 100 \text{ kg}$) steht einbeinig auf den Zehenspitzen (Punkt Z). Der Abstand zwischen Sprunggelenk (Punkt O) und Zehenspitzen beträgt 25 cm , der zwischen Sprunggelenk und Ferse (Punkt F) beträgt 5 cm . Der Fuß sei waagrecht und die Achillessehne sei um den Winkel $\gamma = 0.1 \text{ rad}$ geneigt.

Wie groß ist die mittlere Flächenpressung im Gelenk bei Annahme die projizierte Gelenkfläche habe 5 cm^2 ?

a) Betrachtung Gesamtkörper (Erstarrungsprinzip)



Tragen Sie den Schwerpunkt auf der vorgegebenen Schwerpunktslinie ein und tragen Sie die möglichen Kräfte und Momente ein.

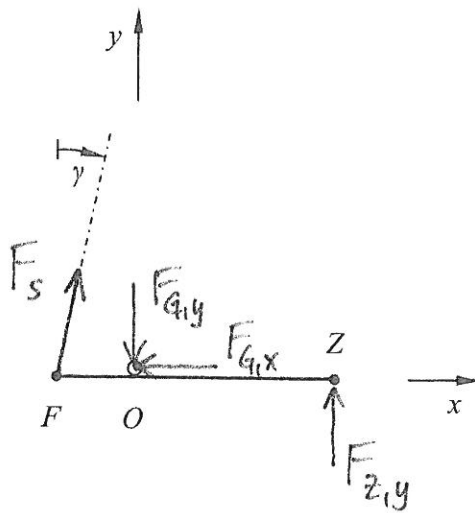
Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Gesamtkörper an.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & : F_{z,x} = 0 \\ \sum F_y = 0 & : F_{z,y} - mg = 0 \\ \sum M_z = 0 & : 0 = 0 \end{aligned}$$

Wie groß ist die Aufstandskraft im Punkt Z ?

$$F_{z,y} = mg = 1000 \text{ N}$$

b) Betrachtung Fuß



Tragen Sie die Kräfte und Momente ein.

Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Fuß an.

$$\sum F_x = 0: F_s \sin \gamma - F_{G,x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_s \cos \gamma - F_{G,y} + F_{z,y} = 0$$

$$\sum M_z = 0: F_s \cos \gamma \cdot 30 \text{ cm} - F_{G,y} \cdot 25 \text{ cm} = 0$$

$$\gamma = 0,1 \text{ rad} \rightarrow \sin \gamma \approx \gamma$$

$$\cos \gamma \approx 1$$

$$F_s \cdot 0,1 - F_{G,x} = 0$$

$$F_s - F_{G,y} + F_{z,y} = 0$$

$$F_s \cdot 30 \text{ cm} - F_{G,y} \cdot 25 \text{ cm} = 0$$

Bestimmen Sie die Kräfte in der Achillessehne und im Sprunggelenk.

$$F_s = 5 F_{z,y} = 5000 \text{ N}$$

$$F_{G,y} = 5000 \text{ N} + 1000 \text{ N} = 6000 \text{ N}$$

$$F_{G,x} = 5000 \text{ N} \cdot 0,1 = 500 \text{ N}$$

Wie groß ist die gemittelte Flächenpressung im Sprunggelenk?

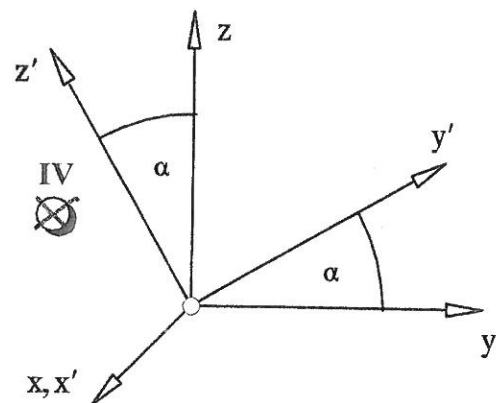
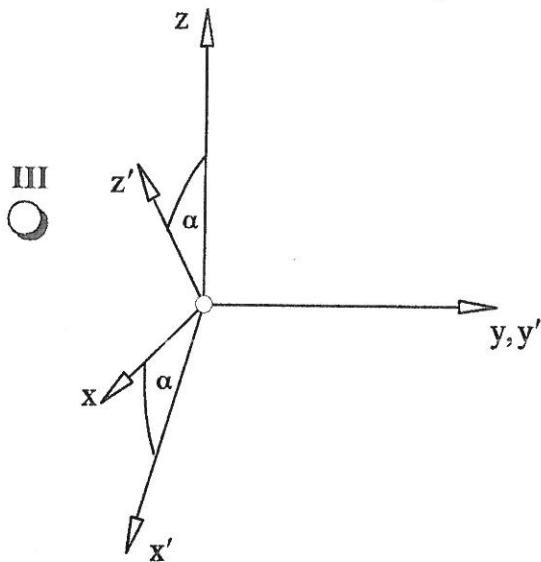
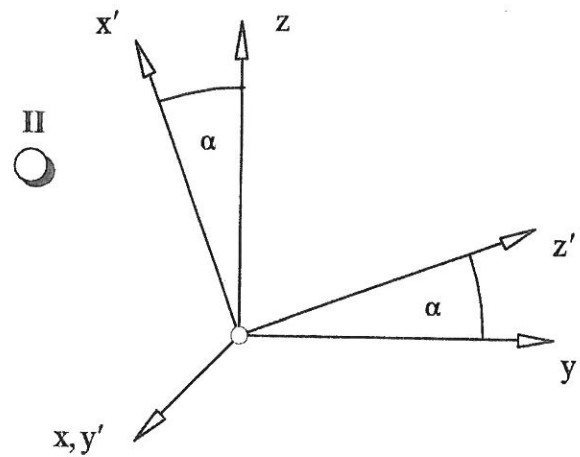
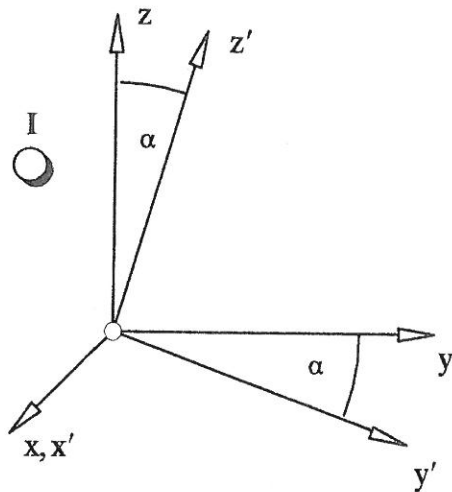
$$\sigma = \frac{\sqrt{F_{G,y}^2 + F_{G,x}^2}}{A} = \frac{6021 \text{ N}}{500 \text{ mm}^2} \approx 12 \text{ MPa}$$

Aufgabe 3: Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen K und K' lautet

$$C_{KK'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

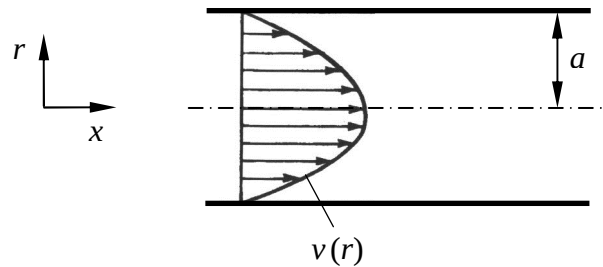
a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?



b) Wie lautet die Transformationsmatrix für die in Bild II dargestellte Drehung?

$$C_{KK'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1: Laminare Strömung im geraden Rohr



Es wird die stationäre, inkompressible, laminare, reibungsbehaftete Strömung eines Newtonschen Fluids in einem kreisrunden, geraden Rohr mit Innenradius a betrachtet.

Das radiale Geschwindigkeitsprofil kann mit dem Druckabfall Δp zwischen Eintritts- und Austrittsquerschnitt, der dynamischen Zähigkeit μ und der Rohrlänge L angegeben werden als

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (a^2 - r^2).$$

Geben Sie die maximale Strömungsgeschwindigkeit an.

$$v_{\max} = \text{-----}$$

Berechnen Sie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

$$V = \frac{1}{A} \int v(r) dA = \text{-----}$$

Welcher Durchfluss (Volumen pro Zeit) ergibt sich damit?

$$Q = \text{-----}$$

Wie groß ist der Druckabfall im Rohrstück?

$$\Delta p = \text{-----} \quad (\text{Hagen-Poiseuille-Gesetz})$$

Berechnen Sie die Schergeschwindigkeit.

$$\dot{\gamma}(r) = \text{-----}$$

Geben Sie den minimalen und den maximalen Betrag der Schergeschwindigkeit an.
Wo treten diese auf?

$$|\dot{\gamma}|_{\min} = \text{-----} \text{ bei } r = \text{-----}, \quad |\dot{\gamma}|_{\max} = \text{-----} \text{ bei } r = \text{-----}$$



Welche Schubspannung wirkt auf die Rohrwand?

$$\tau = \text{-----}$$

Welche Kraft übt das Fluid auf das Rohr aus?

$$F = \text{-----}$$

Wie groß ist der Druckabfall in der Aorta infolge der Zähigkeit des Blutes?

Es seien der Innendurchmesser $D_i = 2.5 \text{ cm}$, die Länge $L = 40 \text{ cm}$, der Durchfluss $Q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$ und die dynamische Zähigkeit $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s} = 4 \text{ mPa s}$.

$$\Delta p_{\text{Aorta}} = \text{-----} \text{ Pa}$$

Welche Zahlenwerte ergeben sich für die (veralteten) Maßeinheiten "mm WS" und "mm Hg" (Torr)? (Hinweis: $\rho_{\text{Hg}} = 13300 \text{ kg/m}^3$)

$$\Delta p_{\text{Aorta}} = \text{-----} \text{ mm WS}$$

$$\Delta p_{\text{Aorta}} = \text{-----} \text{ mm Hg}$$

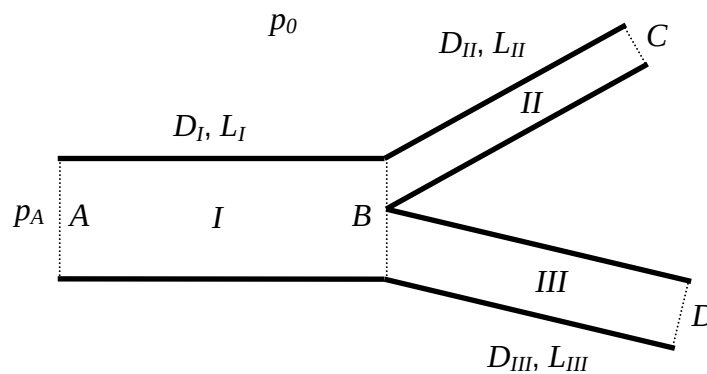
Wie groß ist der Druckabfall in einer Arterie mit Innendurchmesser $D_i = 2.5 \text{ mm}$ und Länge $L = 10 \text{ cm}$ bei gleicher mittlerer Strömungsgeschwindigkeit (vgl. Merkblatt M 15.16)?

$$\Delta p_{\text{Arterie}} = \text{-----} \Delta p_{\text{Aorta}}$$

Aufgabe 2: Gefäßverzweigung

Eine Gefäßverzweigung (inkompressibles Fluid, dynamische Zähigkeit μ) wird mit kreisrunden Rohrstücken modelliert. Das Rohrstück *I* (Durchmesser D_I , Länge L_I) verzweigt sich am Querschnitt *B* in die beiden Rohrstücke *II* (Durchmesser D_{II} , Länge L_{II}) und *III* (Durchmesser D_{III} , Länge L_{III}).

Am Eintrittsquerschnitt *A* wird der Überdruck p_A gemessen, der Umgebungsdruck beträgt p_0 . Es sollen die Strömungsverhältnisse in den Gefäßen nach der Verzweigungsstelle ermittelt werden.



In welchem Zusammenhang stehen die Durchflüsse (Volumenströme) Q_I , Q_{II} und Q_{III} ?

Welcher Überdruck ergibt sich bei freiem Auslauf?

$p_C = \text{-----}$, $p_D = \text{-----}$.

Was gilt für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohrstück *I* in Abhängigkeit des Durchflusses Q_I ?

$V_I = \text{-----}$



Wie groß ist der Druck an der Verzweigungsstelle B in Abhängigkeit des Durchflusses Q_I ?

$$p_B = \text{-----}$$

Wie lauten für die Rohrstücke II und III die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und der Druckabfall in Abhängigkeit der Durchflüsse Q_{II} und Q_{III} ?

$$V_{II} = \text{-----}$$

$$V_{III} = \text{-----}$$

$$\Delta p_{II} = \text{-----}$$

$$\Delta p_{III} = \text{-----}$$

In welchem Zusammenhang stehen die Druckabfälle in den Rohrstücken II und III zum Druck p_B ?

Bestimmen Sie den Druck an der Verzweigungsstelle B und den Durchfluss im Rohrstück I .

$$p_B = \text{-----}$$

$$Q_I = \text{-----}$$

In welchem Verhältnis stehen die Durchflüsse in den Rohrstücken II und III ?

$$\frac{Q_{II}}{Q_{III}} = \text{-----}$$



Aufgabe 3: Querschnittssprung in einer Aorta

Bei einer Untersuchung der Aorta zeigt sich im Röntgenbild eine Verengung des Querschnitts von A_1 auf A_2 . Es ist bekannt, dass sich hinter der Verengung der Strahl weiter auf A_3 einschnürt, wobei aus Modellversuchen die Kontraktionszahl $k = A_3/A_2$ ermittelt wurde. Die Dichte des Blutes sei ρ , der Durchfluss betrage Q , die Strömung sei stationär und reibungsfrei.

Skizzieren Sie idealisiert die Querschnittsverengung.

Die Bernoulligleichung lautet (M 15.11) $\int_{x_0}^x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 + gz_0 + \frac{p_0}{\rho} = \text{const.}$

Welche Vereinfachungen ergeben sich bei stationärer und horizontal verlaufender Strömung?

-----, -----

Aus welcher Gleichung ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten in den Querschnitten A_1 , A_2 und A_3 ? Bestimmen Sie diese.

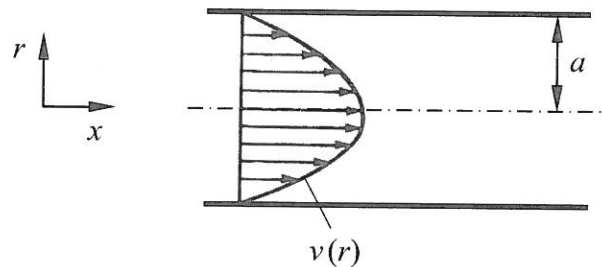
$v_1 =$ -----, $v_2 =$ -----, $v_3 =$ -----

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drücken in Querschnitt A_1 und Querschnitt A_3 ?

Am Querschnitt A_1 wurde der Druck $p_1 = 13 \text{ kPa}$ gemessen. Bestimmen Sie den Druck im Querschnitt A_3 für die Werte $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $k = 0.65$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$, $Q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$.

$p_3 =$ -----

Aufgabe 1: Laminare Strömung im geraden Rohr



Es wird die stationäre, inkompressible, laminare, reibungsbehaftete Strömung eines Newtonschen Fluids in einem kreisrunden, geraden Rohr mit Innenradius a betrachtet.

Das radiale Geschwindigkeitsprofil kann mit dem Druckabfall Δp zwischen Eintritts- und Austritts- querschnitt, der dynamischen Zähigkeit μ und der Rohrlänge L angegeben werden als

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (a^2 - r^2).$$

Geben Sie die maximale Strömungsgeschwindigkeit an.

$(r = 0)$

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu L} a^2$$

Berechnen Sie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

$$V = \frac{1}{A} \int v(r) dA = \frac{\Delta p a^2}{8\mu L} \quad \left(= \frac{1}{2} v_{\max} \right)$$

πa^2 $2\pi r dr$

Welcher Durchfluss (Volumen pro Zeit) ergibt sich damit?

$$Q = \frac{\Delta p \pi a^4}{8\mu L}$$

Wie groß ist der Druckabfall im Rohrstück?

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi a^4} Q = \frac{8\mu L}{a^2} V \quad \left(= \frac{32\mu L}{d^2} V \right) \quad \text{(Hagen-Poiseuille-Gesetz)}$$

d Innendurchmesser

Berechnen Sie die Schergeschwindigkeit.

$$\dot{\gamma}(r) = -\frac{\Delta p r}{2\mu L}$$

Geben Sie den minimalen und die maximalen Betrag der Schergeschwindigkeit an.
Wo treten diese auf?

$$|\dot{\gamma}|_{\min} = 0 \quad \text{bei } r = 0, \quad |\dot{\gamma}|_{\max} = \frac{\Delta p a}{2\mu L} \quad \text{bei } r = a$$



Welche Schubspannung wirkt auf die Rohrwand?

$$\tau = \frac{\Delta p a}{2L} \quad \left(= \frac{4\mu Q}{\pi a^3} \right)$$

Welche Kraft übt das Fluid auf das Rohr aus?

$$F = \Delta p \pi a^2$$

Wie groß ist der Druckabfall in der Aorta infolge der Zähigkeit des Blutes?

Es seien der Innendurchmesser $D_i = 2.5$ cm, die Länge $L = 40$ cm, der Durchfluss $Q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$ und die dynamische Zähigkeit $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s} = 4 \text{ mPa s}$.

$$\Delta p_{\text{Aorta}} = 13,9 \text{ Pa}$$

Welche Zahlenwerte ergeben sich für die (veralteten) Maßeinheiten "mm WS" und "mm Hg" (Torr)? (Hinweis: $\rho_{\text{Hg}} = 13300 \text{ kg/m}^3$)

$$\Delta p_{\text{Aorta}} \approx 1,4 \text{ mm WS}$$

$$\Delta p_{\text{Aorta}} \approx 0,104 \text{ mm Hg}$$

Wie groß ist der Druckabfall in einer Arterie mit Innendurchmesser $D_i = 2.5$ mm und Länge $L = 10$ cm bei gleichem Durchfluss (vgl. Merkblatt M 15.16)?

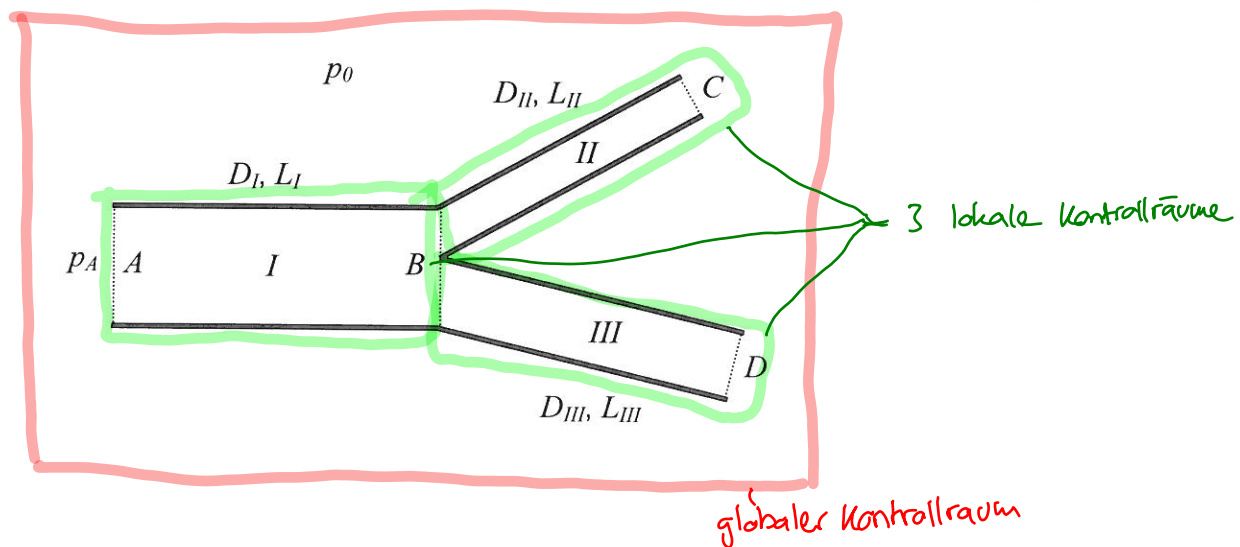
gleicher mittlerer Strömungsgeschwindigkeit

$$\Delta p_{\text{Arterie}} = 25 \Delta p_{\text{Aorta}}$$

Aufgabe 2: Gefäßverzweigung

Eine Gefäßverzweigung (inkompressibles Fluid, dynamische Zähigkeit μ) wird mit kreisrunden Rohrstücken modelliert. Das Rohrstück I (Durchmesser D_I , Länge L_I) verzweigt sich am Querschnitt B in die beiden Rohrstücke II (Durchmesser D_{II} , Länge L_{II}) und III (Durchmesser D_{III} , Länge L_{III}).

Am Eintrittsquerschnitt A wird der Überdruck p_A gemessen, der Umgebungsdruck beträgt p_0 . Es sollen die Strömungsverhältnisse in den Gefäßen nach der Verzweigungsstelle ermittelt werden.



In welchem Zusammenhang stehen die Durchflüsse (Volumenströme) Q_I , Q_{II} und Q_{III} ?

$$Q_I = Q_{II} + Q_{III} \quad (1) \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Welcher Überdruck ergibt sich bei freiem Auslauf?

$$p_C = 0, \quad p_D = 0 \quad (2)$$

Was gilt für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohrstück I in Abhängigkeit des Durchflusses Q_I ?

$$v_I = \frac{Q_I}{A_I} = \frac{4 Q_I}{D_I^2 \pi} \quad (3)$$



Hagen-Poiseuille

Wie groß ist der Druck an der Verzweigungsstelle B in Abhängigkeit des Durchflusses Q_I ?

$$p_B = p_A - \Delta p_I = p_A - \frac{32 \mu L_I}{D_I^4} \frac{4 Q_I}{\pi} = p_A - \frac{128 \mu L_I}{\pi D_I^4} Q_I \quad (4)$$

Wie lauten für die Rohrstücke II und III die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und der Druckabfall in Abhängigkeit der Durchflüsse Q_{II} und Q_{III} ?

siehe oben!

$$V_{II} = \frac{4 Q_{II}}{D_{II}^2 \pi} \quad (5)$$

$$V_{III} = \frac{4 Q_{III}}{D_{III}^2 \pi} \quad (6)$$

$$\Delta p_{II} = \frac{128 \mu L_{II}}{\pi D_{II}^4} Q_{II} \quad (7)$$

$$\Delta p_{III} = \frac{128 \mu L_{III}}{\pi D_{III}^4} Q_{III} \quad (8)$$

lokal

In welchem Zusammenhang stehen die Druckabfälle in den Rohrstücken II und III zum Druck p_B ?

$$\Delta p_{II} = \Delta p_{III} = p_B \quad (9)$$

global

Bestimmen Sie den Druck an der Verzweigungsstelle B und den Durchfluss im Rohrstück I .

$$(4)/(7)(8)/(9) \rightarrow (1) \quad p_B = p_A \frac{D_I^4}{L_I} \left/ \left(\frac{D_I^4}{L_I} + \frac{D_{II}^4}{L_{II}} + \frac{D_{III}^4}{L_{III}} \right) \right. \quad (10)$$

$$(10) \rightarrow (4) \quad Q_I = p_A \frac{\pi D_I^4}{128 \mu L_I} \left(\frac{D_{II}^4}{L_{II}} + \frac{D_{III}^4}{L_{III}} \right) \left/ \left(\frac{D_I^4}{L_I} + \frac{D_{II}^4}{L_{II}} + \frac{D_{III}^4}{L_{III}} \right) \right.$$

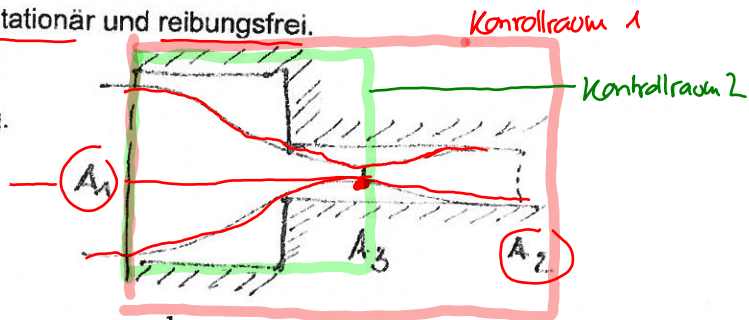
In welchem Verhältnis stehen die Durchflüsse in den Rohrstücken II und III ?

$$\frac{Q_{II}}{Q_{III}} = \frac{L_{III} D_{II}^4}{L_{II} D_{III}^4}$$

Aufgabe 3: Querschnittssprung in einer Aorta

Bei einer Untersuchung der Aorta zeigt sich im Röntgenbild eine Verengung des Querschnitts von A_1 auf A_2 . Es ist bekannt, dass sich hinter der Verengung der Strahl weiter auf A_3 einschnürt, wobei aus Modellversuchen die Kontraktionszahl $k = A_3/A_2$ ermittelt wurde. Die Dichte des Blutes sei ρ , der Durchfluss betrage Q , die Strömung sei stationär und reibungsfrei.

Skizzieren Sie idealisiert die Querschnittsverengung.



- Die Bernoulligleichung lautet (M 15.11) $\int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} v_0^2 + gz_0 + \frac{p_0}{\rho} = \text{const.}$

Welche Vereinfachungen ergeben sich bei stationärer und horizontal verlaufender Strömung?

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial t} dx = 0 \quad \leftarrow \quad gz = gz_0$$

- Aus welcher Gleichung ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten in den Querschnitten A_1 , A_2 und A_3 ? Bestimmen Sie diese.

Kontinuitätsgleichung: $Q = \text{const} \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_2 k v_3 = Q$

$v_1 = \frac{Q}{A_1}$, $v_2 = \frac{Q}{A_2}$, $v_3 = \frac{Q}{k A_2}$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drücken in Querschnitt A_1 und Querschnitt A_3 ?

$$p_1 - p_3 = \frac{\rho}{2} (v_3^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{(k A_2)^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$

Am Querschnitt A_1 wurde der Druck $p_1 = 13 \text{ kPa}$ gemessen. Bestimmen Sie den Druck im Querschnitt A_3 für die Werte $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 3 \text{ cm}^2$, $k = 0.65$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$, $Q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$.

$p_3 = 13 \text{ kPa} - 81.3 \text{ Pa}$