

Elektrischer Gleichstrom

Grundbegriffe

Elementarladung: kleinste elektr. Ladung

Elektron	$q_- = -1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$\ominus$
Proton	$q_+ = +1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$\oplus$

$[q] = 1 \text{ C}$ $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$

Elektrostatik: Lehre der ruhenden Ladungen

Q: Gesamte Ladung eines Körpers

→ Maß für die Menge an überschüssigen Ladungsträgern

$$[Q] = 1 \text{ As}$$

$$Q = \sum_n q$$

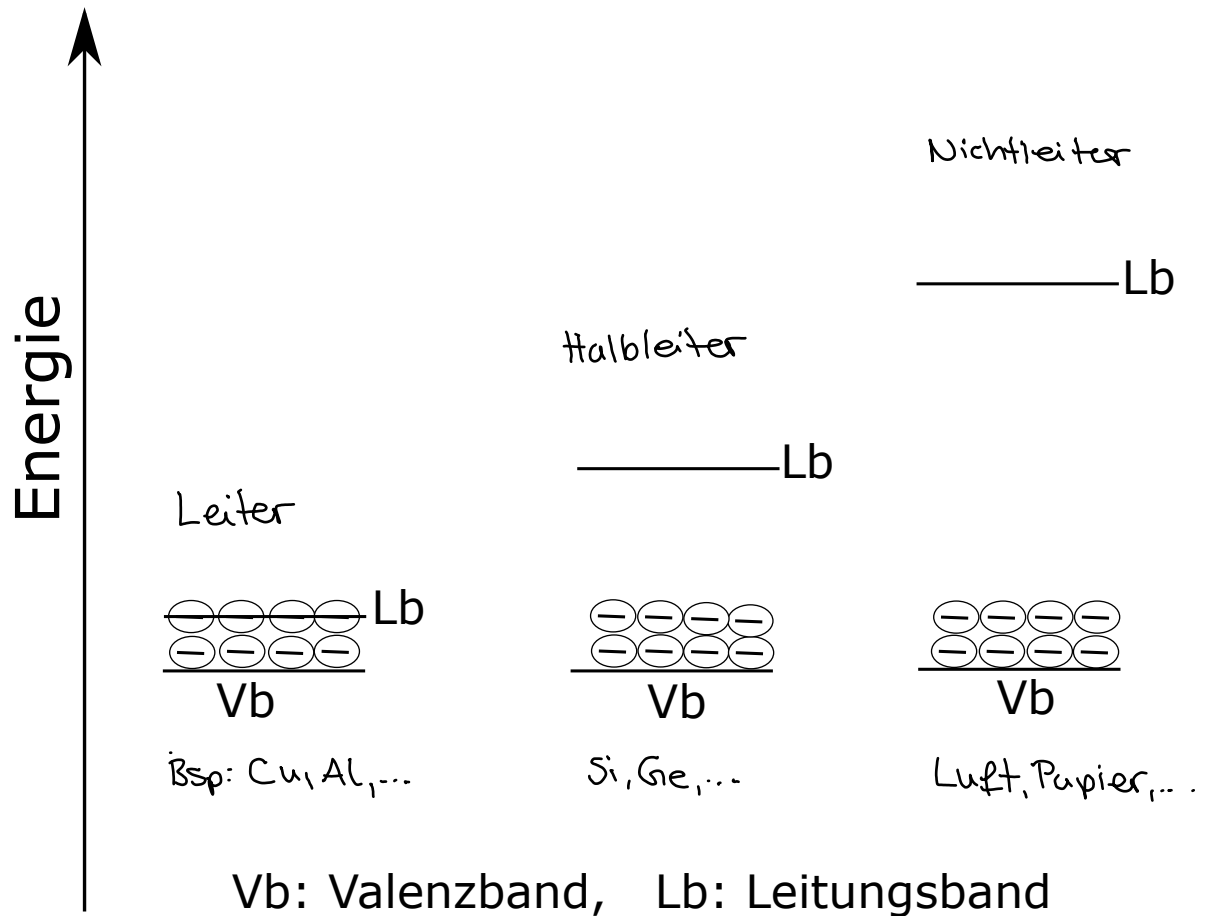
$Q > 0 \rightarrow$ Elektronenmangel

$Q < 0 \rightarrow$ Elektronenüberschuss

Elektrodynamik: Lehre der bewegten Ladungen

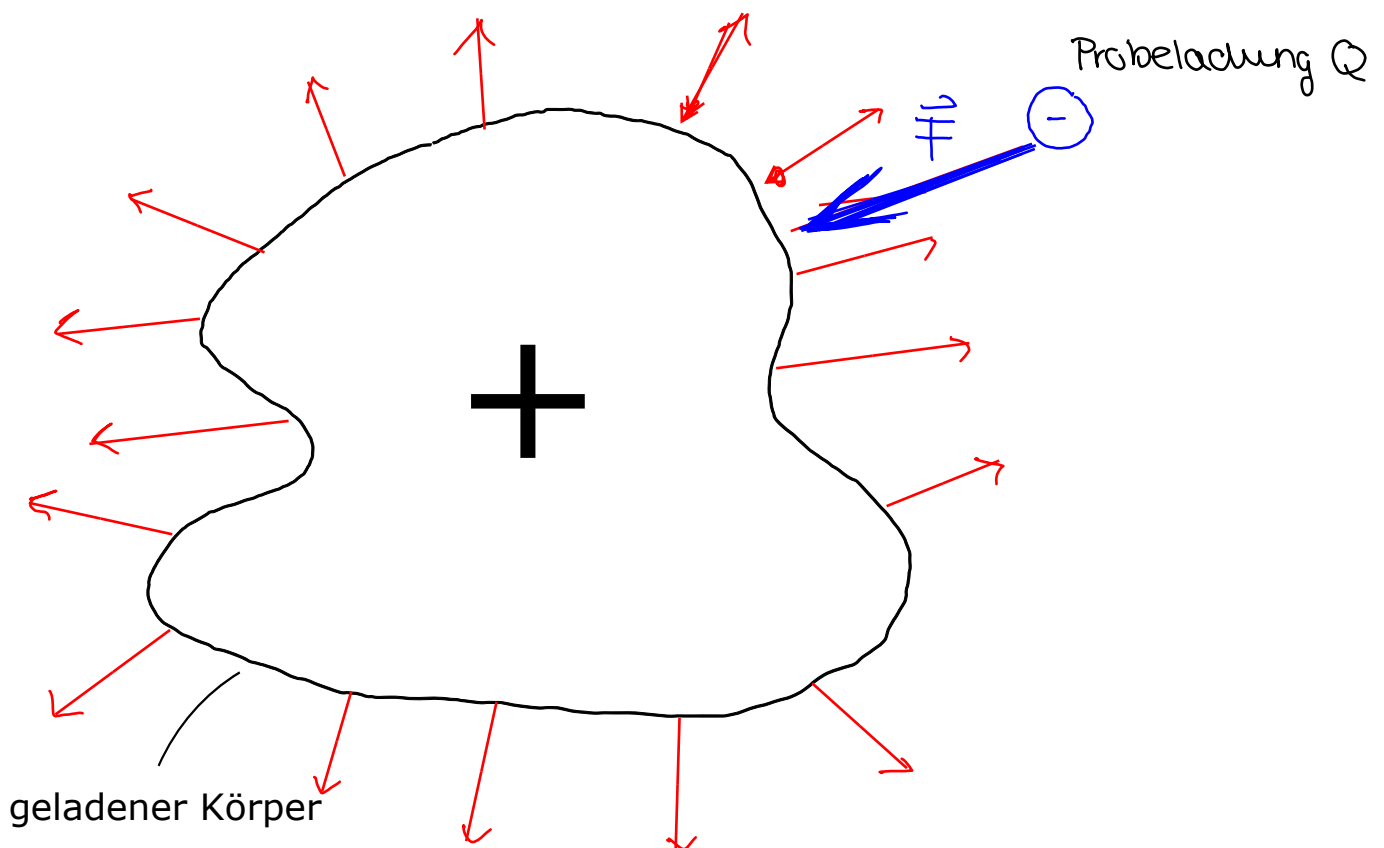
Ursache für die Bewegung von Ladungen: Das elektr. Feld $\vec{E}$

Elektrische Leitfähigkeit: Werkstoffklassifikation



Elektrisches Feld $\vec{E}$

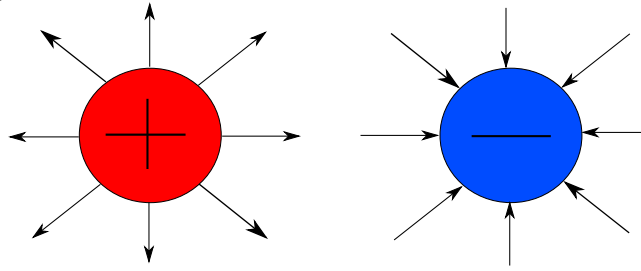
Das elektrische Feld ist ein Zustand im Raum, der von den elektrischen Ladungen im Raum hervorgerufen wird.



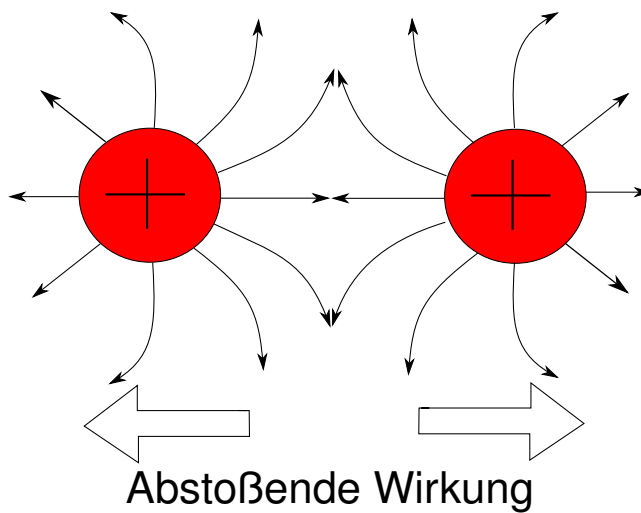
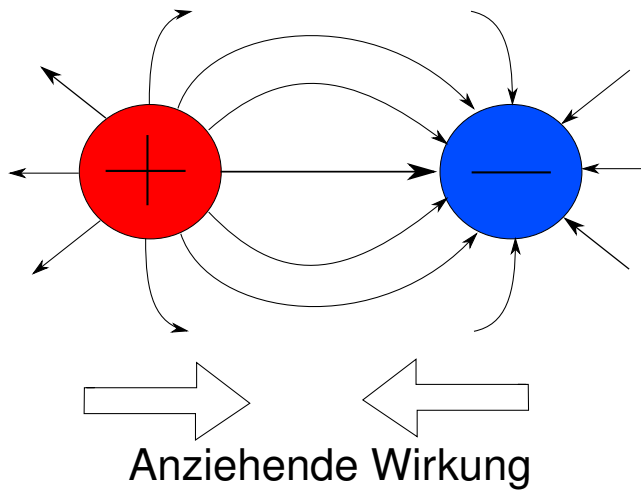
$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q \quad (1.)$$

Einheit: $[\vec{E}] = 1 \frac{\text{N}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Feldverteilungen



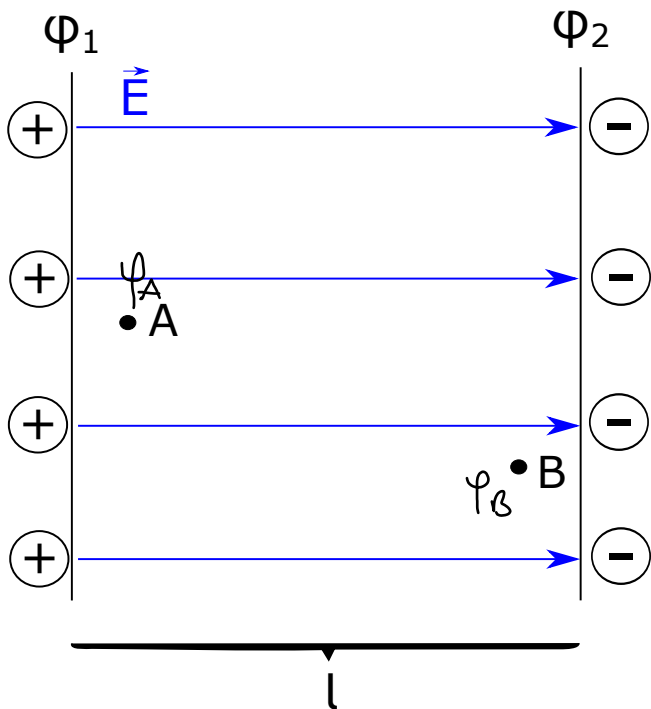
Elektrisches Feld um Ladungen



Homogenes elektrisches Feld

↳ parallele Feldlinien

$$|\vec{E}| = E = \text{konst.}$$



φ_A : Potential im Punkt A

φ_B : Potential im Punkt B

$$\varphi_A - \varphi_B = U_{AB}$$

U_{AB} : Spannung zwischen A und B

→ Anzahl der Ladungsträger ist auf beiden Platten gleich

Potential φ : Fähigkeit Arbeit zu leisten

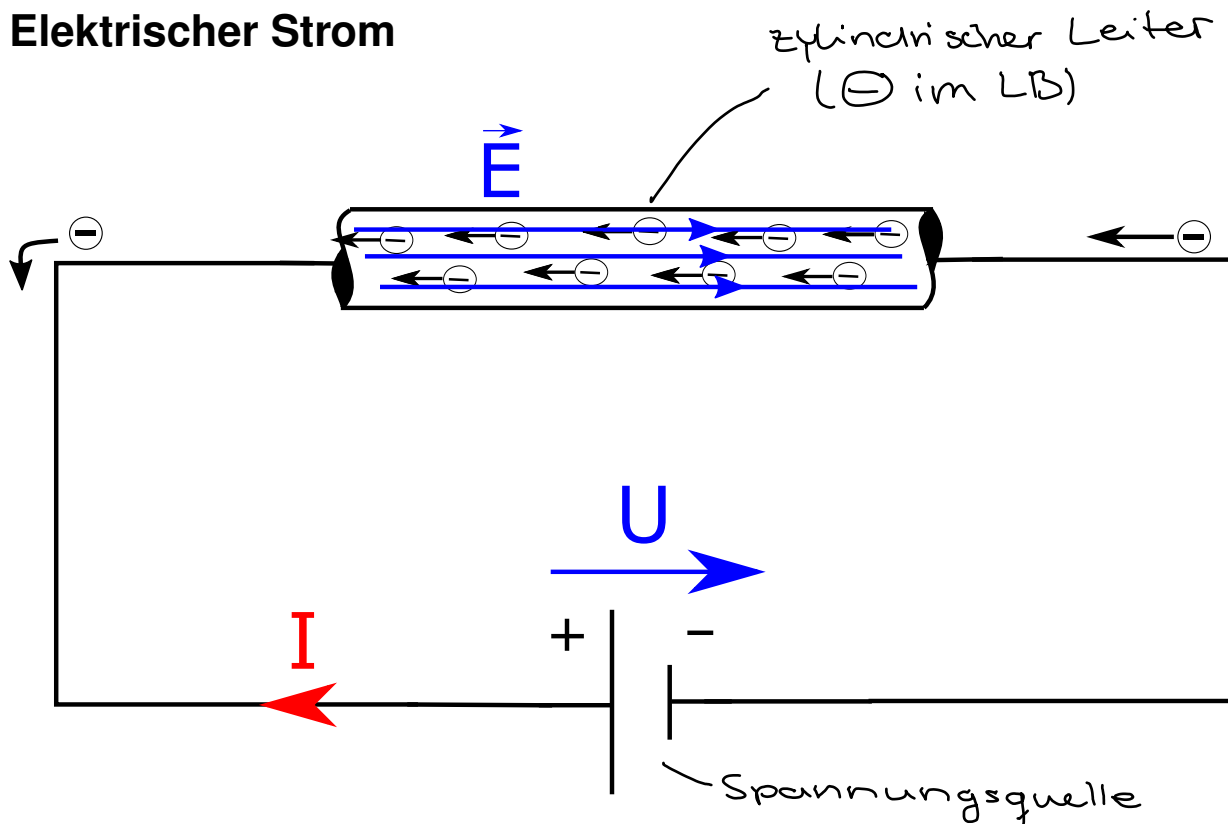
$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \quad ; \quad U: \text{Spannung zwischen der Platte ① und der Platte ②}$$

Elektrische Spannung U :

$$[U] = 1 \text{ V}$$

$$U = E \cdot l \quad (2)$$

Elektrischer Strom



Elektrischer Strom: Gerichtete Bewegung von Ladungsträgern

Die positive Richtung des Stroms I ist entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Elektronen.

Elektrische Stromstärke I

$$[I] = 1 \text{ A}$$

Allgemeine Definition:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3)$$

Gleichstrom I (DC):

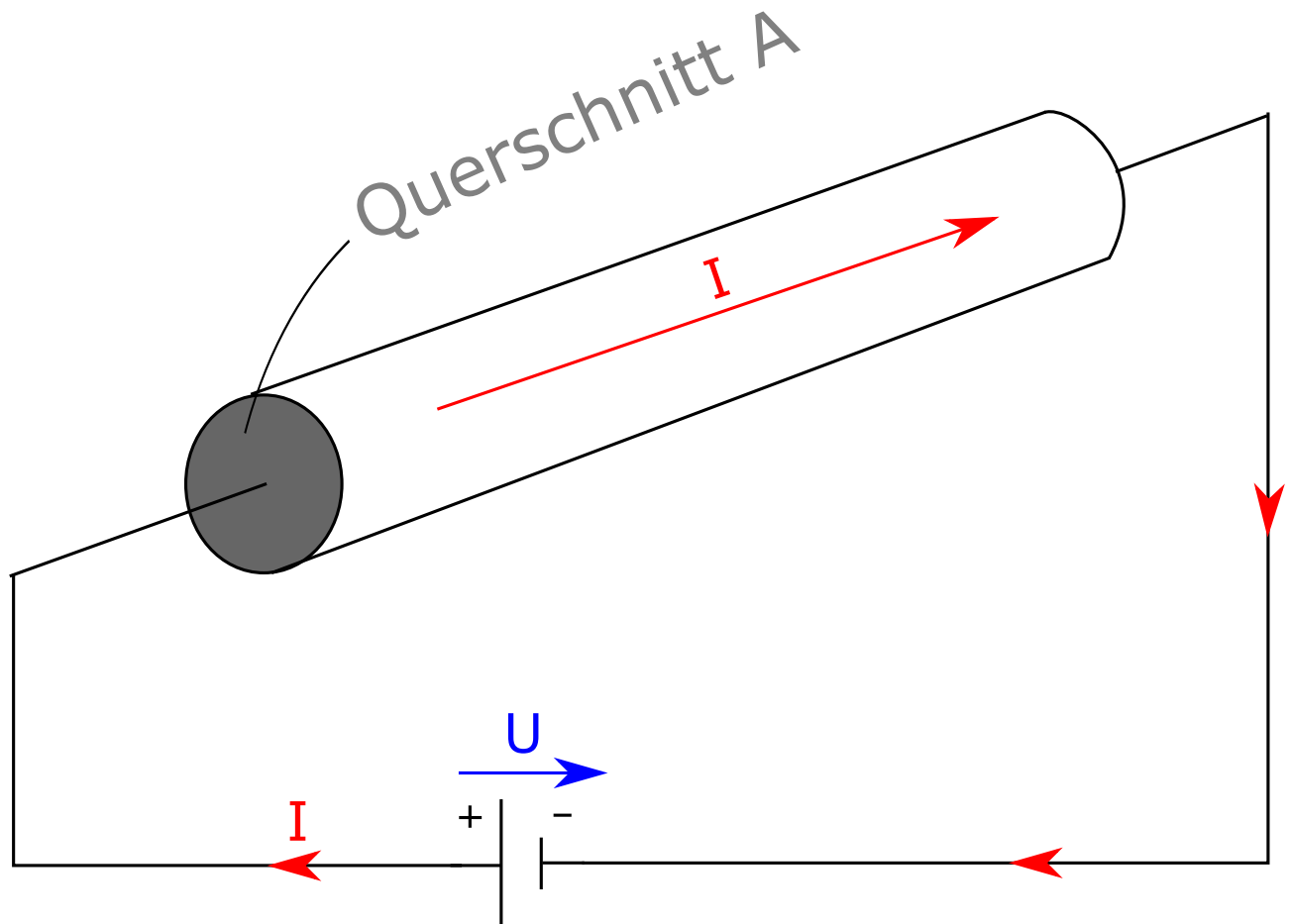
$$I = \frac{Q}{t} \quad (4)$$

Wechselstrom $i(t)$ (AC):

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (5)$$

bei Wechselstrom die Buchstaben
klein schreiben

Elektrische Stromdichte S

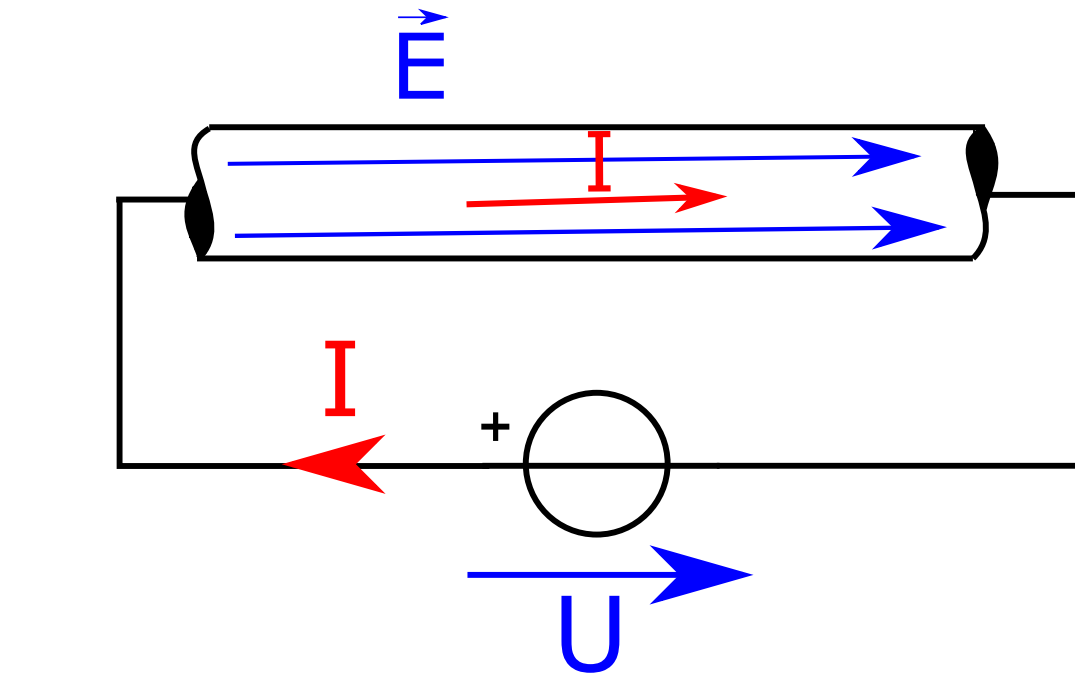


Elektrische Stromdichte S : Maß für die thermische Belastung

$$S = \frac{I}{A} \quad (6)$$

$$[S] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Elektrischer Widerstand und das Ohmsche Gesetz



$\overset{+}{\Phi} \downarrow U$ Spannungsquelle

$\hookrightarrow I$ in Richtung des $\oplus$

σ : spezifische Leitfähigkeit des Werkstoffe

$$U \sim I \Rightarrow E \sim S$$



$$\sigma \cdot E = S$$

$$S = \sigma \cdot E \quad (7)$$

$$S = \sigma \cdot E$$

$$\frac{I}{A} = \sigma \cdot \frac{U}{l}$$

$$\Rightarrow U = \frac{l}{\sigma \cdot A} \cdot I$$

$$\Rightarrow U = R \cdot I \quad (8)$$

Gl. 8: Ohmsches Gesetz

$$R = \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{\rho \text{ (roh)}} \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (9)$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (10)$$

R : Elektrischer Widerstand des Leiters

l : Länge des Leiters

A : Querschnittsfläche des Leiters

σ : spezifische Leitfähigkeit des Leitermaterials

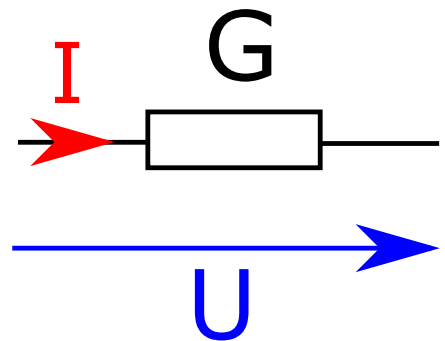
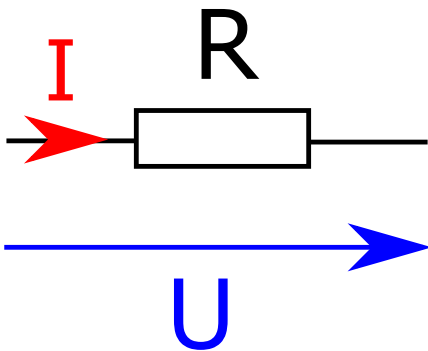
ρ : spezifischer Widerstand des Leitermaterials

Elektrischer Leitwert G

$$G = \frac{1}{R} \quad (11)$$

$$[G] = 1 \text{ Siemens} = \frac{1}{\Omega}$$

Schaltsymbol für R bzw G :



Temperaturabhängigkeit von ρ und Klassifikation

$$\rho = f(\vartheta) \quad \vartheta: \text{Temperatur}$$

$$R = f(\vartheta)$$

Es gilt (bis 200°C):

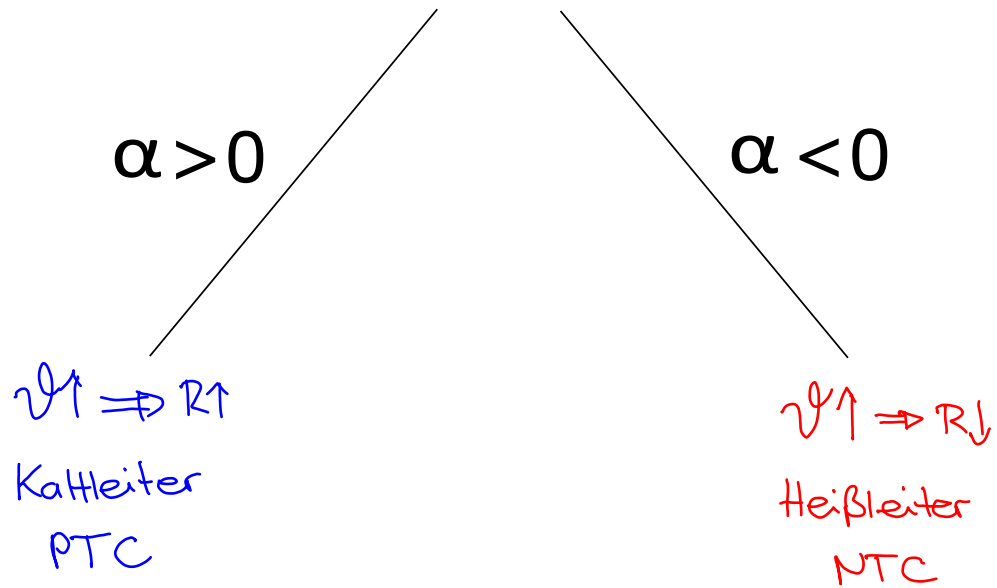
$$R(\vartheta) = R_0 \cdot [1 + \alpha_0 (\vartheta - \vartheta_0)] \quad (12)$$

ϑ_0 : Bezugstemperatur, üblicherweise 20°C

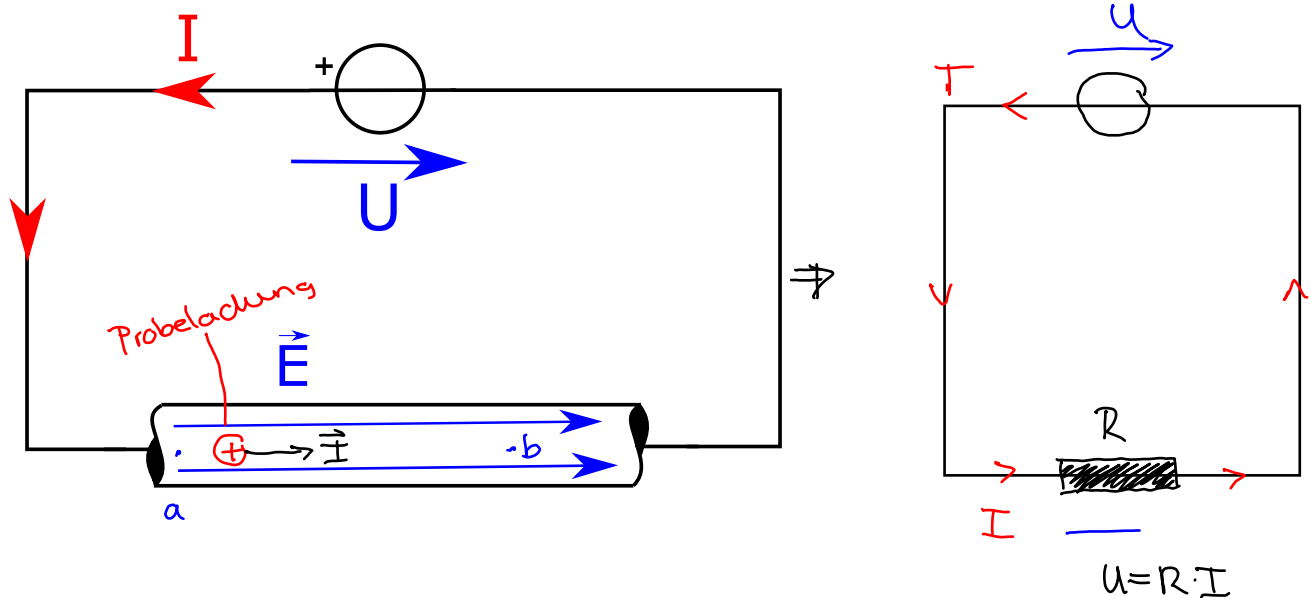
α_0 : Temperaturbeiwert bei ϑ_0

R_0 : Widerstand bei ϑ_0

Klassifikation von Widerständen



Elektrische Arbeit W und Leistung P



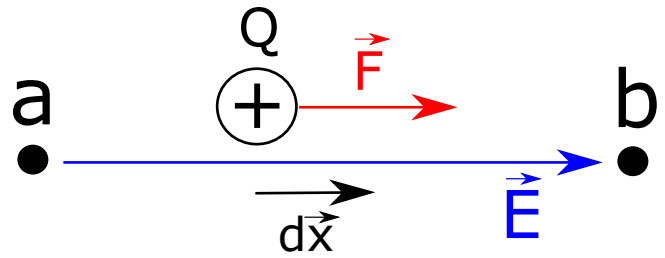
Allg. gilt:

$$W = \int_a^b \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

$$[\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\angle \vec{A}, \vec{B})]$$

$$[W] = 1J = 1Nm$$

Fall A:

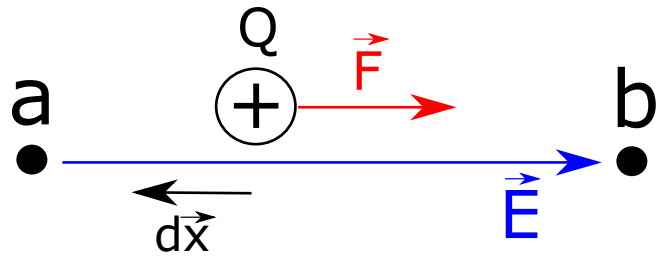


$$\begin{aligned}
 W_{a \rightarrow b} &= \int_a^b \vec{F}(x) \cdot d\vec{x} = \int_a^b |\vec{F}(x)| \cdot |d\vec{x}| \cdot \overbrace{\cos(\angle \vec{F}, d\vec{x})}^{1} \\
 &= \int_a^b |Q \cdot \vec{E}| \cdot dx \cdot 1 \\
 &= Q \cdot E \int_a^b dx \\
 &= Q \cdot \boxed{E \cdot \Delta x} = U
 \end{aligned}$$

$$W_{a \rightarrow b} = Q \cdot U$$

$W > 0 \Rightarrow$ potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt.

Fall B:



$$W_{a \rightarrow b} = -Q \cdot U$$

$W_{a \rightarrow b} < 0 \Rightarrow$ potenzielle Energie der Ladung wird erhöht.

Kirchhoffsche Regeln

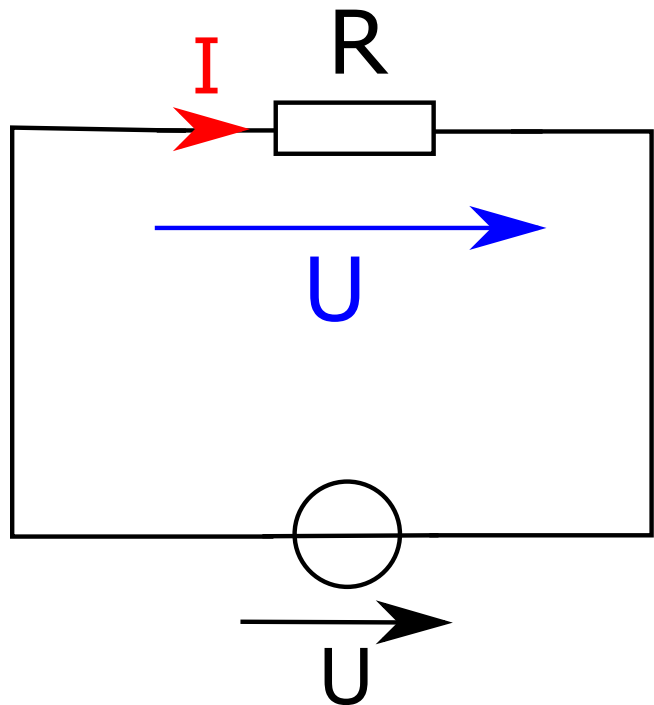
Anwendung Quelle und Widerstand:

$$W = Q \cdot U \quad (13)$$

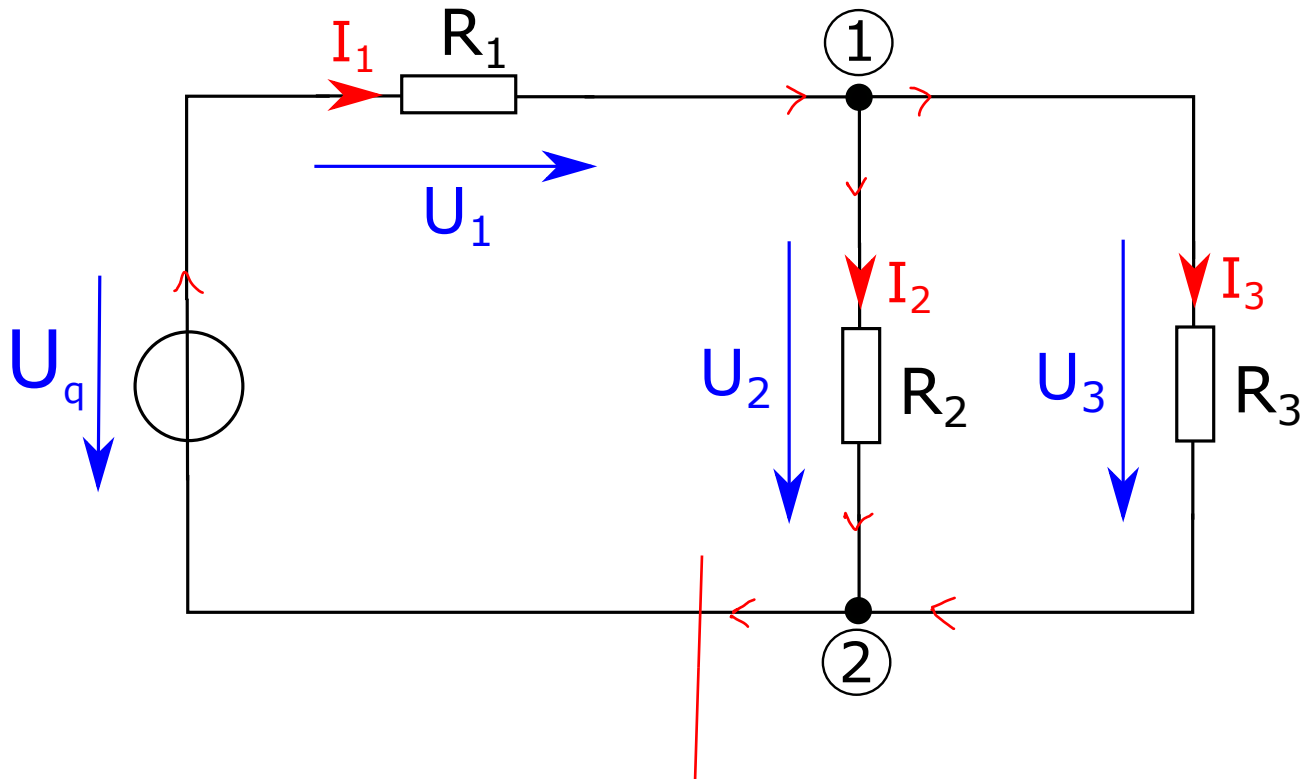
$$\underbrace{\frac{W}{t}}_{=P} = \underbrace{\frac{Q}{t}}_{=I} \cdot U$$

$$P = I \cdot U \quad (14)$$

$$[P] = 1 \text{ W (Watt)} = 1 \text{ VA}$$



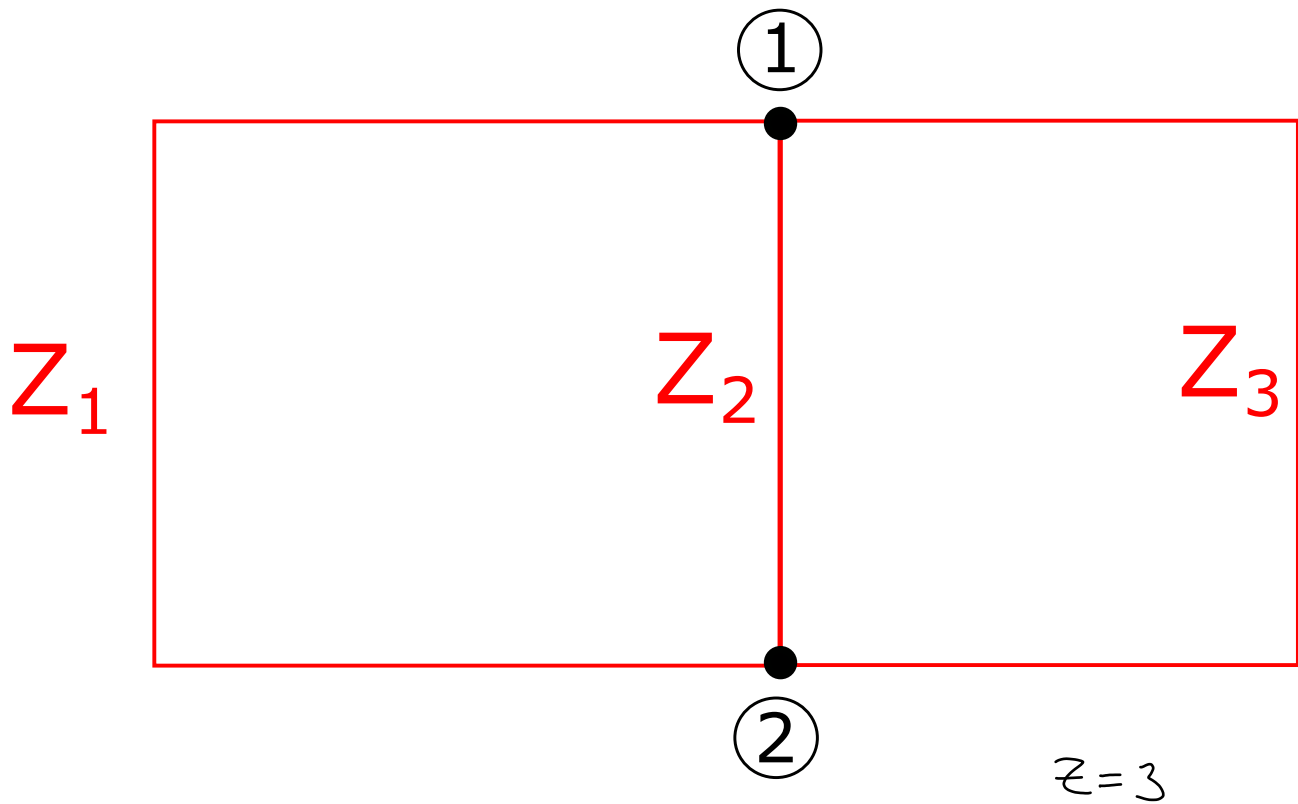
Definition Knoten



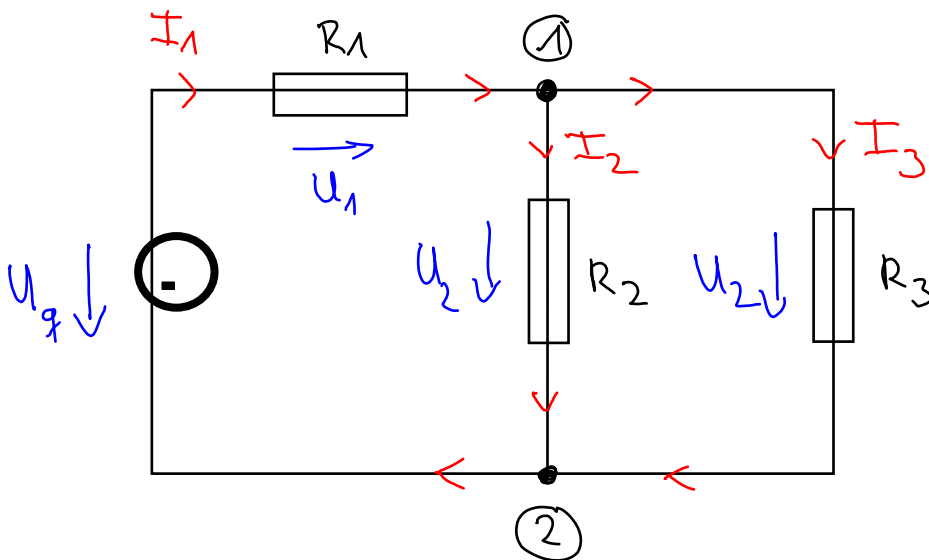
Knoten K:

Eine Verzweigungsstelle, an der mindestens drei Ströme zu- ^{bzw} oder abfließen

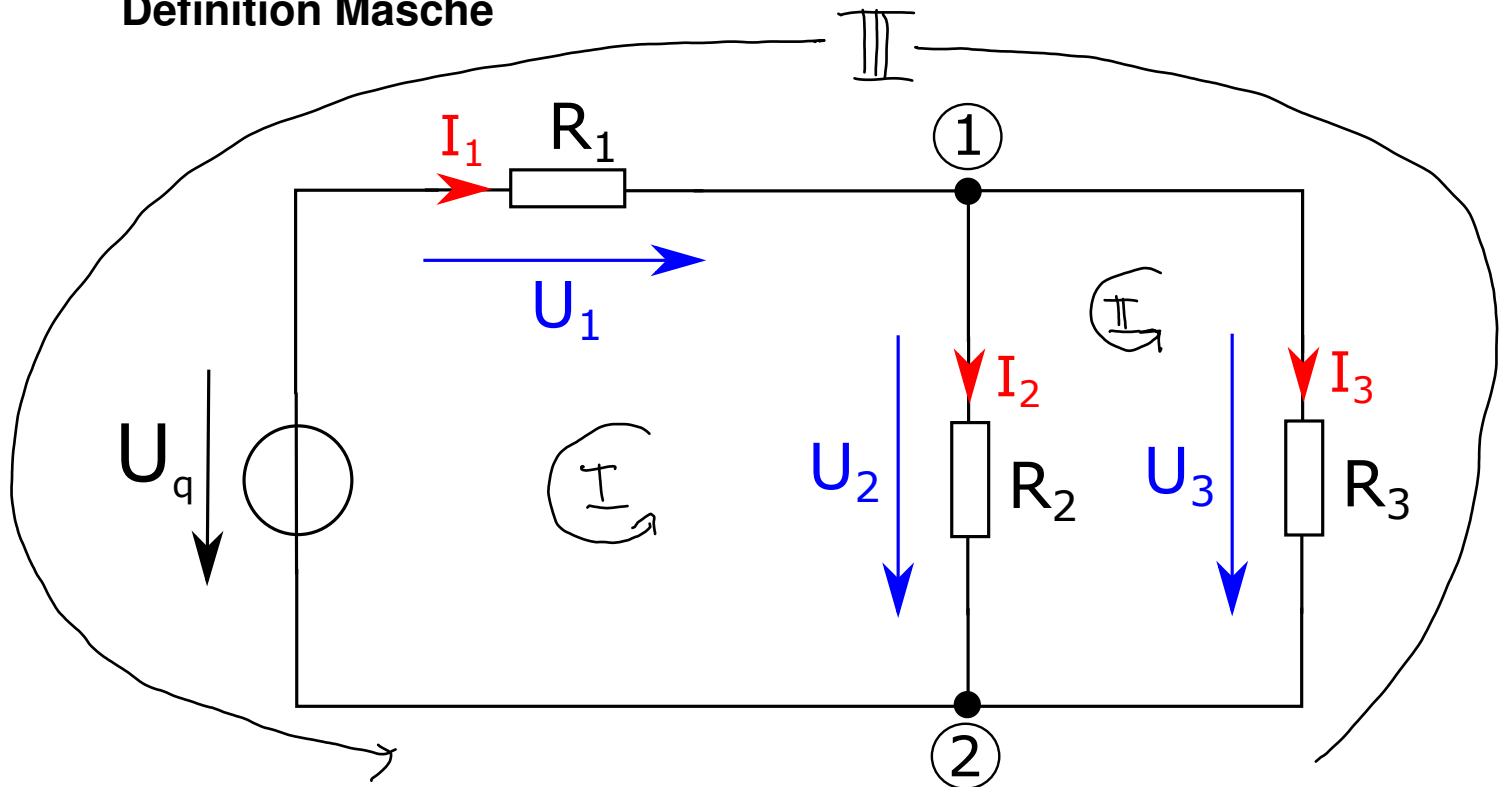
Definition Zweig



Ein Zweig Z verbindet zwei Knoten.

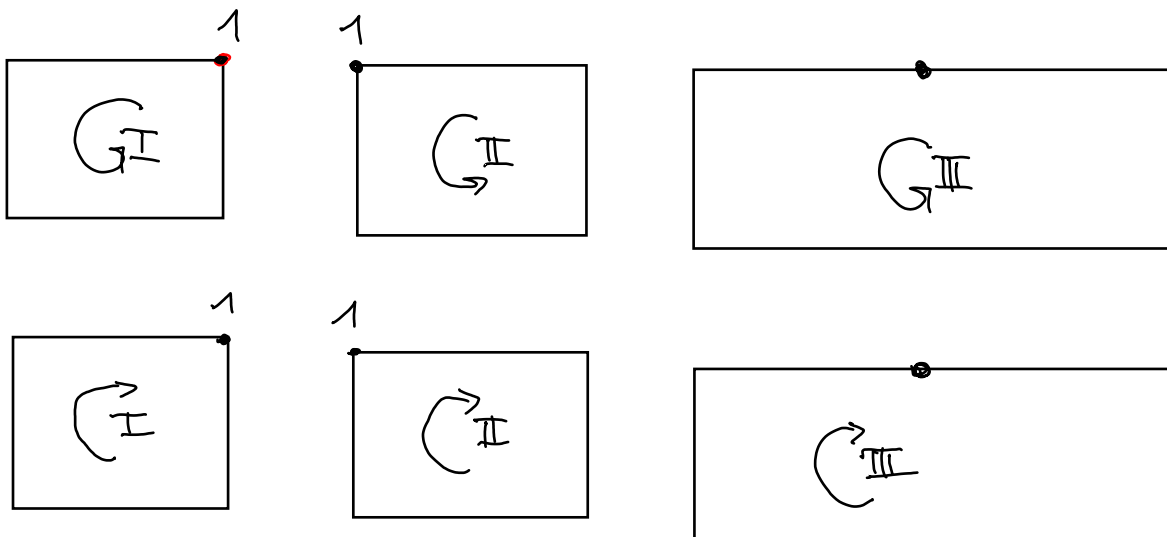


Definition Masche

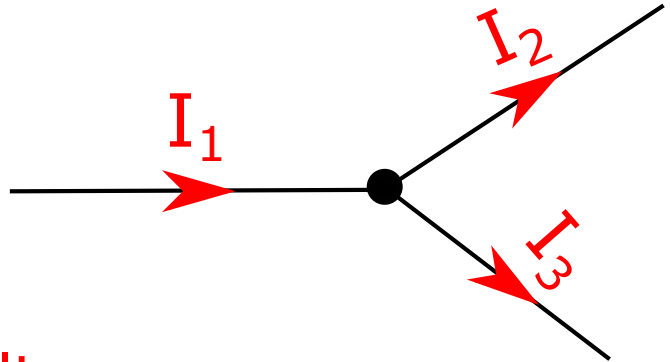


Masche M:

geschlossener Pfad; beginnt bei einem Knoten und endet dort. Die Richtung des Pfades (Umlaufsinn) ist frei wählbar.



Kirchhoffsche Knotenregel



Für jeden Knoten gilt:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (15)$$

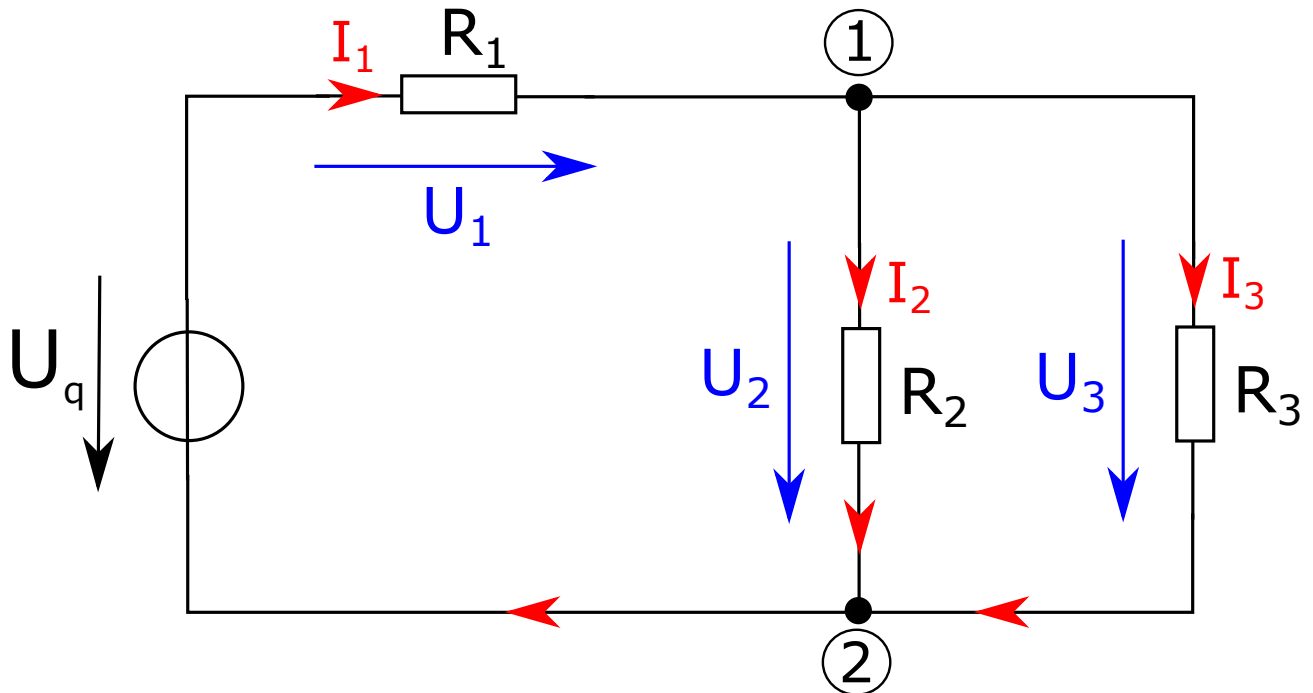
Zufließend "+"

abfließend "-"

Beispiel oben:

$$\sum_{k=1}^3 I_k = 0 \Rightarrow \text{KR: } I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Kirchhoffsche Maschenregel

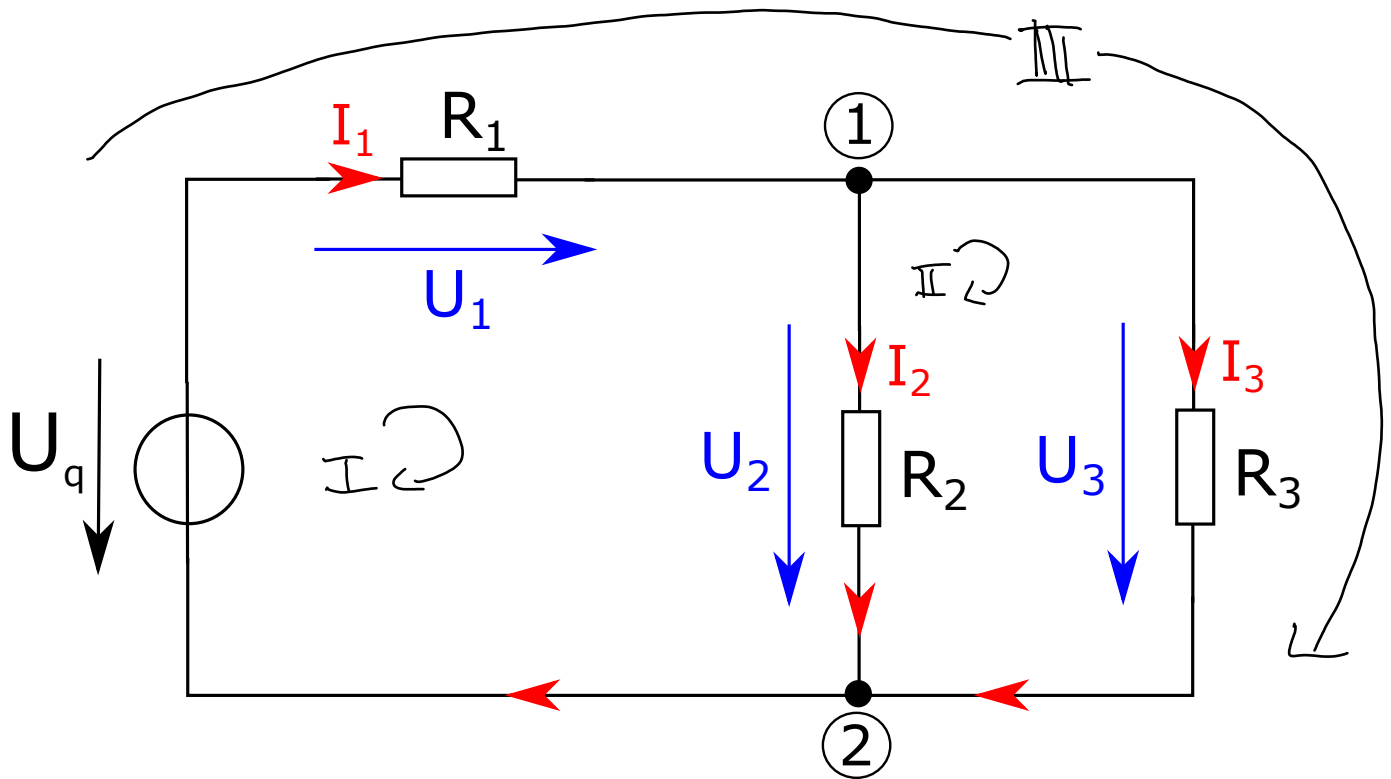


In jeder Masche gilt:

$$\sum_m U_m = 0 \quad (16)$$

Spannungen im Umlaufsinn "+"

Spannungen entgegengesetzt zum Umlaufsinn "-"



Masche I: $-U_q + U_1 + U_2 = 0$

Masche II: $U_3 - U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = U_3$

Masche III: $-U_q + U_1 + U_3 = 0$

weil Buchstaben groß
→ Gleichspannungsquelle

Einfache Gleichstromkreise

Reihenschaltung und Spannungsteilerregel

Reihenschaltung:

$$\text{MRI: } U_1 + U_2 + U_3 - U_q = 0$$

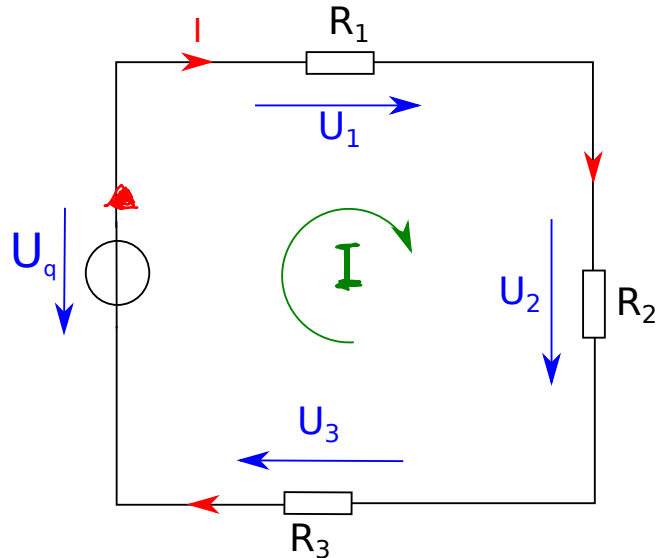
$$R_1 I + R_2 \cdot I + R_3 I = U_q$$

$$I (R_1 + R_2 + R_3) = U_q$$

$$:= R_E$$

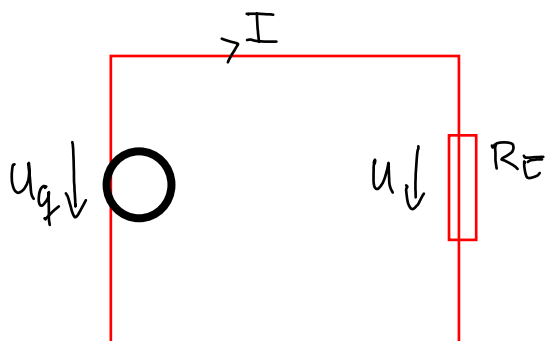
$$I \cdot R_E = U_q$$

R_E : Ersatzwiderstand der
Reihenschaltung



↳ U_3 negativ weil
des $\curvearrowright$ Pfeils

↳ keine Masche



$$U = U_q$$

Reihenschaltungen werden genutzt, um eine hohe Spannung in niedrigere Teilspannungen zu unterteilen.

Reihenschaltung von k Widerständen:

$$\parallel R_E = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k \quad (17)$$

Für Leitwerte:

$$\parallel \frac{1}{G_E} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \dots + \frac{1}{G_k}$$

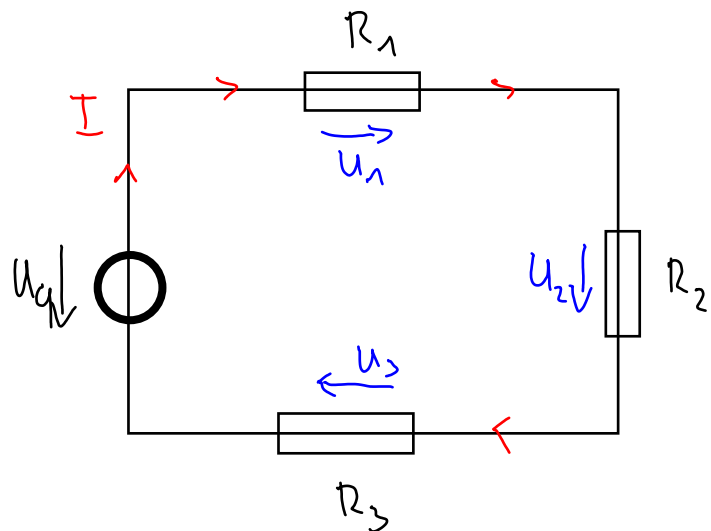
Spannungsteilerregel:

$$\parallel U_q = R_E \cdot I$$

$$\parallel U_1 = R_1 \cdot I$$

$$\parallel U_2 = R_2 \cdot I$$

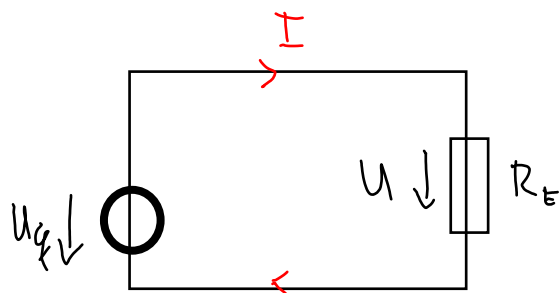
$$\parallel U_3 = R_3 \cdot I$$



$$\frac{U_1}{U_q} = \frac{R_1 I}{R_E I} = \frac{R_1}{R_E}$$

$$\frac{U_2}{U_q} = \frac{R_2 I}{R_E I} = \frac{R_2}{R_E}$$

$$\frac{U_3}{U_q} = \frac{R_3}{R_E}$$



$$R_E = R_1 + R_2 + R_3$$

$$U = U_q = R_E \cdot I$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} ; \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3} ; \frac{U_1}{U_3} = \frac{R_1}{R_3}$$

Parallelschaltung und Stromteilerregel

Parallelschaltung:

$$\text{MR: } U_1 = U_2 = U_3 = U_q$$

$$\text{KR(1): } I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

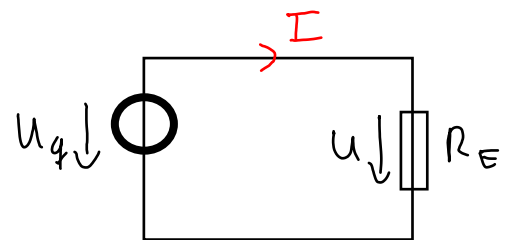
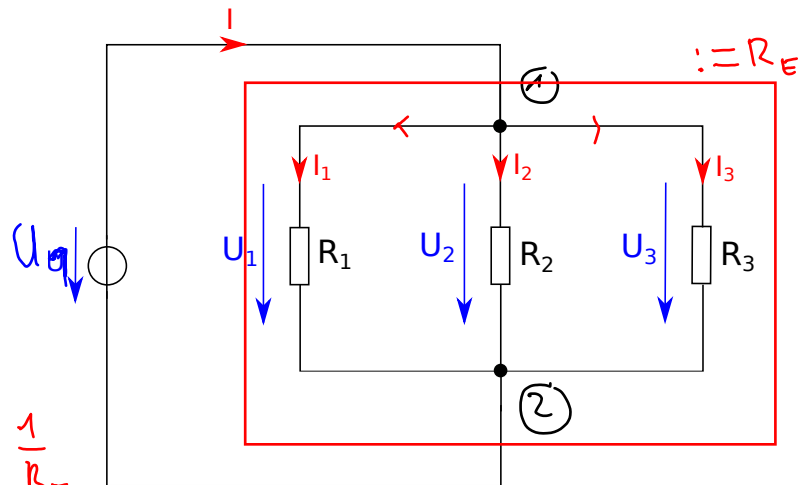
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{U_q}{R_1} + \frac{U_q}{R_2} + \frac{U_q}{R_3}$$

$$I = U_q \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{1}{R_E} U_q$$

$$I = U_q \frac{1}{R_E}$$

$$U_q = R_E \cdot I \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{R_E}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \text{:= } G_E$$



Parallelschaltung von k Widerständen:

$$\boxed{\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_k}}$$

18

$$\boxed{G_E = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_k}$$

19

Stromteilerregel

$$\boxed{\frac{I_1}{I} = \frac{R_E}{R_1} ; \frac{I_2}{I} = \frac{R_E}{R_2} ; \frac{I_3}{I} = \frac{R_E}{R_3}}$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} ; \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} ; \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1}}$$

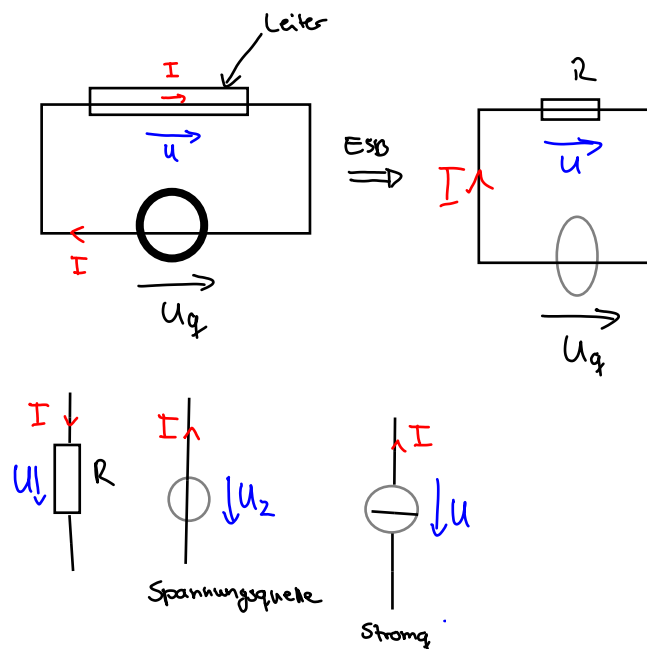
Berechnungsregeln für Gleichstromkreise (Einsetzmethode)

Regel 1: Ersatzschaltbild zeichnen
(ESB)

Regel 2: Strom- und Spannungszählpfeile eintragen

Regel 3: Kirchhoffsche Gesetze benutzen und Maschen- und Knotengleichungen entwickeln

Regel 4: Ohmsches Gesetz anwenden

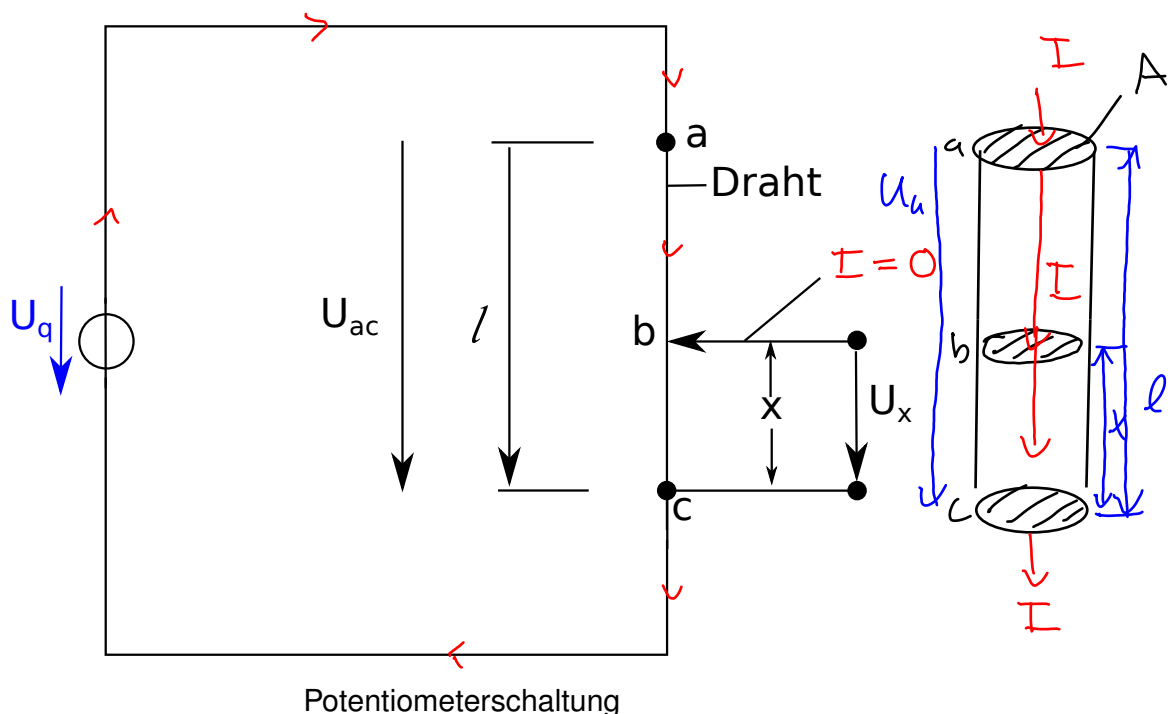


In jedem Netzwerk gibt es:
(K-1) unabhängige Knotengleichungen
 $Z-(K-1)$ unabhängige Maschengleichungen

Aufgabe: Potentiometerschaltung

In der unten abgebildeten Schaltung liegt zwischen den Klemmen a und c ein gerader Draht mit dem konstanten Querschnitt A , der Länge l und der Leitfähigkeit σ . Über einen verschiebbaren Schleifer (Schleifkontakt) wird zwischen den Punkten b und c die Spannung U_x abgegriffen. Eine solche Anordnung nennt man Potentiometer. Sie gestattet es, durch Verschieben des Schleifers eine beliebige Spannung $U_x \leq U_{ac}$ einzustellen.

Wie hängt U_x von der Stellung x des Schleifers ab, wenn die Spannung U_{ac} gegeben ist?



Aufgabe: Potentiometerschaltung

U_x ?

$$\frac{U_x}{U_q} = \frac{R_x}{R_E}$$

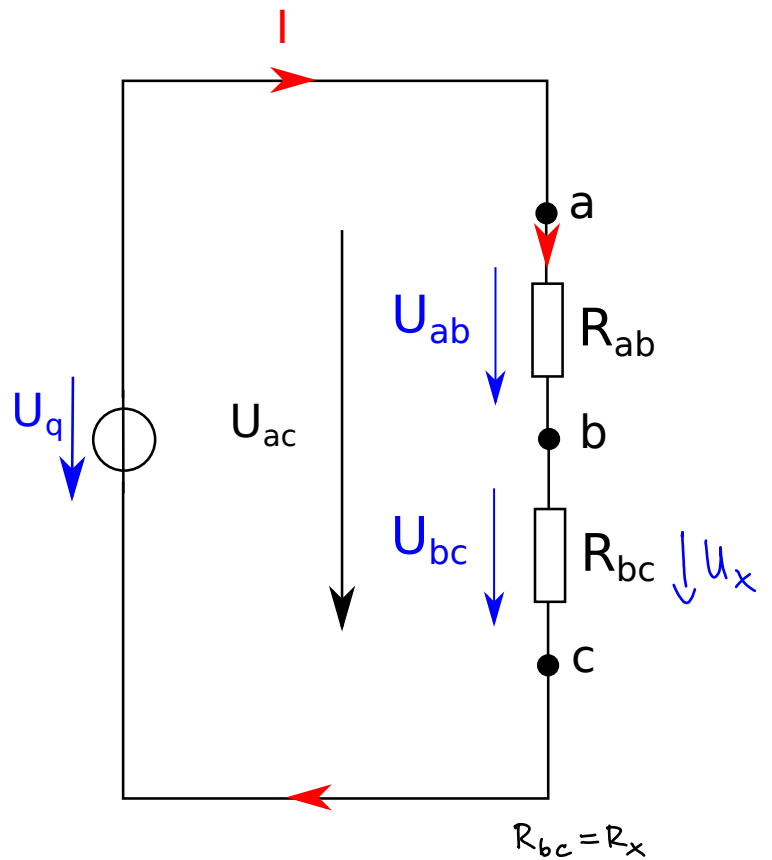
$$R_E = R_{ac}$$

$$R_{ac} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

$$R_x = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{x}{A}$$

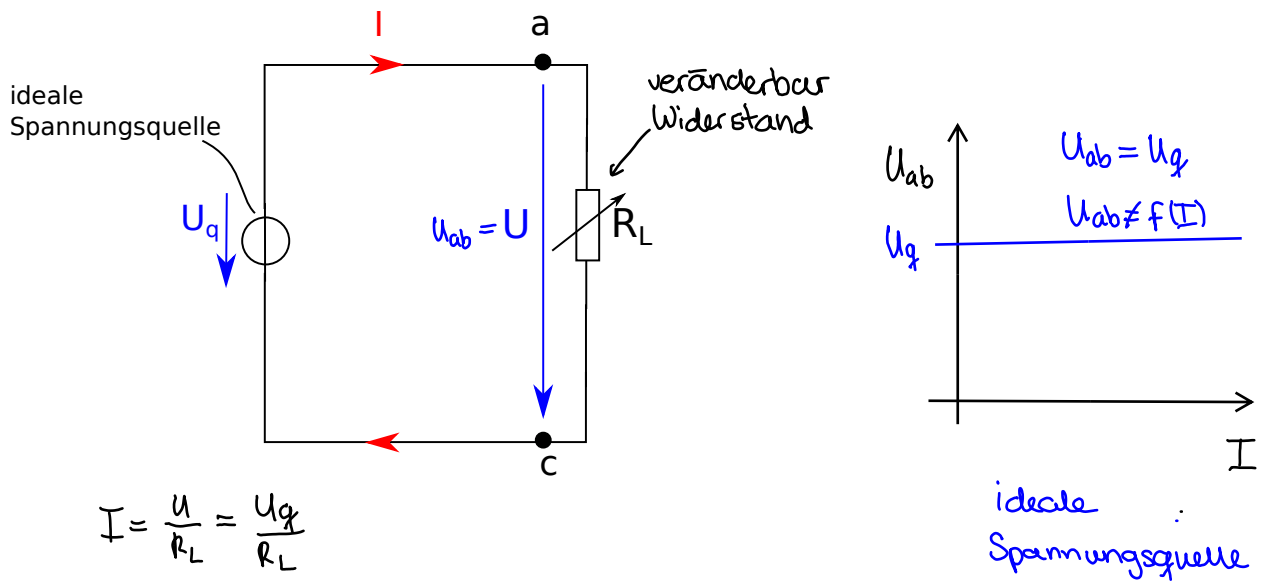
$$U_x = U_q \cdot \frac{x}{l}$$

ESB der Anordnung
⇓



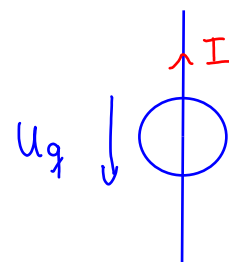
Quellen

Ideale Spannungsquelle



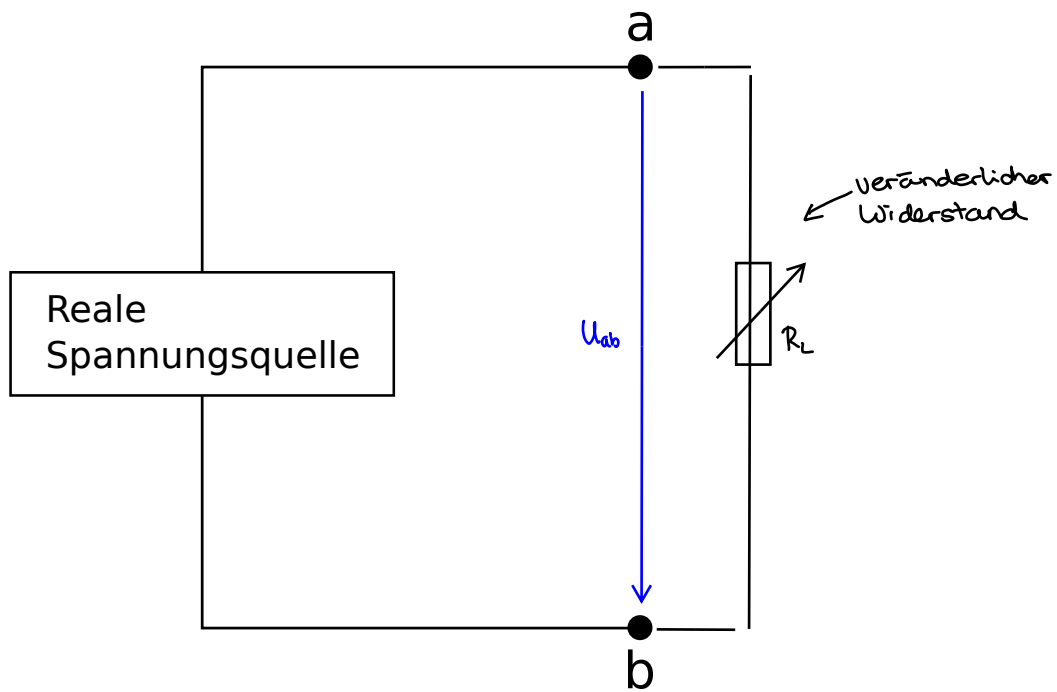
R_L : Veränderbarer Lastwiderstand

U : Klemmenspannung



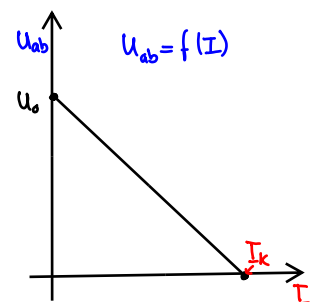
→ in Wirklichkeit geht das nicht

Reale Spannungsquelle



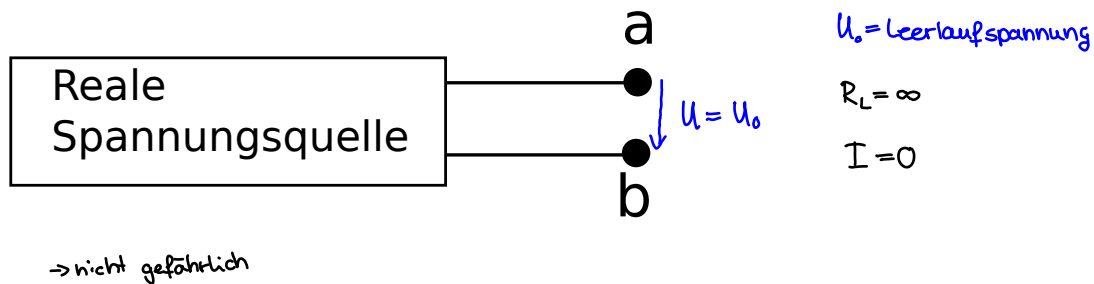
U_0 : Leerlaufspannung der realen Quelle

I_K : Kurzschlussstrom

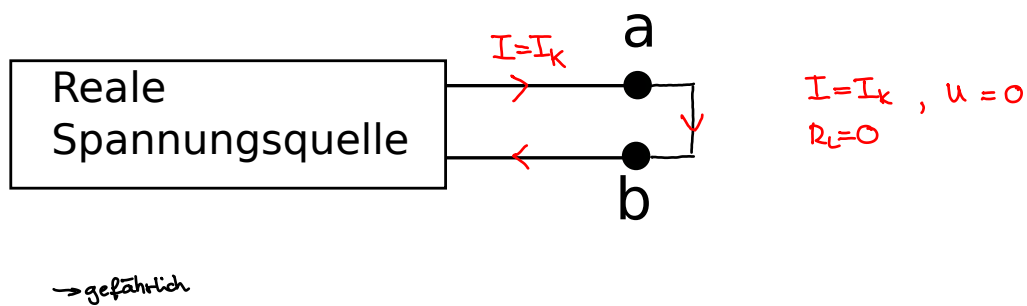


Betriebszustände der realen Spannungsquelle (→ es gibt 2 wichtige)

1) **Leerlauf:** offene Klemmen



2) **Kurzschluss:** kurzgeschlossene Klemmen



Ersatzschaltbild der realen Spannungsquelle

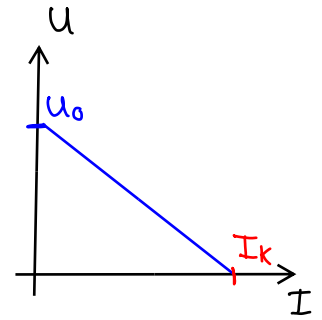
$$\left. \begin{array}{l} y = ax + b \\ y = U \\ x = I \end{array} \right\} U = aI + b$$

$$\underbrace{(U = U_0, I = 0)}_{\text{Leerlauf}} \rightarrow b = U_0$$

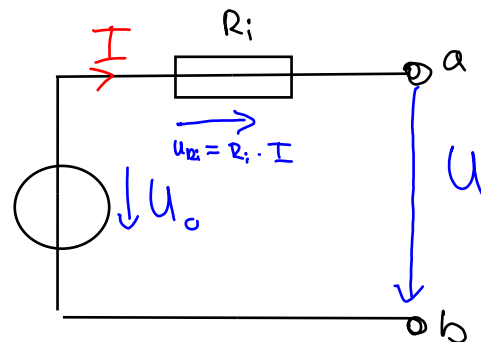
$$\underbrace{(U = 0, I = I_k)}_{\text{Kurzschluss}} \rightarrow a = -\frac{U_0}{I_k}$$

$$U = -\underbrace{\frac{U_0}{I_k}}_{:= R_i} \cdot I + U_0 \quad (20)$$

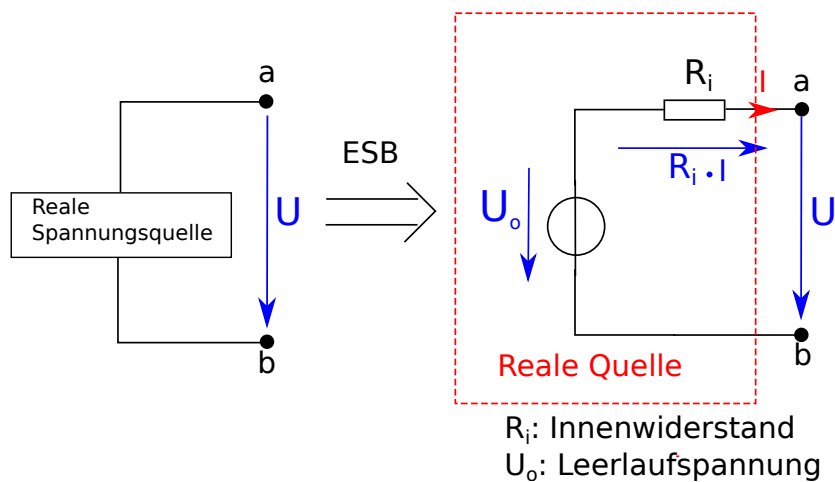
$$U = -R_i \cdot I + U_0 \quad (21)$$



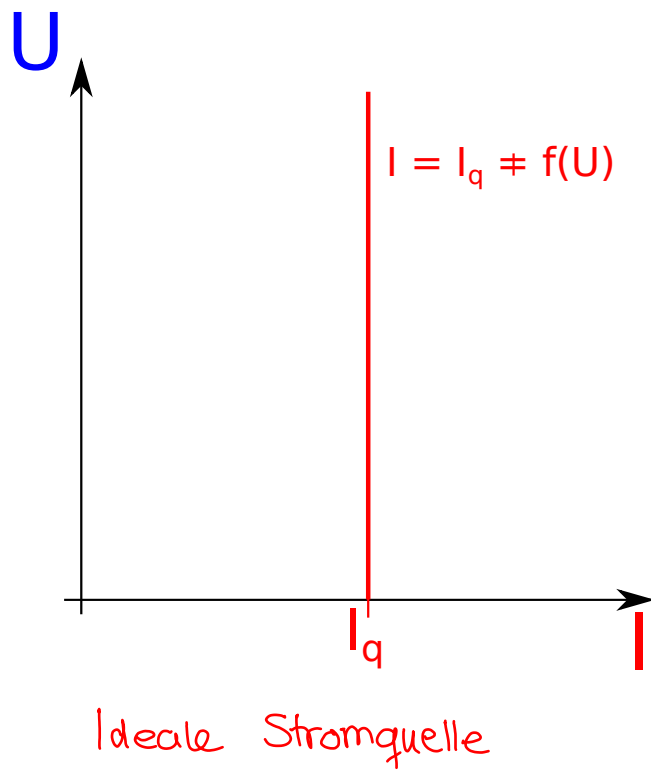
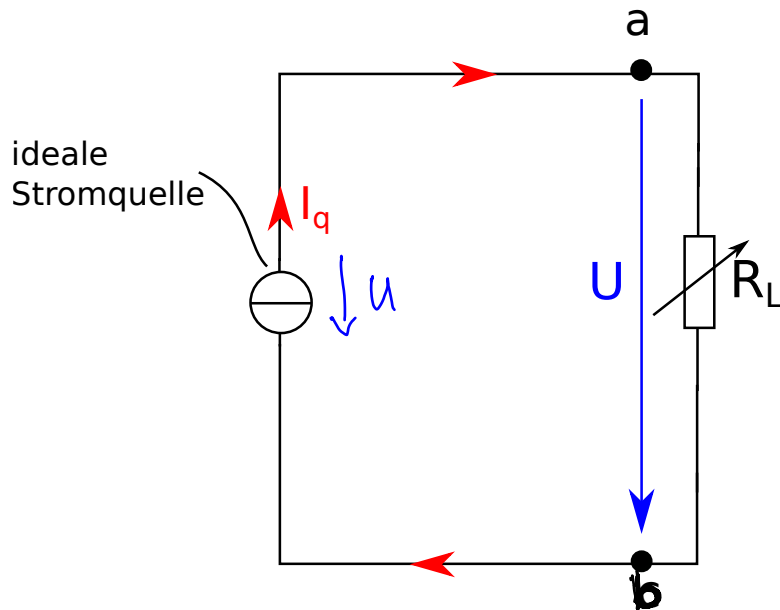
ESB der Realen Quelle:



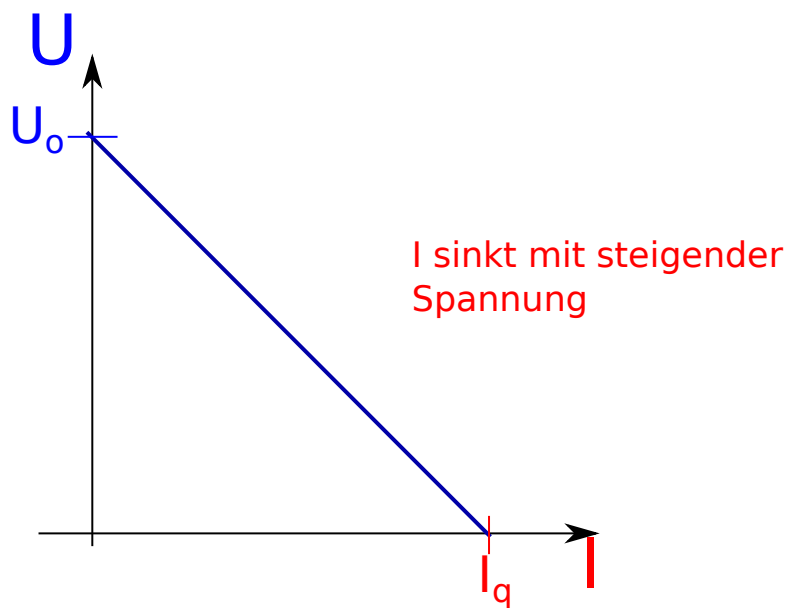
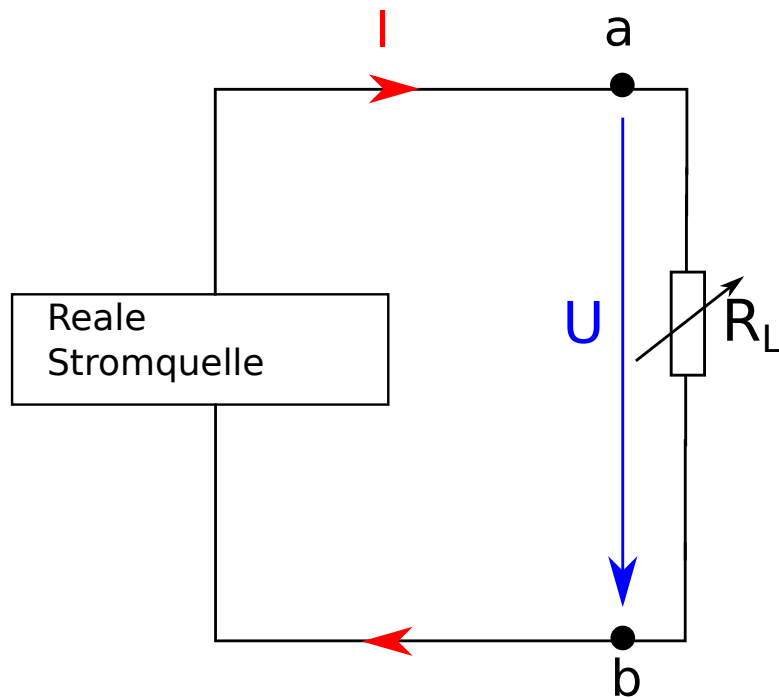
$$R_i = \frac{U_0}{I_k}$$



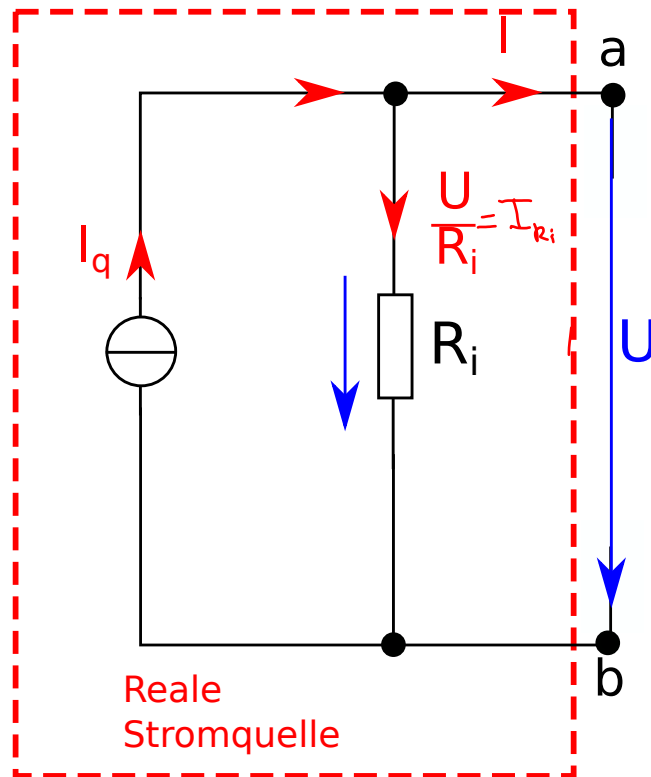
Ideale Stromquelle



Reale Stromquelle



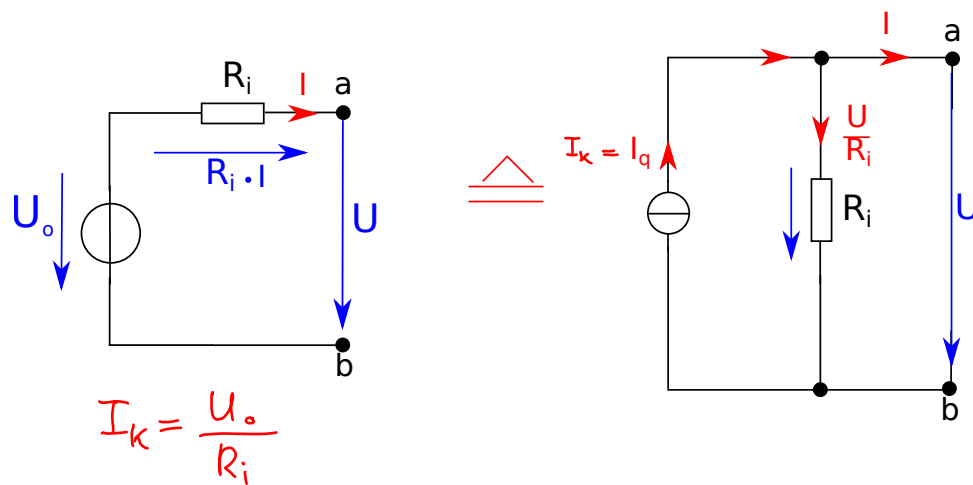
Ersatzschaltbild der realen Stromquelle



$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

Quellenwandlung

Es gilt: Das Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle kann in das Ersatzschaltbild einer realen Stromquelle umgewandelt werden und umgekehrt.



▽
.
▽
.

R_i : gleicher Innenwiderstand

$$I_q \stackrel{!}{=} I_K$$

Berechnungsmethoden von Gleichstromkreisen

Bisher bekannt: Einsetzmethode

Spezielle Methoden:

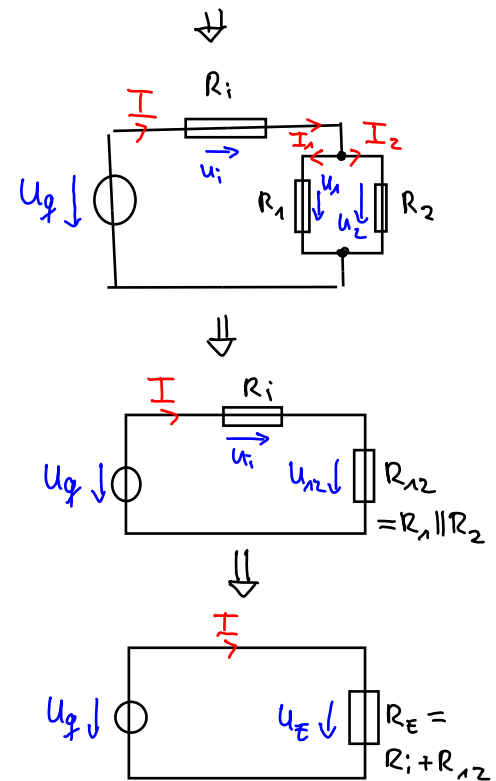
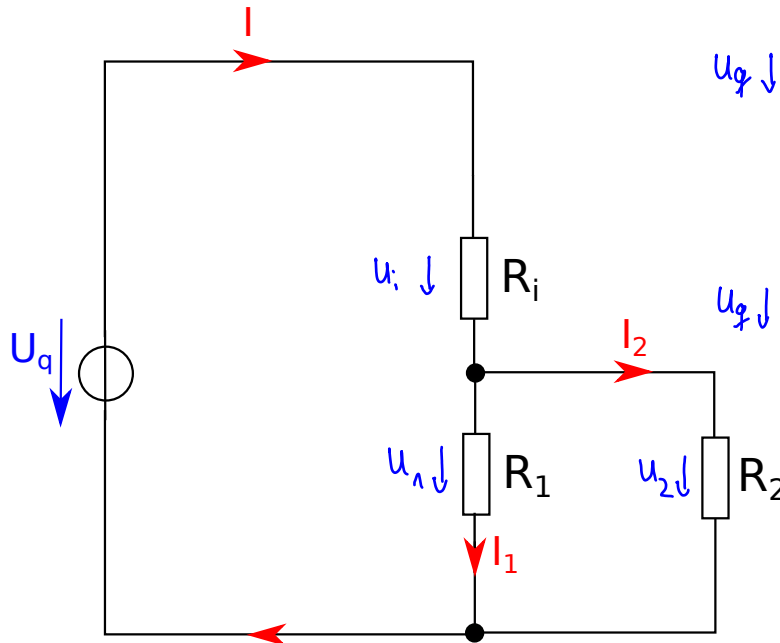
→ Methode der Ersatzspannungsquelle

→ Überlagerungssatz

Beispielschaltung: ideale Spannungsquelle

Bekannt: U_q , R_i , R_1 , R_2

Gesucht: I_2



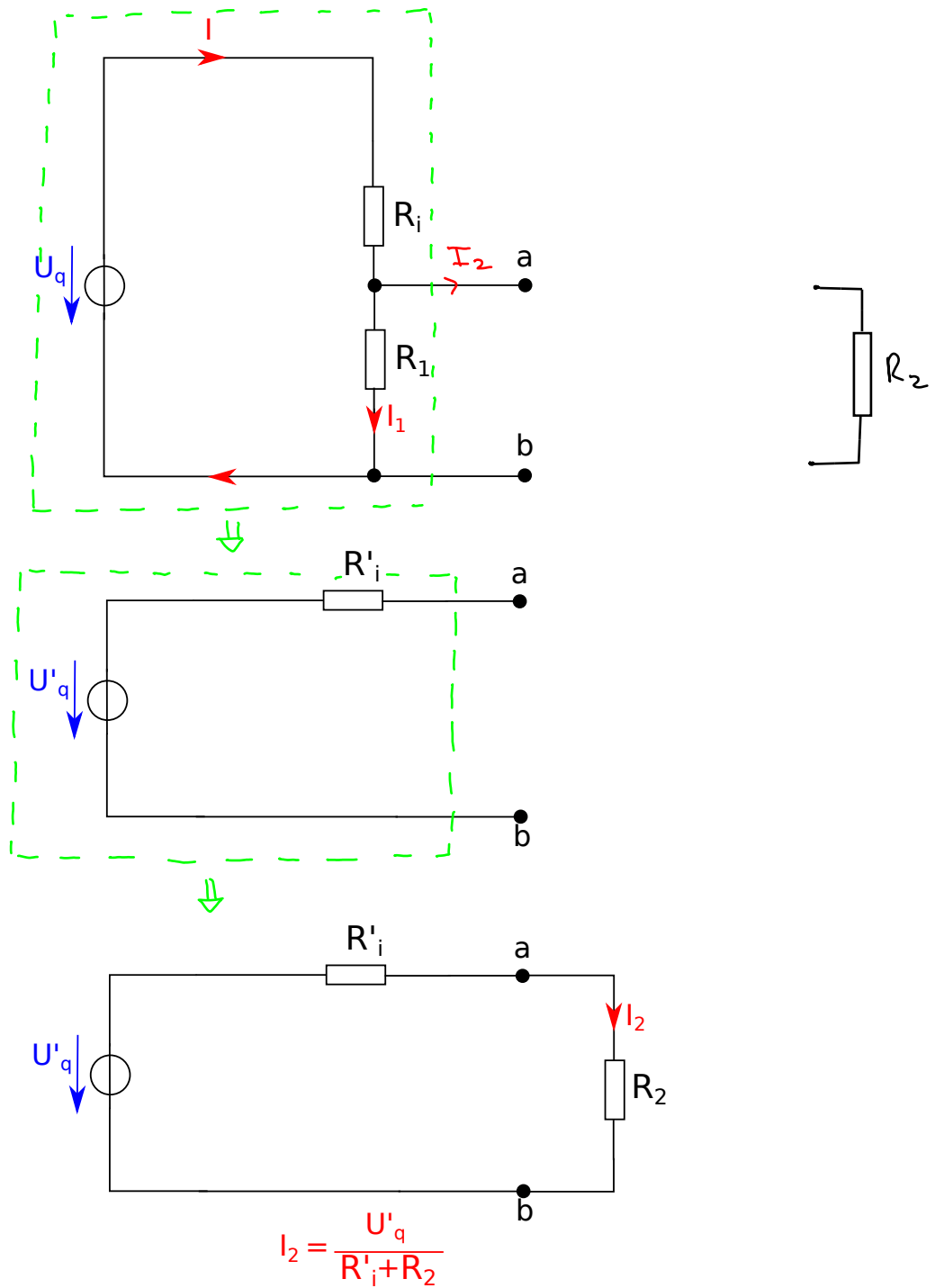
Lösungsmöglichkeiten:

1. Einsetzmethode
2. Einsetzmethode und Spannungs- bzw. Stromteilerregel
3. Methode der Ersatzspannungsquelle: Besonders geeignet, wenn nur ein Zweig in einem komplizierten Netzwerk betrachtet wird.

$I = \frac{U}{R_E} ; R_1 \parallel R_2$ $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $\Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ $\Rightarrow R_E = R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$\Rightarrow I = \frac{U_q}{\frac{R_i R_1 + R_i R_2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ $\Rightarrow I = \frac{U_q (R_1 + R_2)}{R_i R_1 + R_i R_2 + R_1 R_2}$	$U_{12} = U_1 = U_2 = I \cdot R_{12}$ $U_2 = R_2 \cdot I_2$ $\Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{12}}{R_2}$ $= \dots$
---	--	--

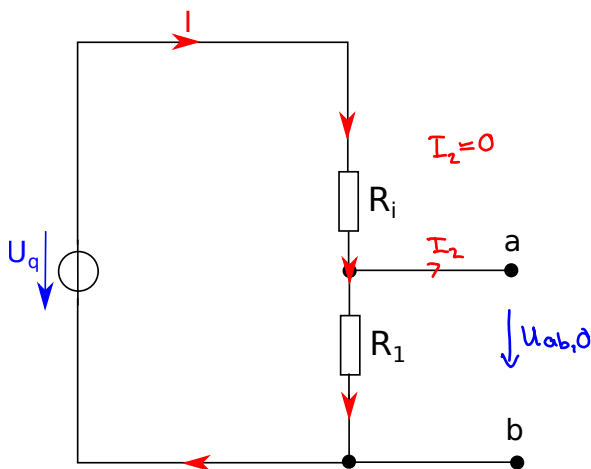
Methode der Ersatzspannungsquelle - Beispielschaltung

Gesucht: I_2



Bestimmung von U_q' und R_i' :

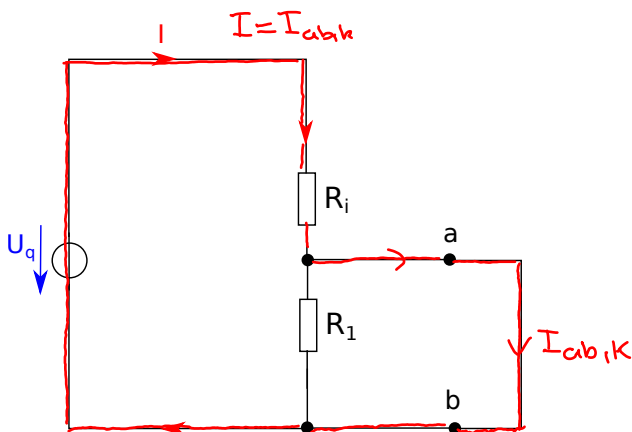
1. Den interessanten Zweig virtuell herausnehmen und die Leerlaufspannung zwischen a und b berechnen.



$$U_{ab,0} \stackrel{!}{=} U_q'$$

$$U_{ab,0} = U_q \frac{R_1}{R_1 + R_i}$$

2. Klemmen a und b (virtuell) kurzschließen und den Kurzschlussstrom $I_{ab,k}$ bestimmen.



$$I_{ab,k} = \frac{U_q}{R_i}$$

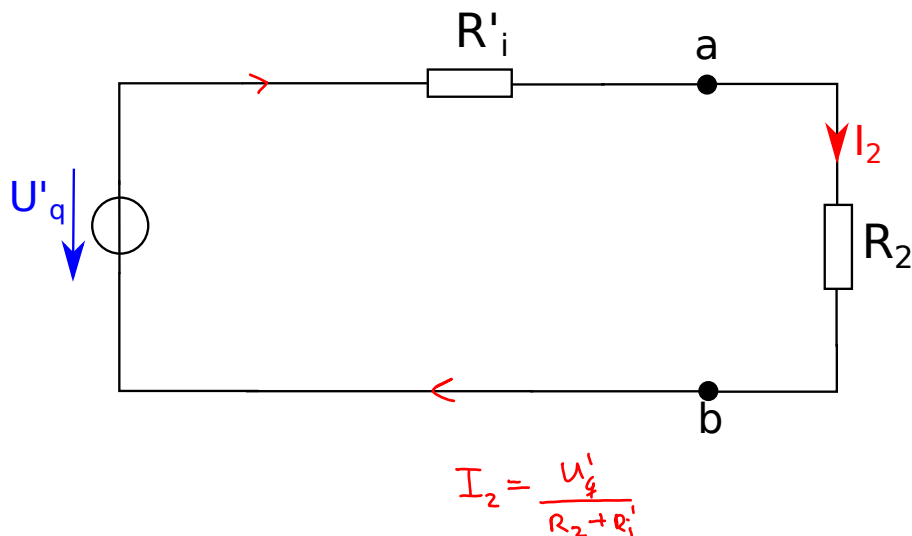
3.

$$R_i' = \frac{U_{ab,0}}{I_{ab,k}}$$

Für die Beispielschaltung

$$\left\{ R_i' = \frac{R_1 \cdot R_i}{R_1 + R_2} \right.$$

Berechnung von I_2 :



$$I_2 = \frac{U'_q}{R_2 + R'_i}$$

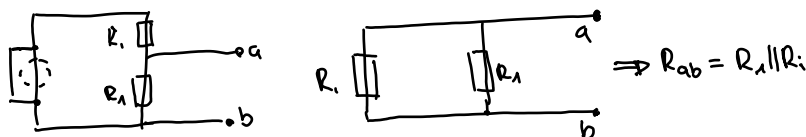
⋮

$$I_2 = U_q \cdot \frac{R_1}{R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_i + R_1 \cdot R_i}$$

Ergänzung zum Punkt 3 – Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von R'_i :

In der Schaltung mit dem entfernten Zweig alle Spannungsquellen kurz schließen (bzw. Stromquelle offen lassen) und dann den gesamten Widerstand zwischen a und b berechnen.

$$R_{ab} = R'_i$$



$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

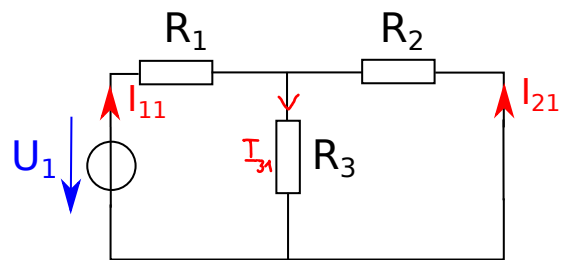
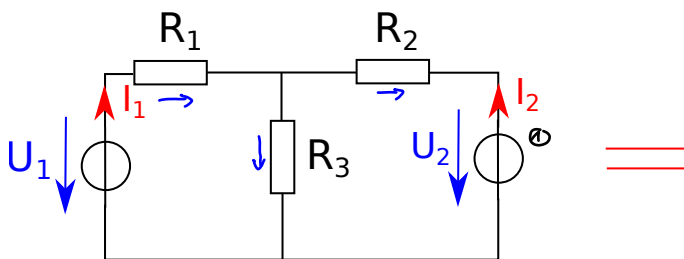
Methode des Überlagerungssatzes

Überlagerungssatz: *hilfreich bei Schaltungen mit mehreren Quellen*

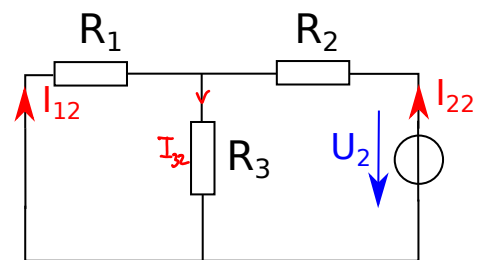
→ Gesamtwirkung = $\sum$ Einzelwirkungen der einzelnen Ursachen

→ Voraussetzung: Lineare Netzwerke

① weglassen der Spannungsquelle
ist kurzgeschlossen



+

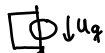


$$I_1 = I_{11} + I_{12}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32}$$

Beachte: → Spannungsquellen werden bei der Einzelbetrachtung, kurzgeschlossen.



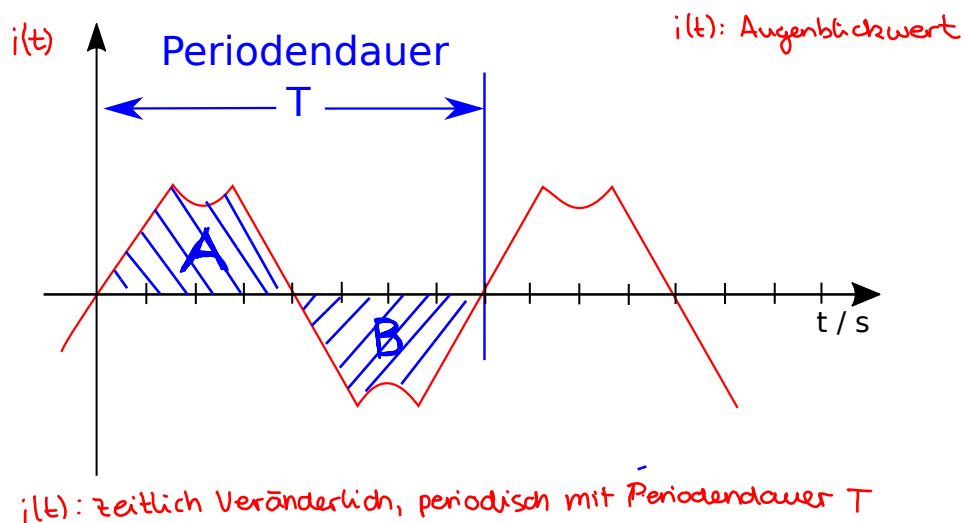
→ Stromquellen werden bei der Einzelbetrachtung, geöffnet



Elektrischer Wechselstrom

Allgemeine Definitionen

Reine Wechselgrößen (Symbole immer klein, und abhängig von der Zeit)



|| Wechselstrom

$$1) i(t) = i(t + nT) \\ n: 1, 2, \dots$$

$$2) \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0$$

|| Wechselspannung

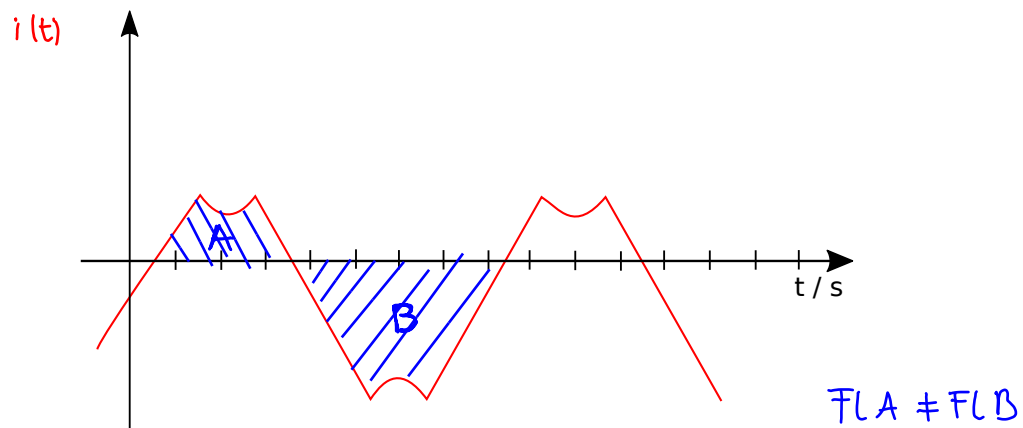
$$1) u(t) = u(t + nT) \quad \text{für } n: 1, 2, \dots$$

$$2) \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt = 0$$

Mischgrößen

Mischstrom:

Überlagerungen von Wechselstrom (WS) und Gleichstrom (GS)

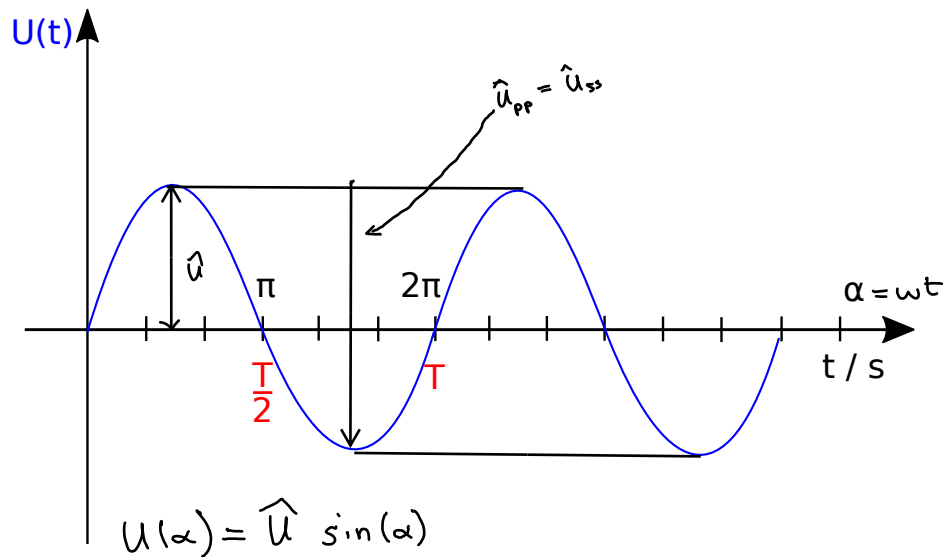


$i(t)$ ist periodisch

$$\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \neq 0$$

$\Rightarrow$ keine Wechselgröße

Sinusfunktion



$$\alpha = \omega \cdot t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (2)$$

T : Periodendauer

f : Frequenz

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \quad (4)$$

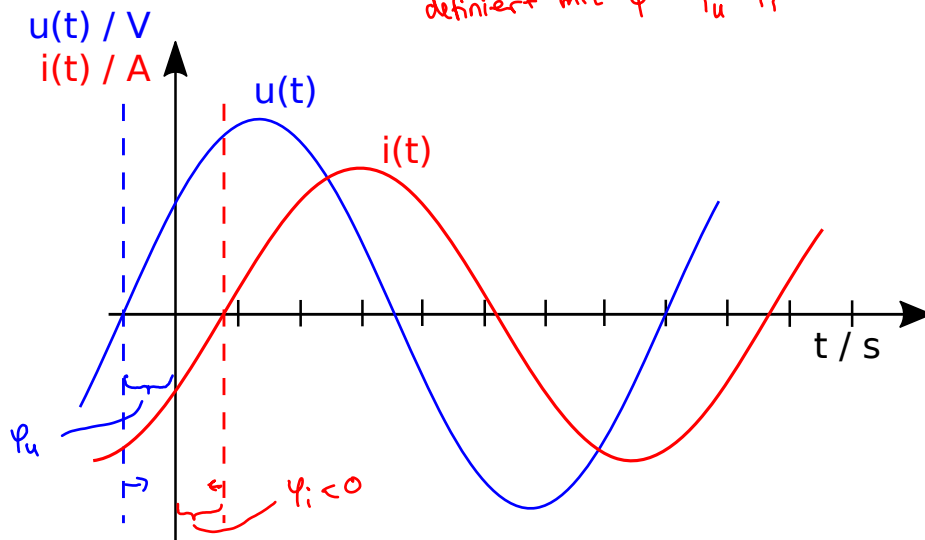
Wenn man bei einem Wechselstromkreislauf großbuchstaben hat bezeichnen diese immer Effektivwerte.

Nullphasenverschiebung

φ_u : Nullphasenverschiebung von $u(t)$
↳ man betrachtet Signal selbst

φ_i : Nullphasenverschiebung von $i(t)$

Phasenverschiebung φ ist in jedem Stromkreis
 definiert mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$



$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

φ_i bzw. φ_u zählen positiv, wenn "→" in Richtung der positiven Winkelzählung zeigt.

Phasenverschiebung φ : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ (5)

$\varphi > 0 \Rightarrow$ Spannung eilt dem Strom **vor**.

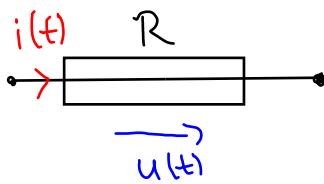
$\varphi < 0 \Rightarrow$ Spannung eilt dem Strom **nach**.

$\varphi = 0 \Rightarrow$ Spannung und Strom sind **in Phase**.

Berechnung von Wechselstromkreisen

→ Gültig sind alle Gesetze und Methoden der Gleichstromberechnung.

Gültig ist auch das Ohmsche Gesetz:



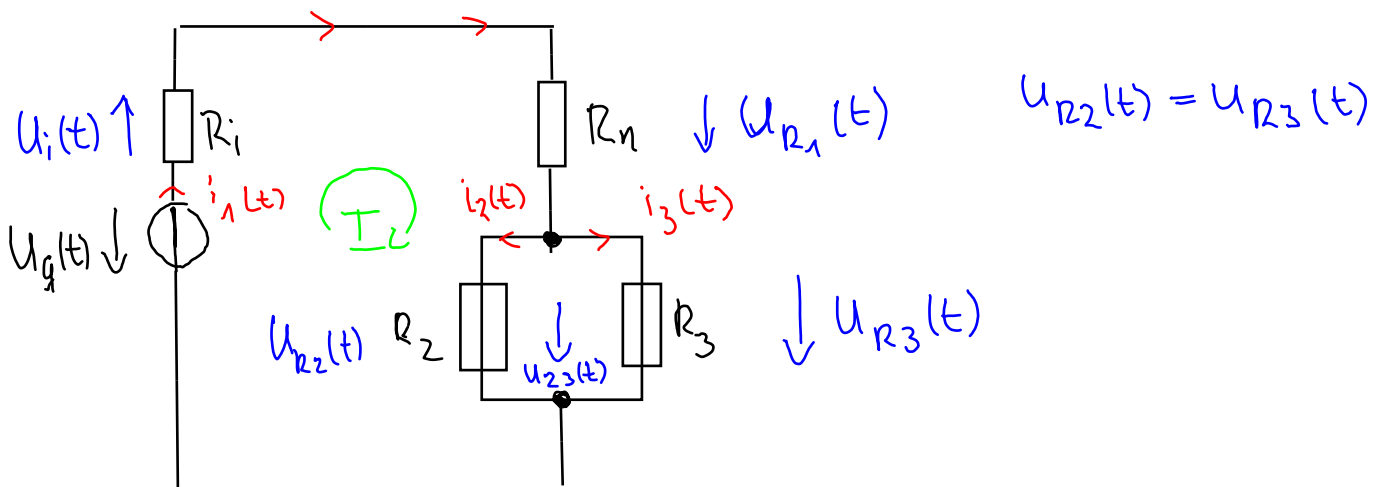
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Maschenregel

$$\sum_m u_m(t) = 0$$

Knotenregel

$$\sum_k i_k(t) = 0$$



$$\mathcal{M}R(I) = -u_g(t) + u_{R1}(t) + u_{R2}(t) + u_{R3}(t) = 0$$

$$u_g(t) = \hat{u}_g \cdot \sin(\omega t)$$

... eine Problembetrachtung

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u(t) = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Wir wissen: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Gesucht: $\hat{u}$ und φ

$$u(t) = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

· Additionstheorem & mühsame Berechnungen



$$\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \textcircled{a}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)}$$

... eine Idee 

Mathematische Betrachtung der Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ mit

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$|\vec{C}| = C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (b)$$

Ⓐ & Ⓑ sind sehr ähnlich

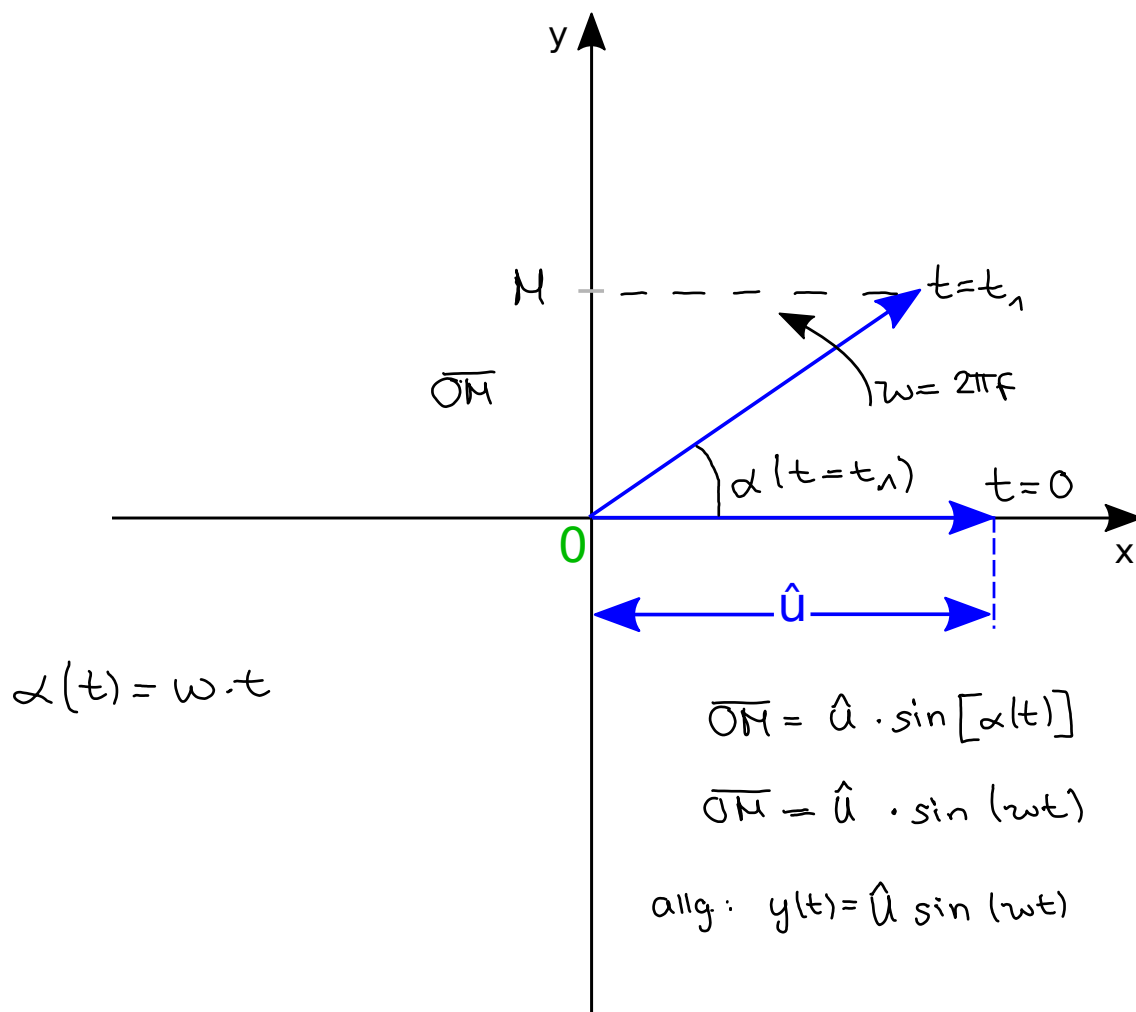


Idee: sinusförmige Größen als Vektoren darstellen!

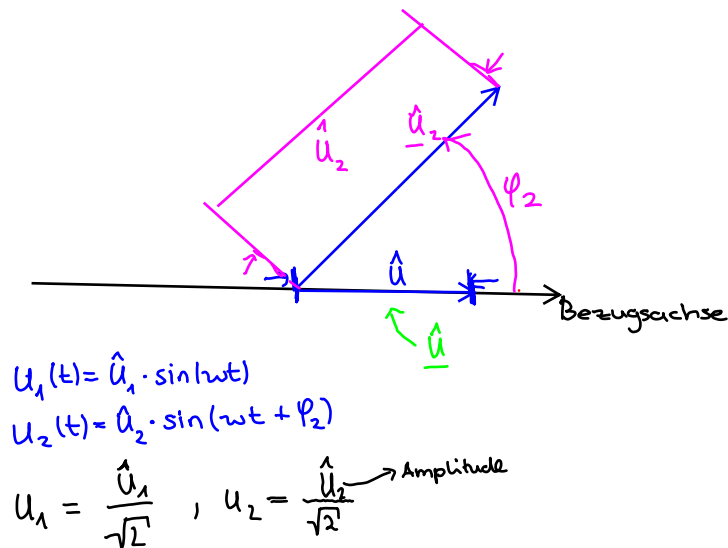


Zeigerdiagramm Darstellung von Wechselgrößen.

Zeigerdarstellung von Wechselgrößen

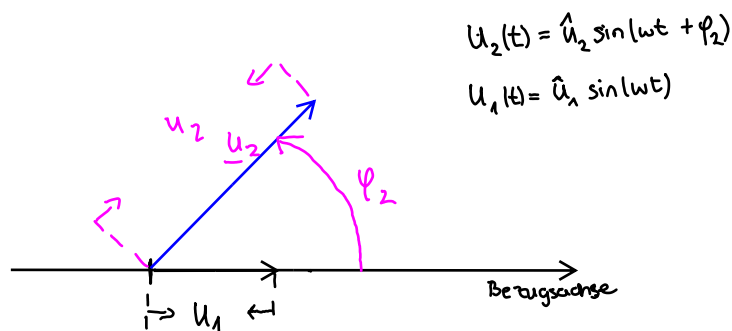


Amplitudenwertzeiger-Darstellung



Effektivwertzeiger-Darstellung

Winkel gegen den Uhrzeigersinn sind positiv

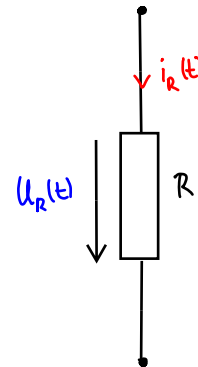


Ohmscher Widerstand und Zeigerdarstellung

Allgemein:

$$i_R(t) = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_R(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$



Ohmsches Gesetz:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

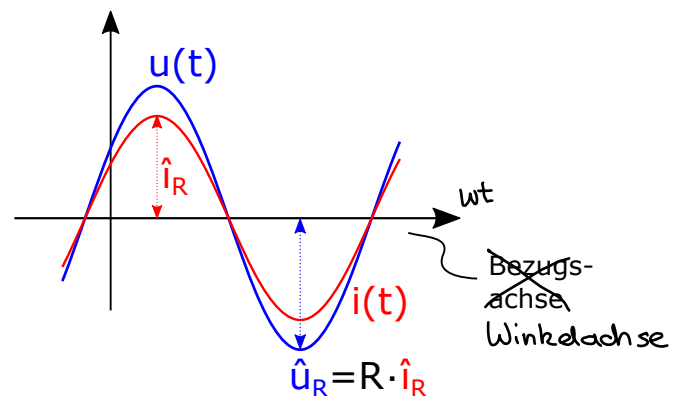
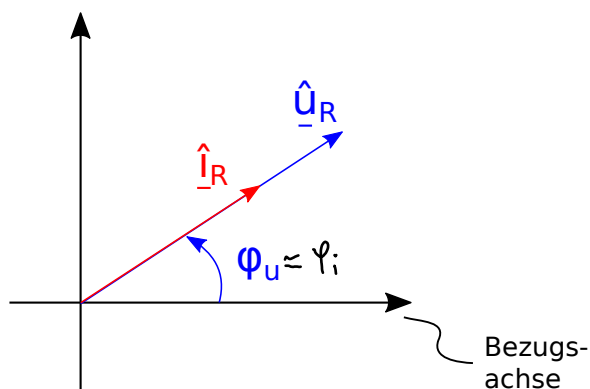
$$\hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = R \cdot \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Amplitudenvergleich $\rightarrow \hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R$ ⑥

$\Downarrow$

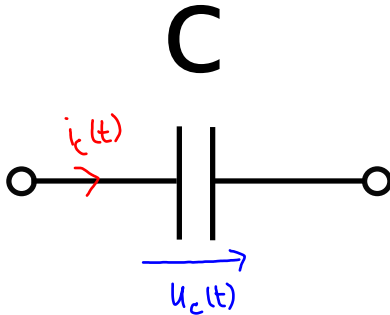
$U_R = R \cdot I_R$

Phasenvergleich $\rightarrow \varphi_u = \varphi_i \Rightarrow \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ ⑦



Kondensator

Kapazität C



$$[C] = 1\text{F} = 1 \text{ Farad}$$

C : Speicher für elektrische Energie

Aufbau → Kapitel 3

Grundgleichung der Kapazität:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{d u_c(t)}{dt} \quad (8)$$

Für den allgemeinen Fall:

$$i_C(t) = \hat{i}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_C(t) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

aus Gleichung (8) folgt:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} [\hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)]$$

$$i_c(t) = C \cdot \hat{u}_C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\hat{i}_c \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = C \cdot \omega \cdot \hat{u}_c \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\hat{i}_c \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = C \cdot \omega \cdot \hat{u}_c \cdot \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2})$$

$$\hat{i}_c = \omega \cdot C \cdot \hat{u}_c$$

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$

Amplitudenvergleich $\rightarrow \hat{u}_c = \underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{:= x_c} \hat{i}_c$ (9)

Phasenvergleich $\rightarrow \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$ (10)

$$\hat{u}_c = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i}_c$$

$$\Downarrow$$

$$U_c = \frac{1}{\omega C} \cdot I_c$$
 (11)

$$\hat{u}_c = x_c \cdot \hat{i}_c$$

$$U_c = X_c \cdot I_c$$

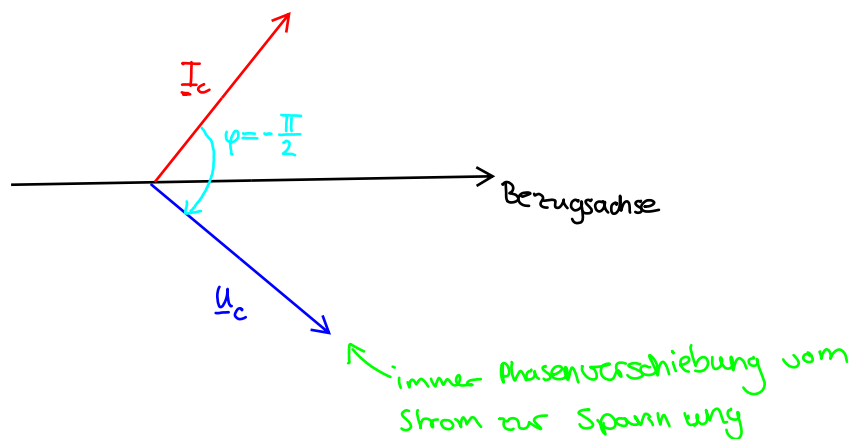
$$\frac{1}{\omega C} = x_c$$
 (12)

X_C : Kapazitiver Blindwiderstand

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (13)$$

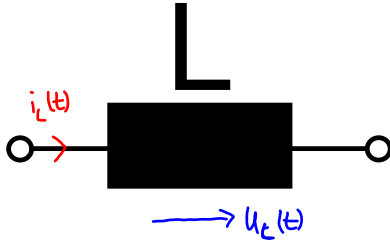
Die Spannung am Kondensator eilt dem Strom durch den Kondensator um $\pi/2$ nach!

Zeigerdiagramm:



$\underline{I}_C$ und $\underline{U}_C$: Effektivwertzeiger

Induktivität L



$$[L] = 1\text{H} = 1 \text{ Henry}$$

L : Speicher für magnetische Energie

Aufbau → Kapitel 3

Grundgleichung der Induktivität:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d i_L(t)}{dt} \quad (14)$$

Für den allgemeinen Fall:

$$i_L(t) = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_L(t) = \hat{u}_L \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

aus Gleichung (14) folgt:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} [\hat{i}_L \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)]$$

⋮
⋮
⋮
▽

Amplitudenvergleich

$$\hat{u}_L = \overset{:= X_L}{\omega \cdot L} \cdot \hat{i}_L \quad (15)$$

$$U_L = \omega \cdot L \cdot I_L \quad (16)$$

Phasenvergleich

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

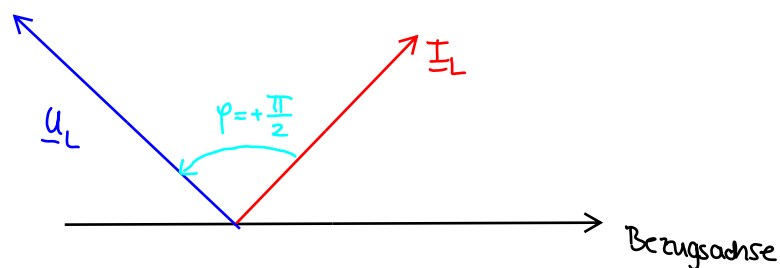
~~Aus den Gleichungen~~ und ~~folgt:~~

$$X_L = \omega \cdot L \quad (18)$$

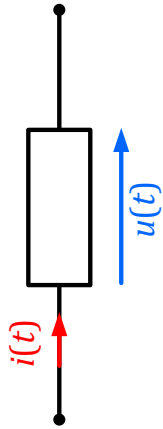
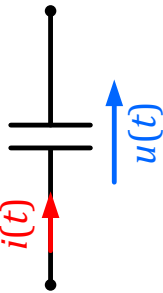
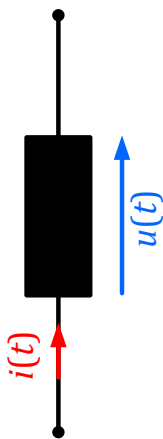
X_L : induktiver Blindwiderstand

Aus Gleichung (17) folgt:

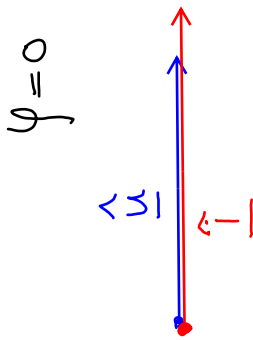
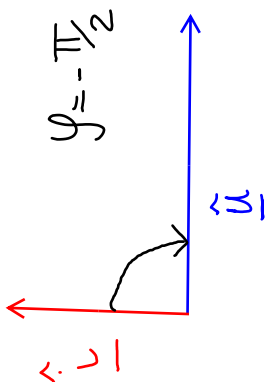
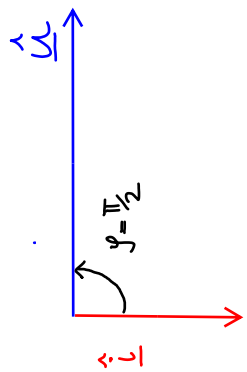
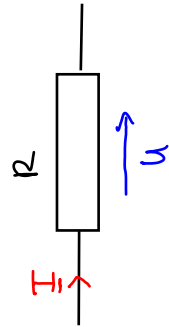
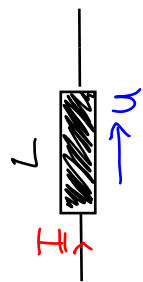
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = +\frac{\pi}{2} \quad (19)$$



gegen Uhrzeigersinn → positiver Winkel
mit " → negativer Winkel

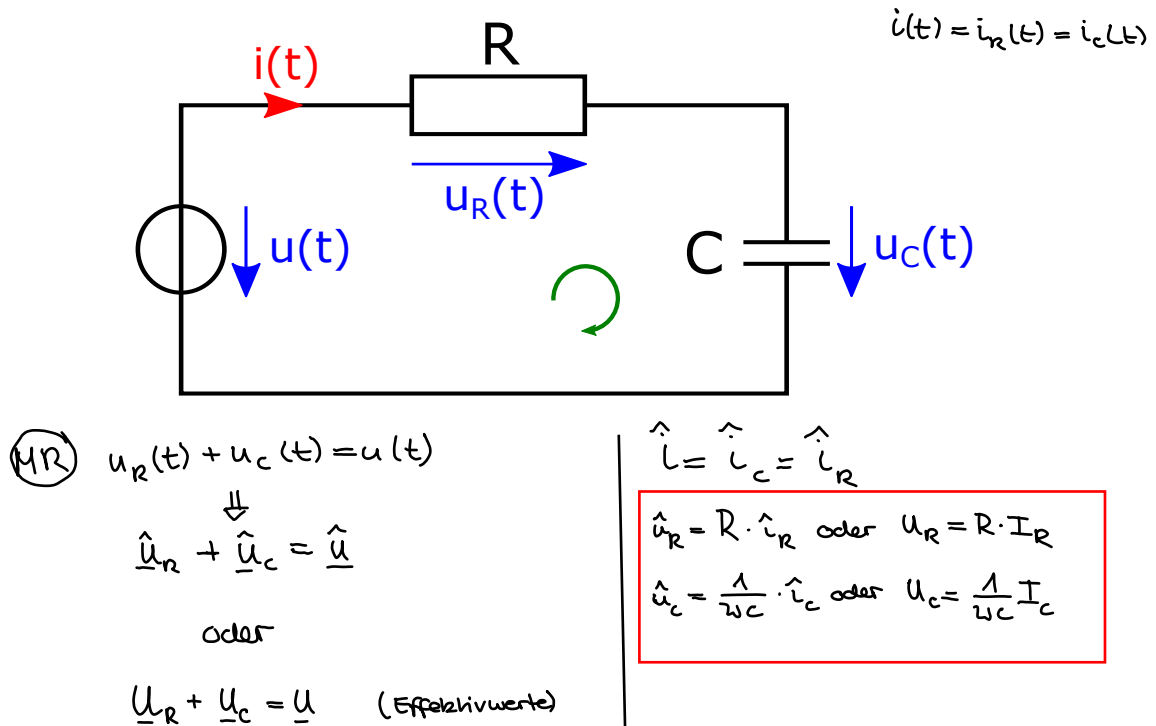
	Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Schaltzeichen			
Kenngleichung	$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$	... Kapitel 3	... Kapitel 3
Zusammenhang Strom und Spannung (Momentanwert)	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
Amplitudenverhältnis	$\hat{u} = R \cdot \hat{i}$	$\hat{u} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \hat{i} := X_C$	$\hat{u} = \omega \cdot L \cdot \hat{i} := X_L$
Effektivwertverhältnis	$U = R \cdot I$	$U = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I$	$U = \omega \cdot L \cdot I$

Länge des Effektivwertzeigers ist immer kleiner als der der Amplitude

	Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Zeigerdiagramm (Amplitude)			
Zeigerdiagramm (Effektivwert)			
Komplexe Schaltung Darstellung			
Komplexe Darstellung	$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$ $\omega = 2\pi f$	$\underline{U} = j\omega \cdot L \cdot \underline{I}$

RC-Schaltung:

Reihenschaltung

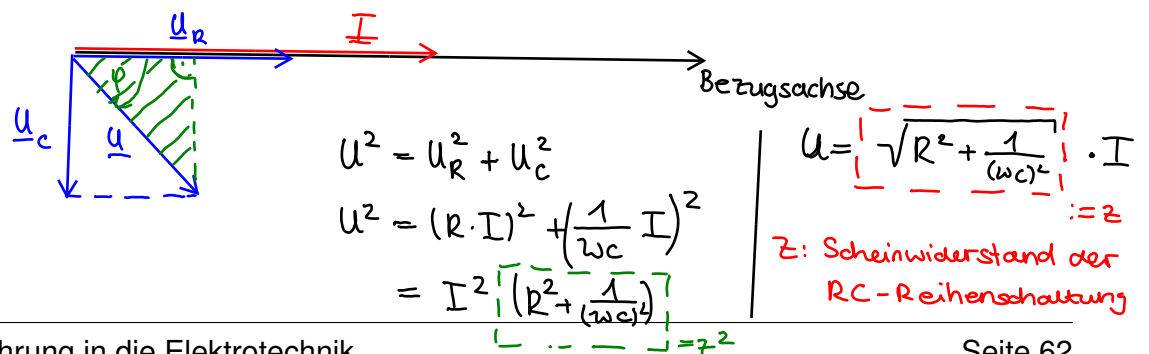


★ $z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} ; [z] = 1 \Omega$

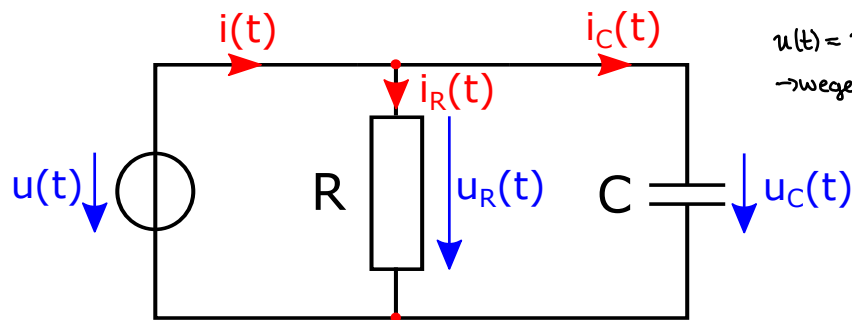
$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega R C}\right)$

Effektivwertzeigerdiagramm:

Reihenschaltung: wir legen auf Bezugsachse den Strom
 Parallelschaltung: // // // die Spannung



Parallelschaltung



$$u_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_C$$

$$u_R = R \cdot I_R$$

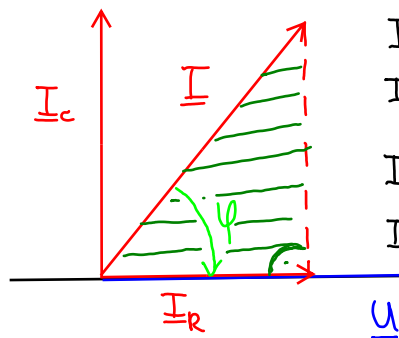
$$u(t) = u_R(t) = u_C(t)$$

→ wegen Parallelschaltung

⇓

$$\underline{u} = \underline{u}_R = \underline{u}_C$$

KR $i(t) = i_R(t) + i_C(t) \Rightarrow \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C$



$$\underline{I}^2 = \underline{I}_R^2 + \underline{I}_C^2$$

$$\underline{I}^2 = \left(\frac{\underline{u}}{R}\right)^2 + (\underline{u} \omega C)^2$$

$$\underline{I}^2 = \underline{u}^2 \left[\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2 \right]$$

$$\underline{I} = \underline{u} \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{I}}{\sqrt{(\omega C)^2 + 1/R^2}} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sqrt{(\omega C)^2 + \frac{1}{R^2}}}$$

Bezugsachse

$\underline{Z}$: Scheinwiderstand der RC-Parallelschaltung

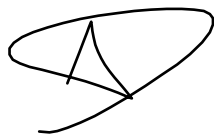
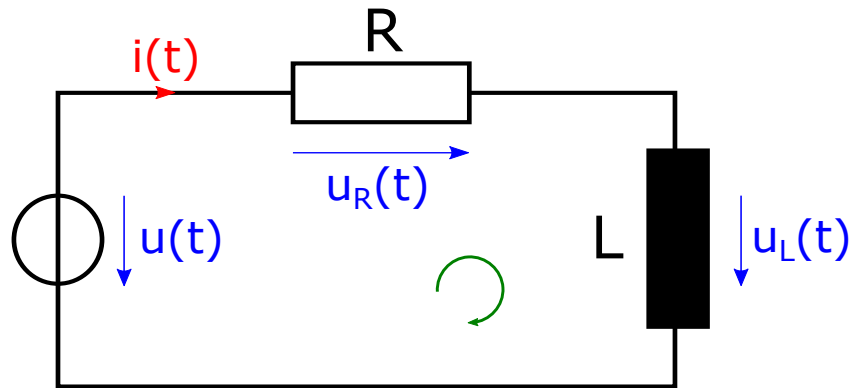
Effektivwertzeigerdiagramm:

$$\varphi = -\arctan \frac{I_C}{I_R}$$

$$\varphi = -\arctan (\omega \cdot C \cdot R)$$

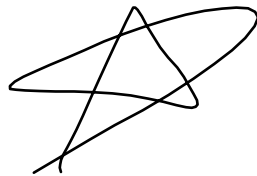
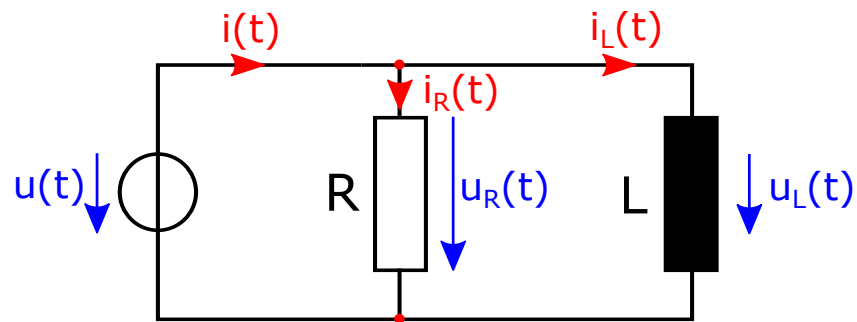
RL-Schaltung:

Reihenschaltung



Effektivwertzeigerdiagramm:

Parallelschaltung



Effektivwertzeigerdiagramm:

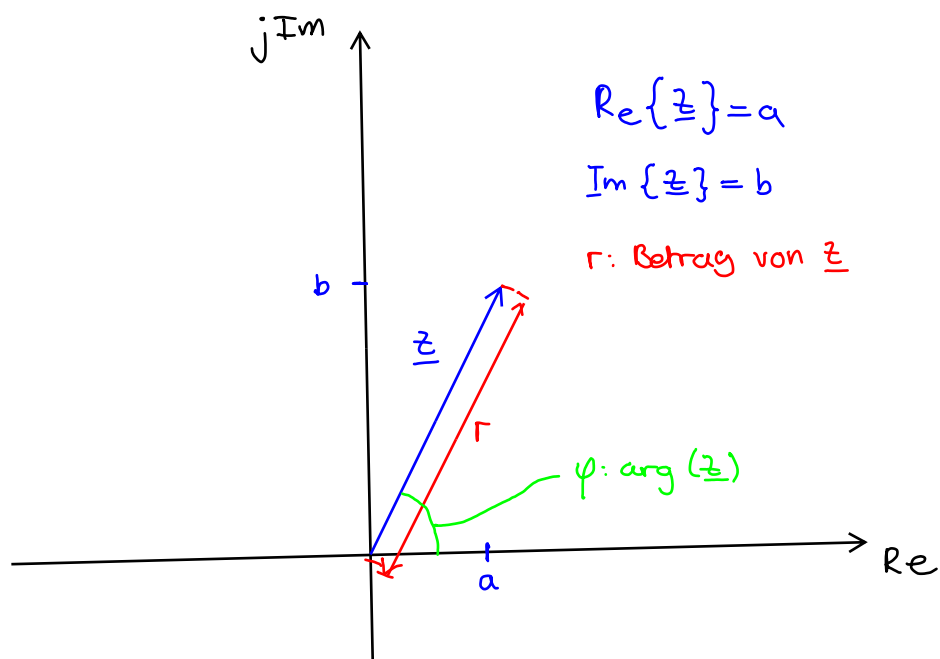
Exkurs: Komplexe Zahlen

imaginäre Einheit: $j = \sqrt{-1}$ (20) (in Mathe "i", in E-Tech "j")

Komplexe Zahl: $\underline{z}$

Darstellung von komplexen Zahlen: $\underline{z} = a + jb \rightarrow$ Kartesische Form (21)

$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} \rightarrow$ Polarkoordinaten Form (22)



Umrechnung kartesisch $\leftrightarrow$ polar:

$$a = \text{Re}\{\underline{z}\} = r \cdot \cos \varphi \quad (23)$$

$$b = \text{Im}\{\underline{z}\} = r \cdot \sin \varphi \quad (24)$$

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (25)$$

$$|\underline{z}| = z$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{\text{Im } \underline{z}}{\text{Re } \underline{z}} \right] \quad (26)$$

komplex konjugierte Zahl $\underline{z}^*$

$$\underline{z} = a + bj \rightarrow \underline{z}^* = a - bj \quad (27)$$

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} \rightarrow \underline{z}^* = r \cdot e^{-j\varphi} \quad (28)$$

Hinweis: $\rightarrow$ Addition bzw. Subtraktion ist einfacher in kartesischer Form
 $\rightarrow$ Multiplizieren bzw. Dividieren ist einfacher in polar Form

Differentiation: $\underline{z} = r \cdot e^{j\omega t}$

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} (r e^{j\omega t})$$

$$= r \frac{d}{dt} (e^{j\omega t})$$

$$\parallel \frac{d\underline{z}}{dt} = r \cdot j\omega e^{j\omega t}$$

Integration: $\underline{z} = r \cdot e^{j\omega t}$

$$\int \underline{z} dt = \int r \cdot e^{j\omega t} dt$$

$$= r \int e^{j\omega t} dt$$

$$= r \cdot \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

$$= -j \frac{r}{\omega} \cdot e^{j\omega t}$$

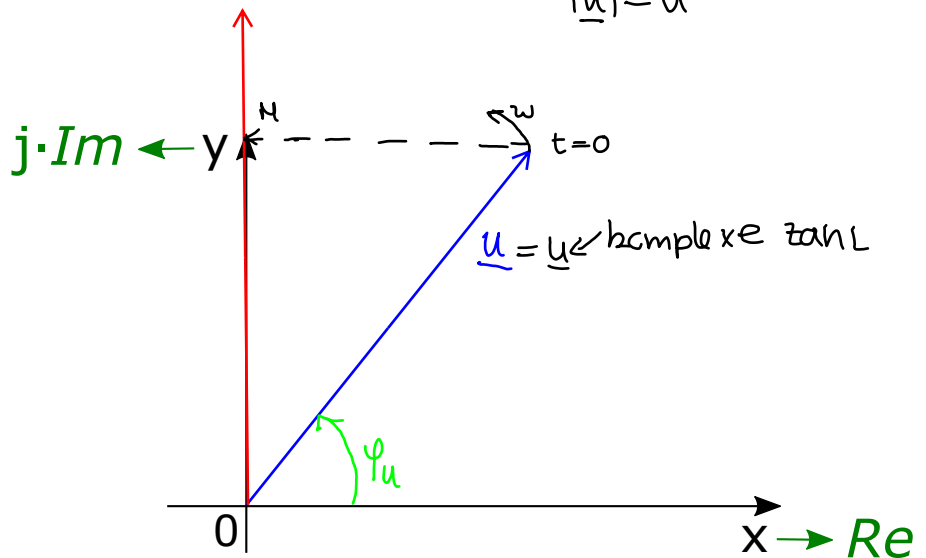
Komplexe Darstellung von Wechselgrößen

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$|\underline{u}| = \hat{u} \quad \leftarrow \text{Effektivwert}$$

$$\overline{OM} = \hat{u} \cdot \sin \varphi_u$$

$$\overline{OM} = \frac{u(t=0)}{\sqrt{2}}$$



$$\underline{u} = a + jb = \hat{u} e^{j\varphi_u}$$

$$\begin{aligned} \text{Beliebige } t: \underline{u} &= \hat{u} \cdot e^{j(\varphi_u + \omega t)} \\ &= \hat{u} [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] \\ &= \operatorname{Re}(\underline{u}) + j \operatorname{Im}(\underline{u}) \end{aligned}$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

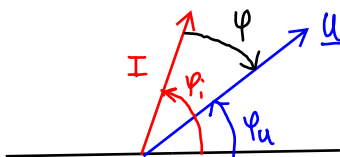
$$\operatorname{Im}(\underline{u}) \cdot \sqrt{2} = u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Zeigendarstellung

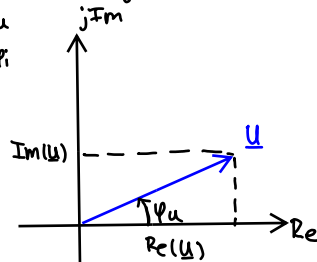
Effektivwertzeiger $\swarrow$ Amplitudenwertzeiger



Komplexe Darstellung

$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$$



$$|\underline{u}| = \hat{u}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\underline{u})^2 + \operatorname{Im}(\underline{u})^2}$$

$$\varphi_u =$$

• • • nächstes Mal

Widerstand R

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

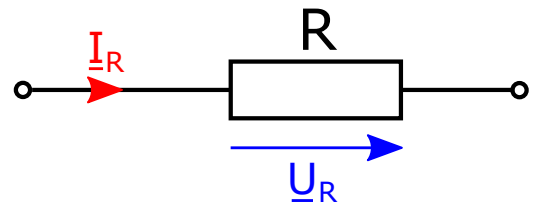
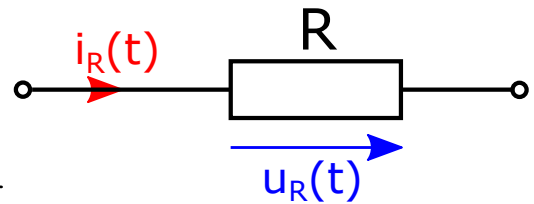
$$\hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R$$

$$U_R = R \cdot I_R$$

Komplexe Rechnung: dann in Schaltbild kennzeichnen,
indem man Nomenklatur ändert

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$$

(29)



Komplexe Wechselstromrechnung und Kapazität

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

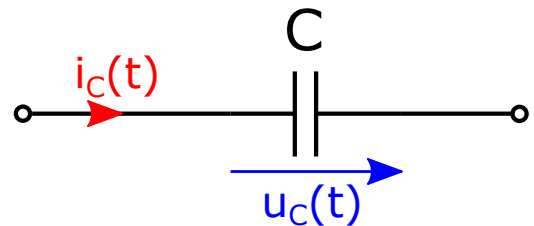
$$u_c(t) = \frac{1}{\omega C} \dot{i}_c$$

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_c$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\omega C} = x_c$$

x_c : kapazitiver Blindwiderstand

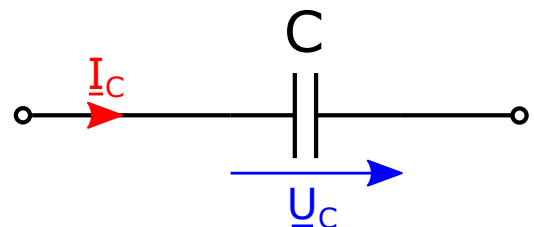


Komplexe Rechnung:

$$\underline{U}_c = \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{\underline{Z}_c} \cdot \underline{I}_c \quad (30)$$

$\underline{Z}_c$: komplexer kapazitiver Scheinwiderstand

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -j x_c \quad (31)$$



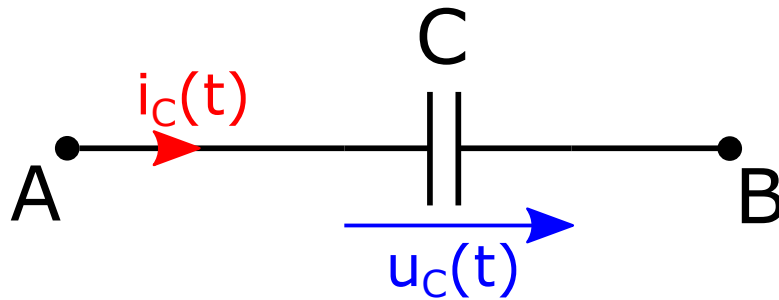
$$\frac{1}{j} = \frac{j}{\underbrace{j^2}_{=-1}} = -j$$

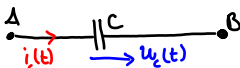
$$x_C = \frac{1}{\omega C}$$

Frequenzabhängigkeit von X_C :

$$\underline{z}_C = -j x_C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} ; \quad \omega = 2\pi f$$



$\omega \approx 0$	$0 < \omega < \infty$	$\omega \rightarrow \infty$
$x_C \rightarrow \infty$ $i_C(t) \rightarrow 0$ ↳ Leerlaufsituation: offene Klamme 	$x_C = \frac{1}{\omega C}$  $i_C(t) = C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$	$x_C \rightarrow 0$ $u_C(t) \rightarrow 0$ "Kurzschluss" 

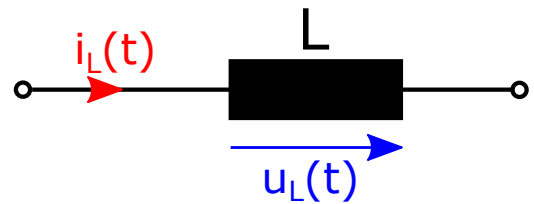
Komplexe Wechselstromrechnung und Induktivität

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\hat{u}_L = \omega L \hat{i}_L$$

$$U_L = \omega L \cdot I_L$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = +\pi/2$$



$$\omega L = X_L$$

X_L : Induktiver Blindwiderstand

Komplexe Rechnung

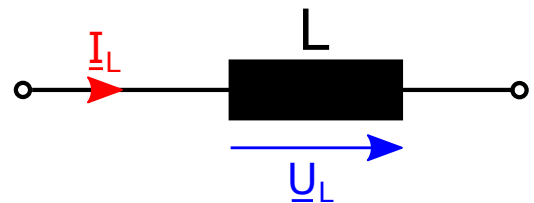
$$\underline{U}_L = \underbrace{j\omega L}_{Z_L} \underline{I}_L$$

(32)

Z_L : komplexer induktiver Scheinwiderstand

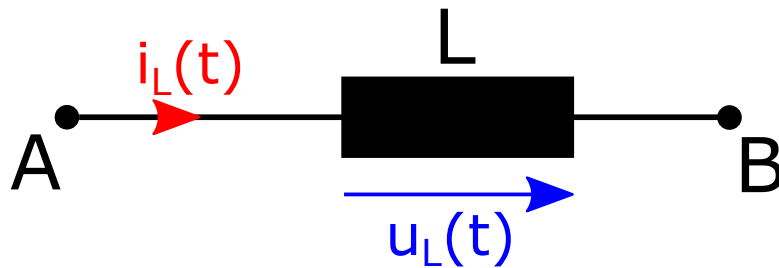
$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

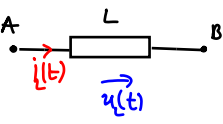
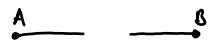
(33)



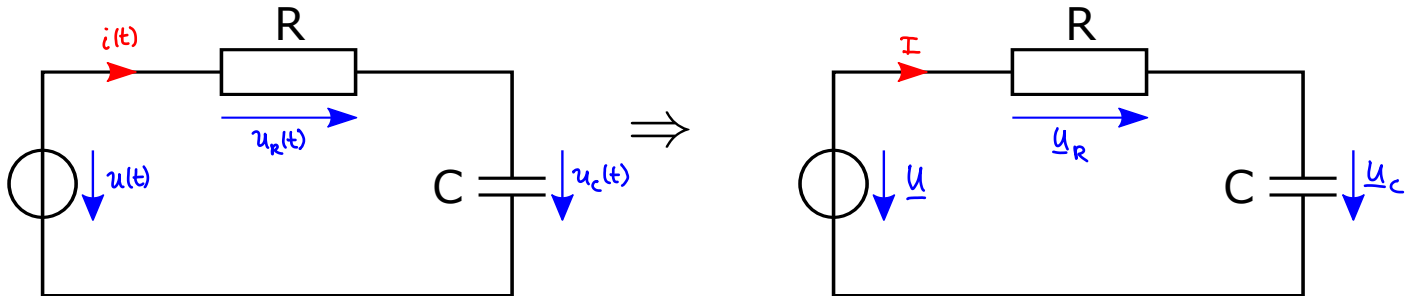
Frequenzabhängigkeit von X_L :

$$X_L = \omega \cdot L ; \quad \omega = 2\pi f$$



$\omega \approx 0$	$0 < \omega < \infty$	$\omega \rightarrow \infty$
$x_L \rightarrow 0$  $u_L(t) \rightarrow 0$ Kurzschluss	$x_L = \omega \cdot L$  $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$x_L \rightarrow \infty$  $i_L(t) \rightarrow 0$ "Leertlauf"

RC-Reihenschaltung und komplexer Widerstand Z



$$\text{MRI: } \underline{u}_R + \underline{u}_C = \underline{u}$$

$$R \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \underline{u}$$

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I} = \underline{u}$$

$$:= \underline{Z}$$

$\underline{Z}$: Komplexer Widerstand
der RC-Reihenschaltung

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$$

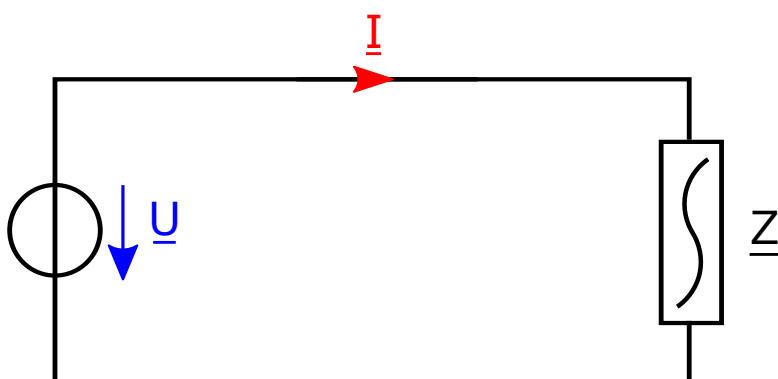
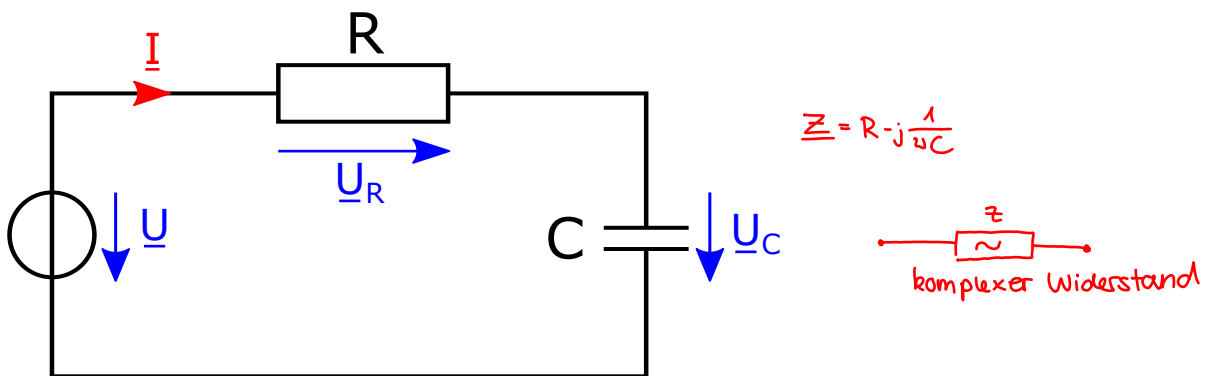
$$|\underline{Z}| = Z$$

$\underline{Z}$: Komplexer Widerstand ($\hat{=}$ Impedanz)

$|\underline{Z}| = Z$; Z : Scheinwiderstand

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (34)$$

$$U = Z \cdot I \quad (35)$$

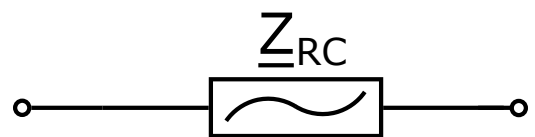
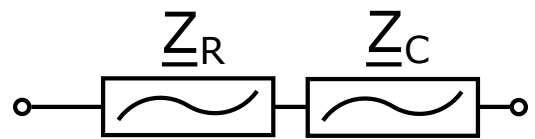
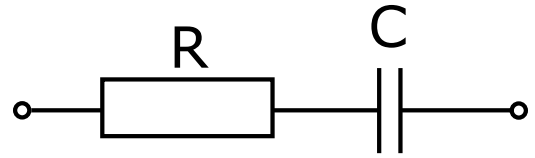


RC-Reihenschaltung

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

$$\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C$$



Admittanz

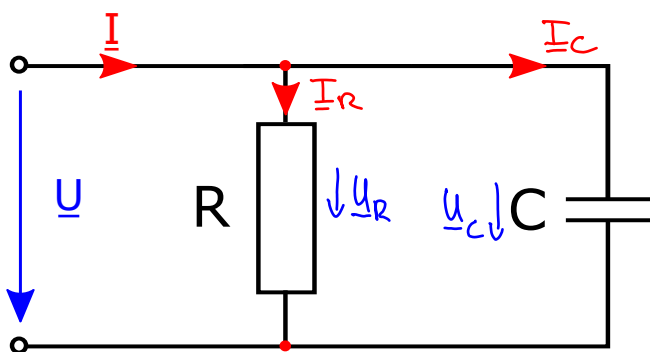
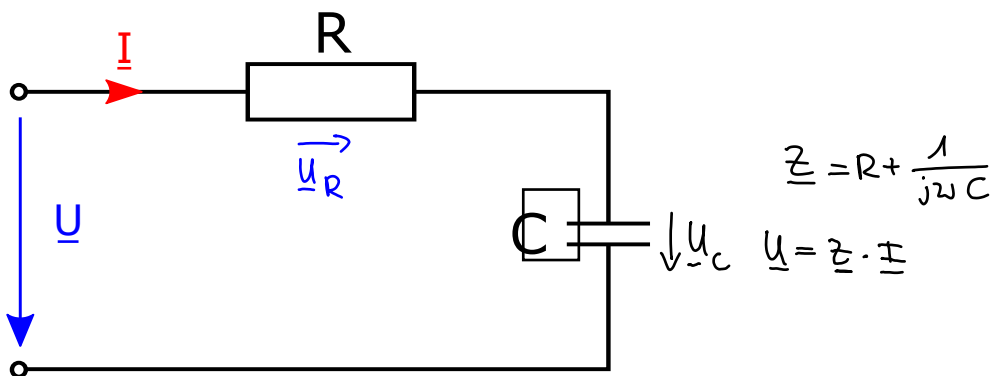
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}} \cdot \underline{U}$$

$:= \underline{Y}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (36)$$

$\underline{Y}$: Admittanz



$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}$$

$$\left[\frac{1}{\underline{Z}} \right] = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$:= \underline{Y}$$

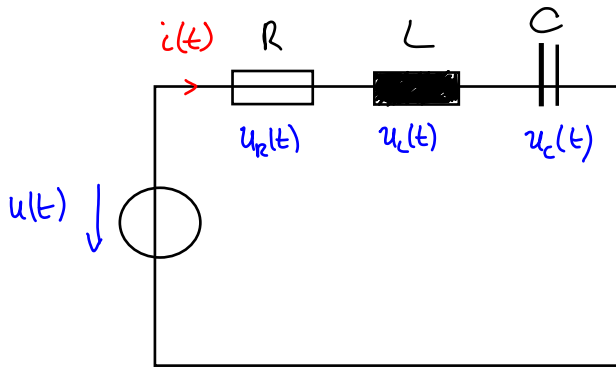
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

RC-Reihenschaltung

Grobe Analyse:

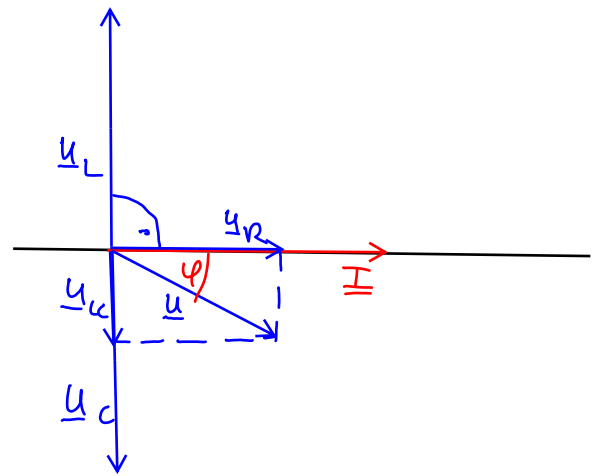
Beispiel: RLC-Reihenschaltung



Effektivdiagramm:

$$\text{Annahme: } \frac{1}{\omega C} > \omega L$$

$$\underline{u} = \underline{u}_C + \underline{u}_L + \underline{u}_R$$



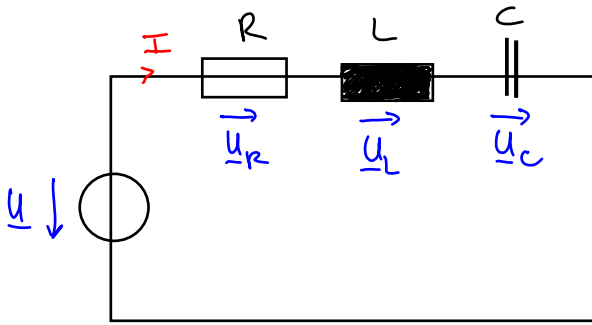
$$\underline{u}_R = R \cdot \underline{I}$$

$$\underline{u}_{LC} = \underline{u}_L + \underline{u}_C$$

$$\underline{u}_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{u}_L = \omega L \cdot \underline{I}$$

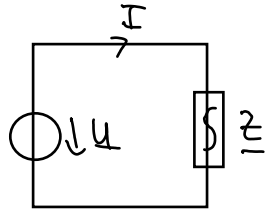
Komplexe Rechnung einer RLC-Reihenschaltung



Gegeben: $U(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$; $\varphi_u = 0$

Gesucht: I

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$



$$\left. \begin{array}{l} \underline{U} = U \cdot e^{-j\varphi_u} \\ \text{mit } \varphi_u = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{U} = U \\ \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L$$

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

$$= R - j \frac{1}{\omega C} + j\omega L$$

$$= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$= \frac{U \left[R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot \left[R - j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} = \frac{UR - jU \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$= \frac{UR}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} - j \frac{U \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\underline{I} = \operatorname{Re}(\underline{I}) + j \operatorname{Im}(\underline{I}) = a + jb$$

$$I = |\underline{I}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\underline{I})^2 + \operatorname{Im}(\underline{I})^2}$$

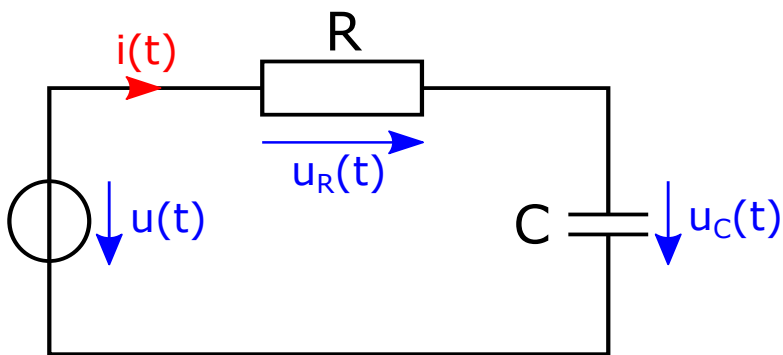
$$I = \frac{U}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\varphi_i = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{I})}{\operatorname{Re}(\underline{I})} \right) = \arctan \left[\frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \right]$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\varphi = 0 - \varphi_i = -\varphi_i$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$



Gegeben:

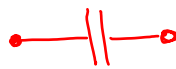
$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

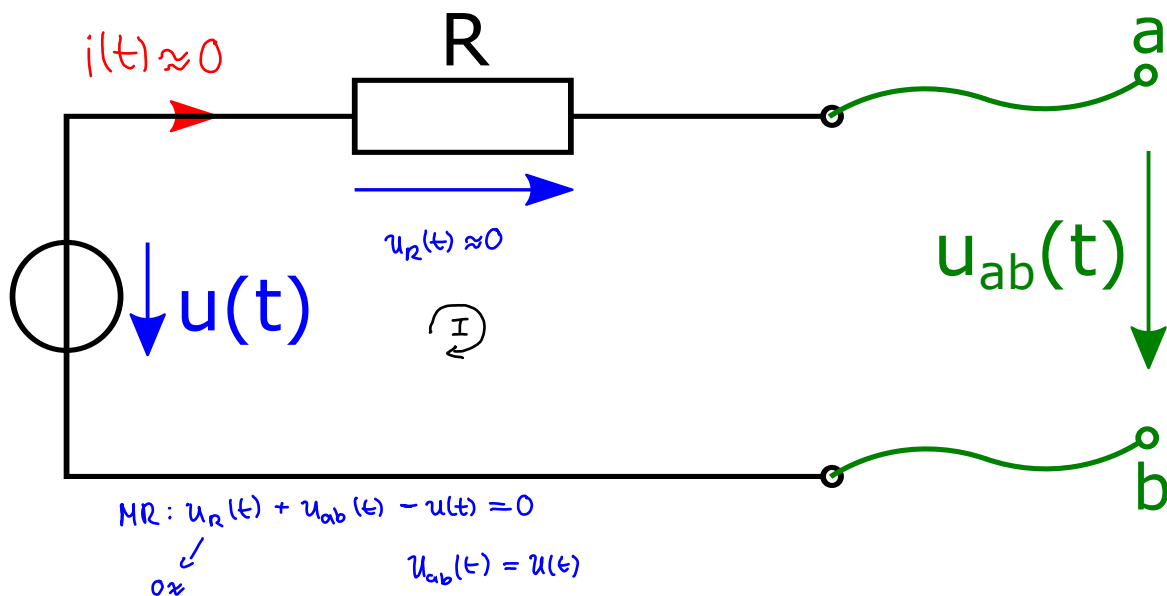
ω : ist veränderlich

Gesucht:

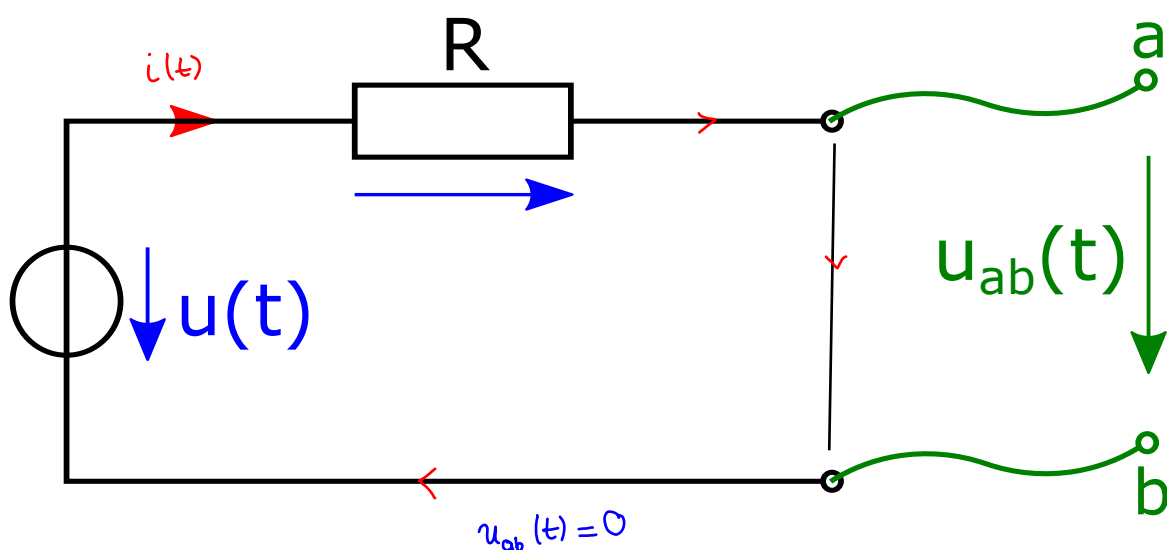
$u_{ab}(t)$ in Abhängigkeit von ω

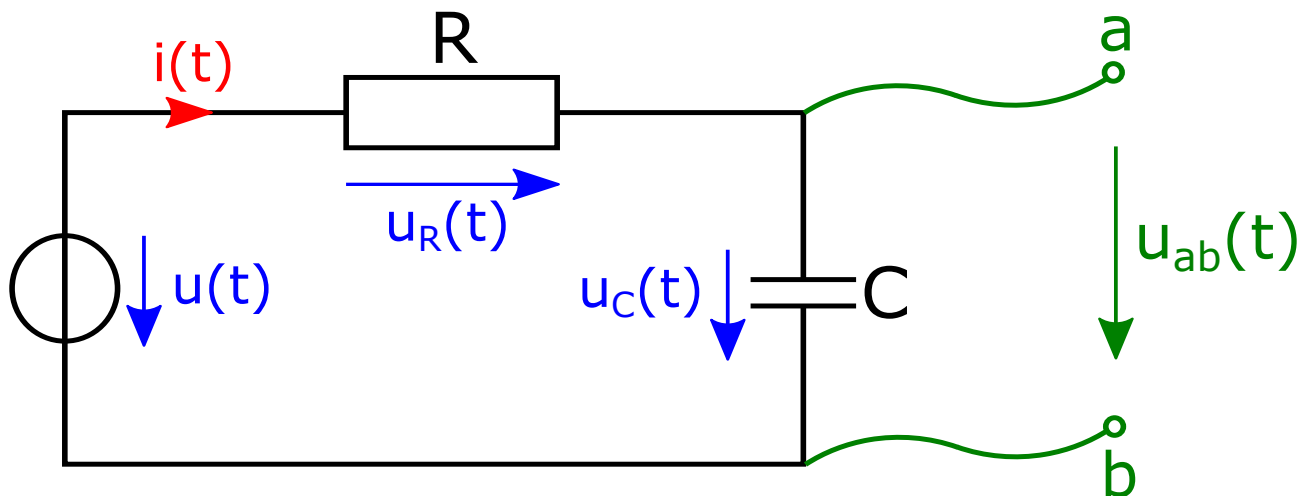
Grobe Analyse von $u_{ab}(t)$

Schritt 1: Niedrige Frequenzen $\omega \approx 0$  $X_C = \frac{1}{\omega C}$
 $X_C \rightarrow \text{sehr hoch} \rightarrow \infty$



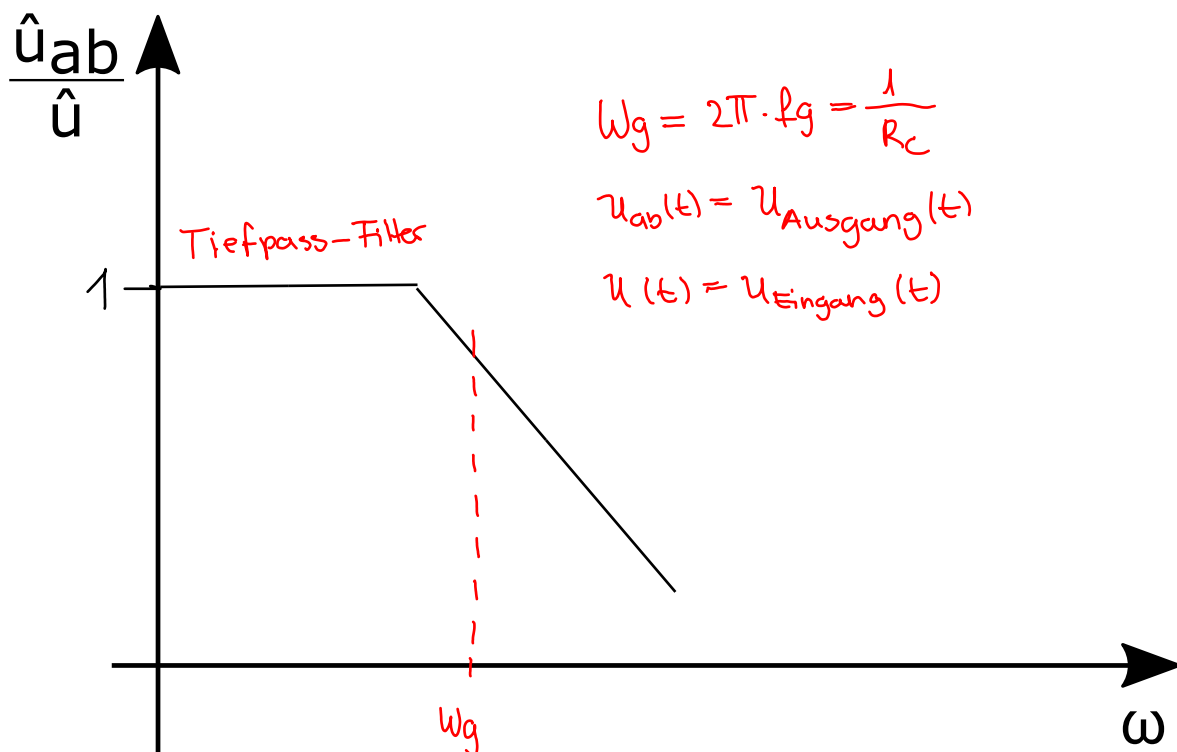
Schritt 2: Hohe Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$  $X_C = \frac{1}{\omega C}$
 $X_C \rightarrow 0$ "Kurzschluss"

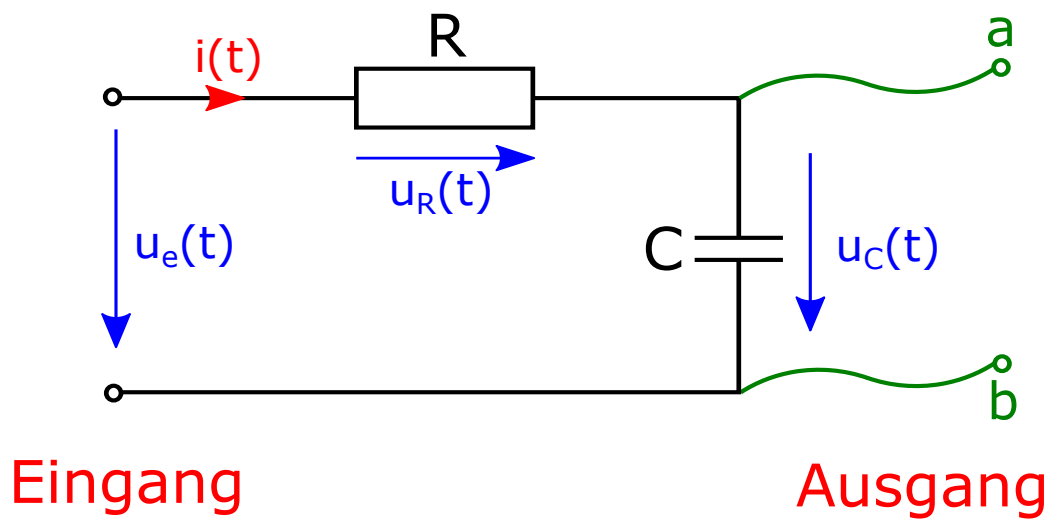




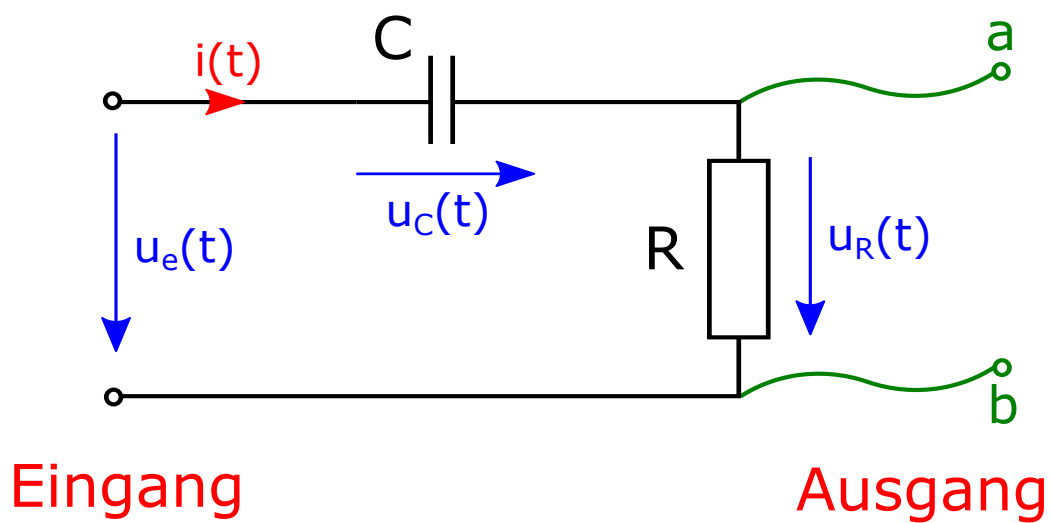
$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

ω : veränderlich





Hochpass-Filter



Anwendung: Frequenzweiche

Blind- und Wirkspannung, Blind- und Wirkstrom

Wirkspannung $\hat{u}_W$

$$\hat{u}_W = \hat{u} \cdot \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad u_W = u \cdot \cos \varphi$$

37

Blindspannung $\hat{u}_B$

$$\hat{u}_B = \hat{u} \cdot \sin(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad u_B = u \cdot \sin \varphi$$

38

Wirkstrom $\hat{i}_W$

$$\hat{i}_W = \hat{i} \cdot \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad I_W = I \cos \varphi$$

39

Blindstrom $\hat{i}_B$

$$\hat{i}_B = \hat{i} \cdot \sin(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad I_B = I \cdot \sin \varphi$$

40

Elektrische Leistung und Arbeit im Wechselstromkreis

$$P(t) = u(t) \cdot i(t)$$

(41)

$P(t)$: Augenblickswert der Leistung

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) \cdot dt$$

(42)

W : Arbeit, die im Zeitintervall $(t_1 - t_2)$ geleistet wird

Für

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) &= \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned} \right\} \leadsto (41) \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$p(t) = \hat{u} \cdot \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \overbrace{\cos(\varphi_u - \varphi_i)}^{\varphi} - \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos(\overbrace{2\omega t + \varphi_u + \varphi_i}^{2\omega t + \varphi_u + \varphi_i})$$

$$p(t) = \left[\frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos(\varphi) \right] + p_2(t)$$

(43)

P : ist der arithmetische Mittelwert von $p(t)$.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos(\varphi) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cos(\varphi)$$

P wird Wirkleistung genannt.

$$P = U \cdot I \cos(\varphi) \quad (44)$$

$p(t) > 0 \Rightarrow i(t)$ und $u(t)$ haben das gleiche Vorzeichen:

Quelle $\xrightarrow{\text{Energie}}$ Verbraucher

$p(t) < 0 \Rightarrow i(t)$ und $u(t)$ haben verschiedene Vorzeichen:

Quelle $\xleftarrow{\text{Energie}}$ Verbraucher

Wirkleistung P	Blindleistung Q	Scheinleistung S
$P = U \cdot I \cos \varphi$ $[P] = 1 \text{ W}$ $\cos \varphi = \text{Leistungsfaktor}$ P : Leistung, die wirklich verbraucht wird	$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$ $[Q] = 1 \text{ VAR} \hat{=} 1 \text{ W}$ VAR : Volt-Ampère-Reaktiv Q : Leistung, die zwischen Verbraucher und Quelle hin- und hergeschoben wird	$S = U \cdot I$ $[S] = 1 \text{ VA} \hat{=} 1 \text{ W}$ VA : Volt-Ampère S : nützliche Größe zur Dimensionierung von Netzen

	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = -\pi/2$	Einheit
	R	L	C	
Wirkleistung $P = U \cdot I \cos \varphi$	$U \cdot I$	0	0	W
Blindleistung $Q = U \cdot I \sin \varphi$	0	$U \cdot I$	$-U \cdot I$	VAR
Scheinleistung $S = U \cdot I$	$U \cdot I$	$U \cdot I$	$U \cdot I$	VA

Komplexe Scheinleistung $\underline{S}$

Definition:

$$\underline{S} = P + j \cdot Q \quad (47)$$

$$\underline{S} = U \cdot I \cdot [\cos \varphi + j \sin \varphi]$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

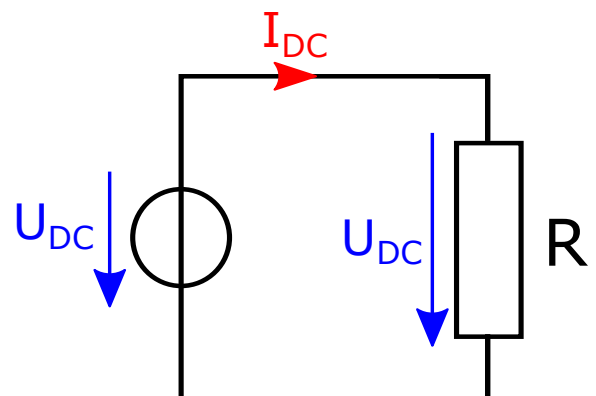
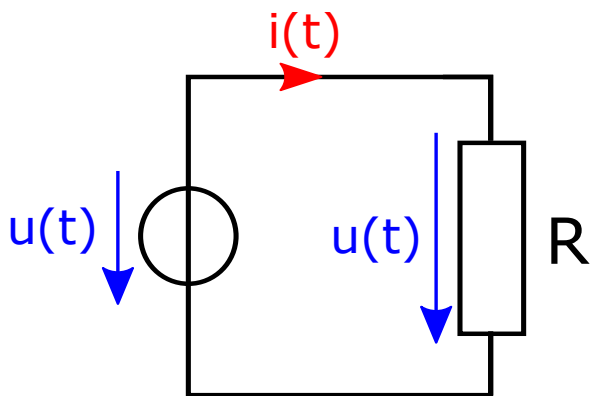
$$\underline{S} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{S} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i}$$

$$\underline{S} = U \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{S} = U \cdot \underline{I}^* \quad (48)$$

Effektivwert einer Wechselgröße



Wechselstromschaltung $R \cdot i(t)$

$$p(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) \cdot dt$$

P wird an R umgesetzt.

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt}_{= P} \stackrel{!}{=} R \cdot I_{DC}^2$$

$\uparrow$ Wirkleistung

Gleichstromschaltung

$$P_{DC} = U_{DC} \cdot I_{DC}$$

Gesucht: Ein gleichwertiger Gleichstrom I für den Wechselstrom $i(t)$, der an R die gleiche Leistung erbringt.

$$P_{\text{DC}} = P$$

$$R \cdot I_{\text{DC}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt$$

$$I_{\text{DC}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

I_{DC} ist der gesamte Gleichstromwert I

Effektiv
w. des
Strom $i(t)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

(49)

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

(50)

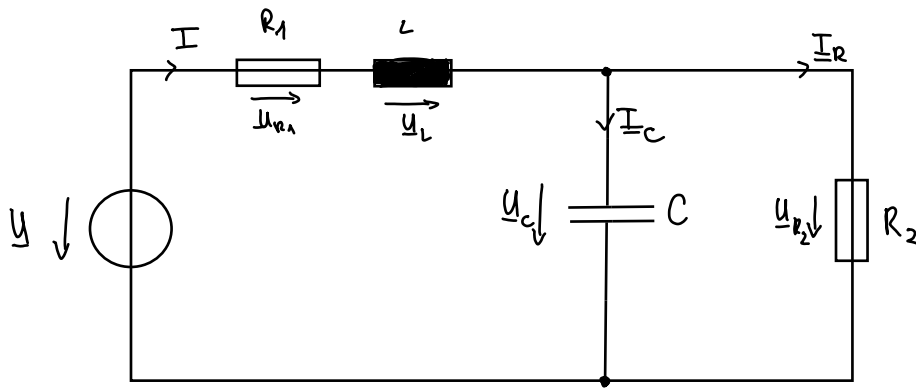
↑
Effektivwert der Sp $u(t)$

Beispiel: Effektivwert von sinusförmigen Größen

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \hat{i}^2 \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}_{\frac{T}{2}}} \end{aligned}$$

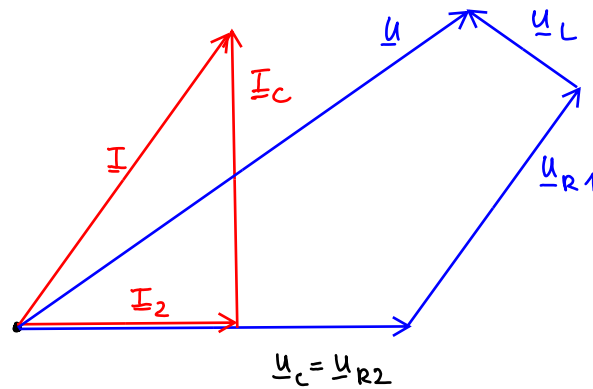
$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$



Geg: $\underline{U} = 100 \text{ V } e^{j0^\circ}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$

$L = \frac{350}{\pi} \text{ mH}$; $C = \frac{400}{\pi} \mu\text{F}$

$U = 100 \text{ V}$



$\underline{I} = \underline{I}_2 + \underline{I}_C$; $\underline{U} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_{R2}$

Im diesem Zeigerdiagramm ist $-90^\circ < \varphi < 0 \Rightarrow \text{ohmsch-kapazitiv}$

3.2

$$a) X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot \frac{350}{\pi} \cdot 10^{-3} \text{H}$$

$$X_L = 35 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot \frac{400}{\pi} \cdot 10^{-6} \text{F}} = 25 \Omega$$

$$b) \underline{Z}_1 = R + j\omega L = R + jX_L \\ = 10 \Omega + j35 \Omega = (10 + j35) \Omega$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j \cdot \frac{1}{X_C} = \frac{1}{50 \Omega} + j \cdot \frac{1}{25 \Omega} = (0,02 + j0,04) \text{S} \quad \hookrightarrow \text{Siemens}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{(0,02 + j0,04) \text{S}} = \frac{(0,02 - j0,04) \text{S}}{(0,02 + j0,04) \text{S} \cdot (0,02 - j0,04) \text{S}} \\ = \frac{(0,02 - j0,04) \text{S}}{(0,02^2 + 0,04^2) \text{S}^2} = 10 \Omega - j20 \Omega \text{V}$$

$$c) \underline{Z} ? \quad \underline{Z} =$$

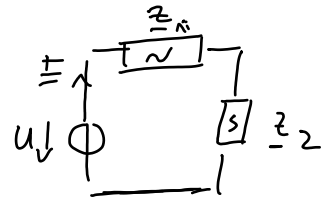
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 20 \Omega + j15 \Omega$$

$\underline{Z}$ auch in exponential form angeben:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{(20 \Omega)^2 + (15 \Omega)^2} = 25 \Omega$$

$$\varphi_{\underline{Z}} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}\right) = \arctan\left(\frac{15}{20}\right) = 36,87^\circ$$

$$\underline{Z} = 25 \Omega \cdot e^{j36,87^\circ}$$



3.3 a) $\underline{I}$?

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100 \text{ V}}{25 \Omega \cdot e^{j36,87^\circ}} = 4 \text{ A } e^{-j36,87^\circ}$$

$\underline{I}$ in kartesischer Form

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\underline{I} &= |\underline{I}| [\cos(-36,87^\circ) + j \sin(-36,87^\circ)] \\ &= 3,2 \text{ A} - j 2,4 \text{ A}\end{aligned}$$

b) $\underline{S}$?

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{S} = 100 \text{ V} (3,2 + j 2,4 \text{ A}) = (320 + j 240) \text{ VA}$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = 320 \text{ W}$$

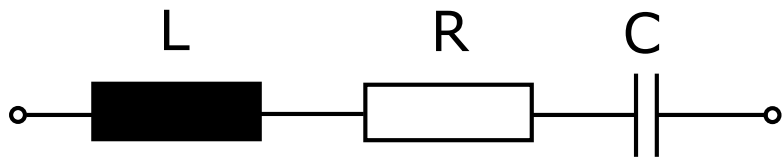
$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = +240 \text{ var}$$

Es handelt sich um induktive Blindleistung, da $Q > 0$ ist.

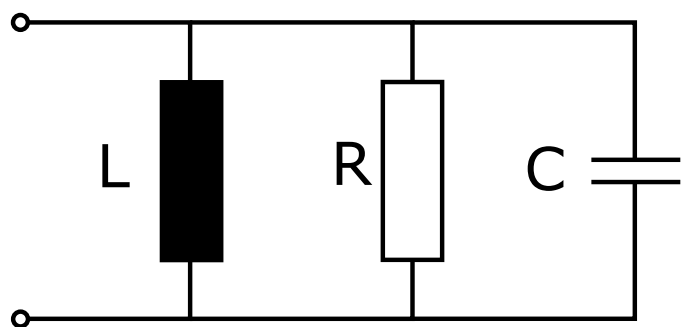
Schwingkreise: Systeme mit mindestens zwei Energiespeichern

Elektromagnetische Schwingkreise:

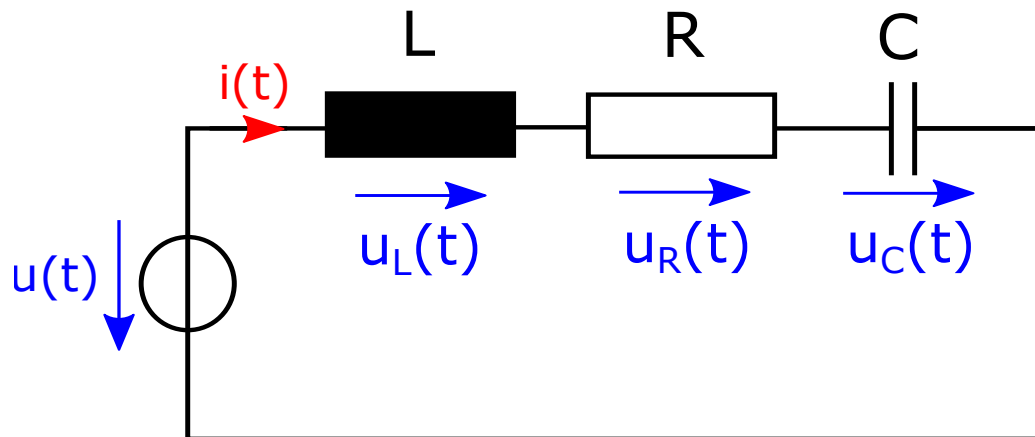
Reihen-RLC-Schwingkreis



Parallel-RLC-Schwingkreis



RLC-Reihenschwingkreis



$$u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = u(t)$$

⇓ Effektivwertzeiger

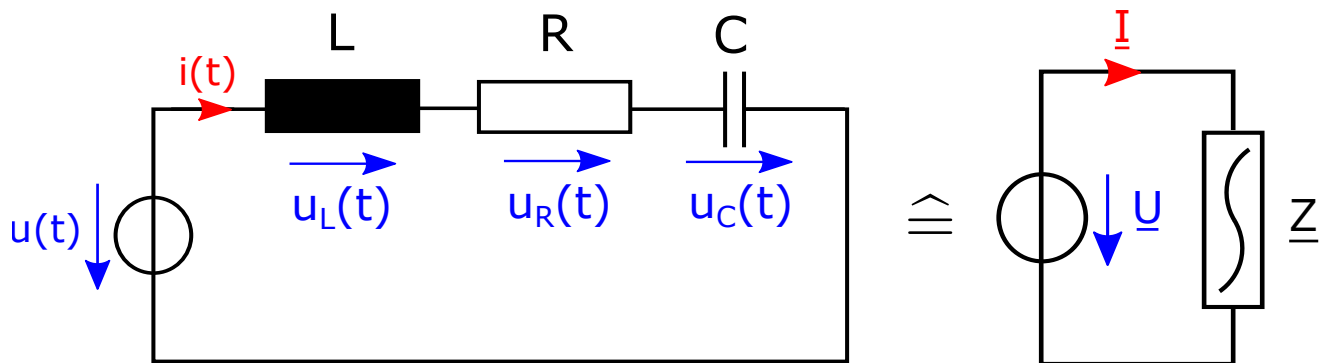
$$\underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L = \underline{U}$$

⇓ Amplitudenwertzeiger

$$\underline{\hat{U}}_R + \underline{\hat{U}}_C + \underline{\hat{U}}_L = \underline{\hat{U}}$$

Zeigerdiagramm (Amplitudenwertzeiger)

Umrechnung RLC-Reihenschwingkreis in Impedanz



$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j\operatorname{Im}(\underline{Z})$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \omega: \text{variable Kreisfrequenz}$$

Grobe Analyse der RLC-Reihenschaltung

ω	ωL	$1/\omega C$	$Z = Z $	φ	I
$\omega \rightarrow 0$	0	∞	$\rightarrow -\infty$	$-\pi/2$	$\rightarrow 0$
$\omega = \omega_0$	$\omega_0 L$	$\frac{1}{\omega_0 C}$	$\sqrt{R^2} = R$	0	$I = \frac{U}{R}$
$\omega \rightarrow \infty$	∞	0	∞	$+\pi/2$	$\rightarrow 0$




$$I = \left| \frac{U}{Z} \right| = \frac{U}{Z}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Berechnung von ω_0 :

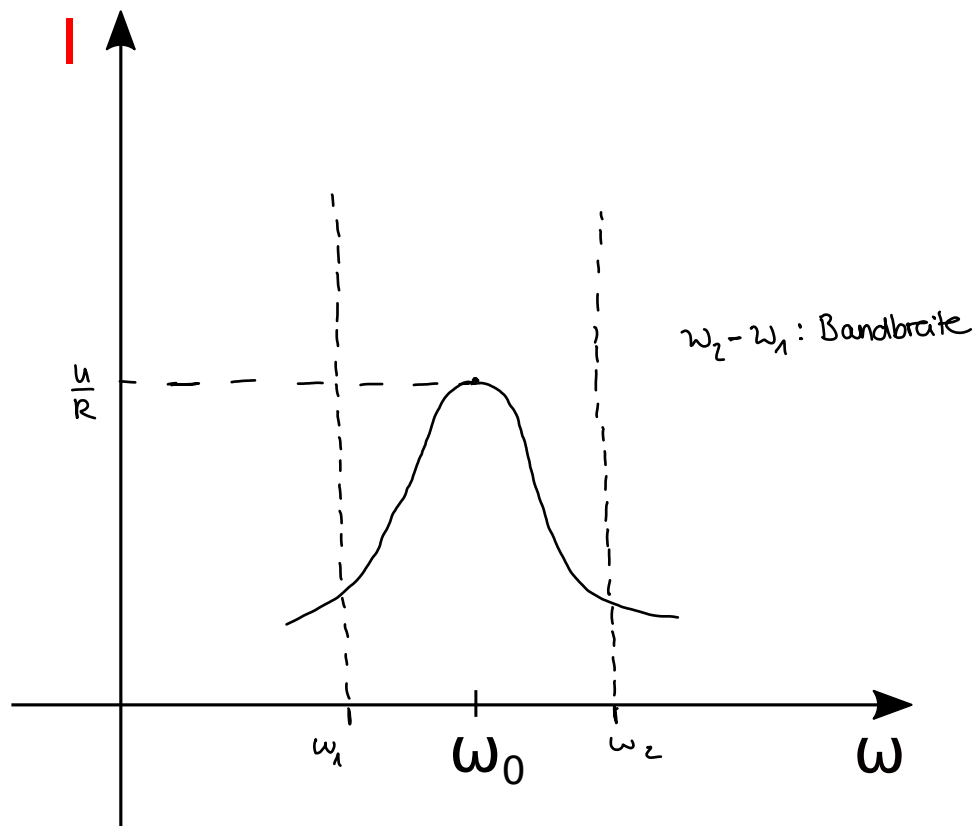
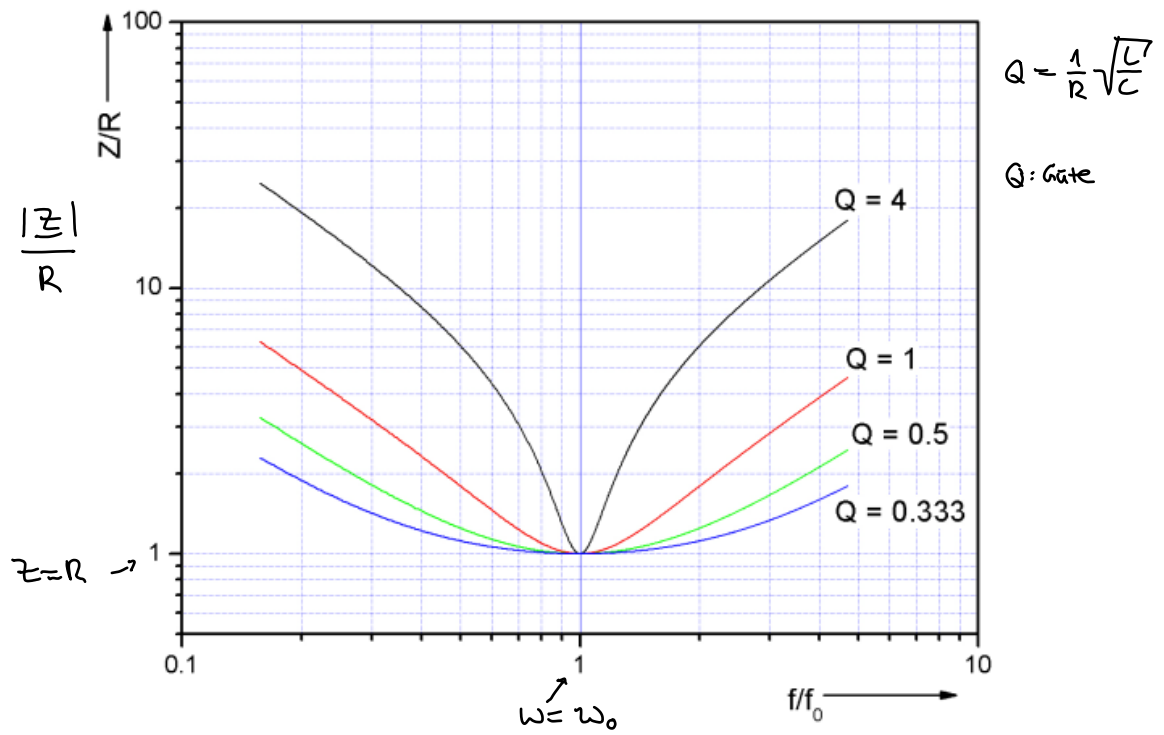
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 LC = 1$$

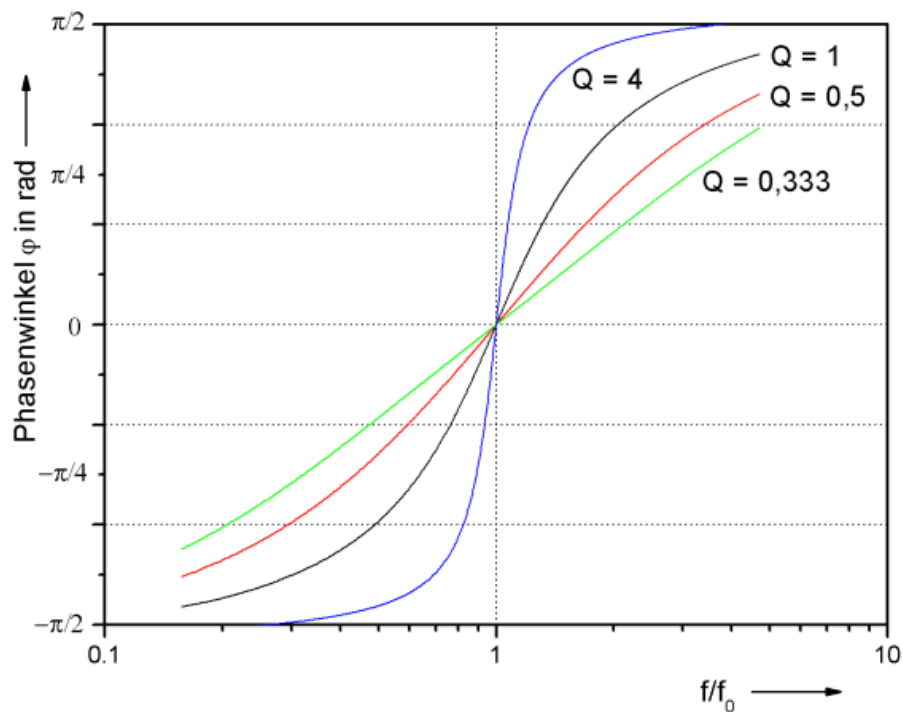
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

51

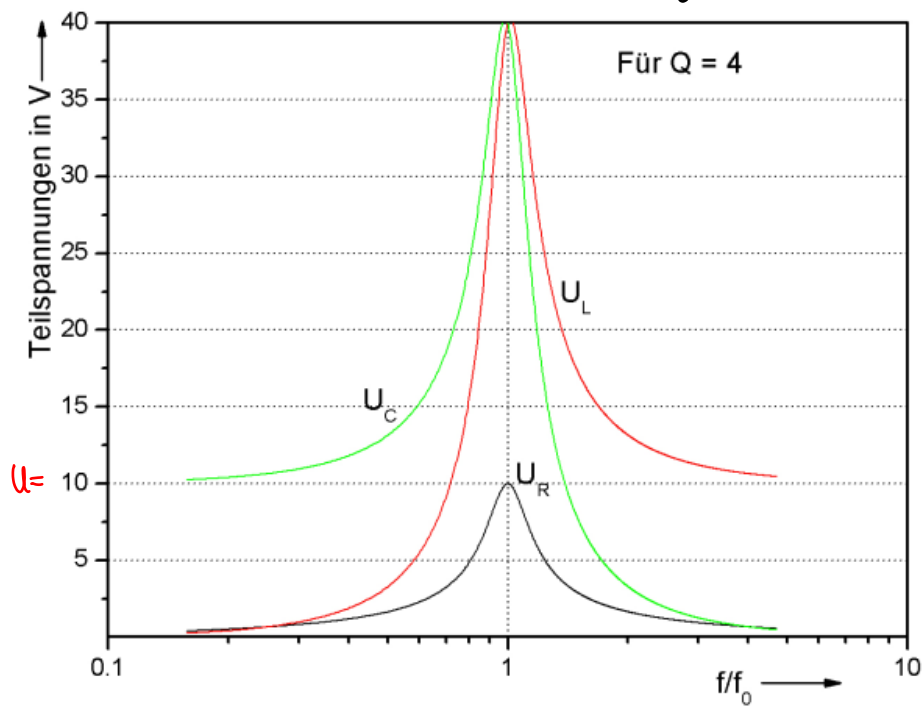
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$





$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Effektivwerte der Spannungen



$$U_R = R \cdot I$$

$$U_L = \omega L \cdot I$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I$$

Übung 1

Gleichstrom – Ohmsches Gesetz, Quellen und Kirchhoffsche Regeln

Aufgabe 1 (Ohmsches Gesetz)

Ein ohmscher Verbraucher (Heizung) mit dem Widerstand $R_V = 20 \, \Omega$ ist an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U = 24 \, \text{V}$ angeschlossen (siehe Bild 1). Die Anschlussleitungen haben einen ohmschen Widerstand von $R_{L1} = R_{L2} = 2 \, \Omega$.

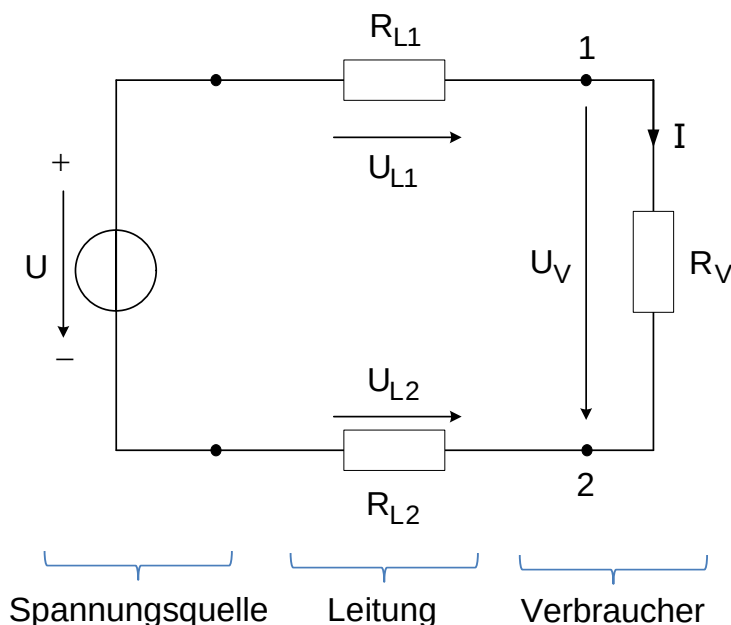


Bild 1 An eine Spannungsquelle angeschlossener Verbraucher

Fragen:

1. Wie groß ist der Strom I durch den Verbraucher?
2. Welche Spannung U_V liegt am Verbraucher an?
3. Wie groß ist der Spannungsabfall entlang der Leitung?
4. Welche Leistung wird im Verbraucher in Wärme umgesetzt?
5. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Heizanlage?

Aufgabe 2 (Ohmsches Gesetz, Widerstandsberechnung)

An eine Spannungsquelle mit der Quellspannung $U_q = 10 \text{ V}$ wird ein Drahtwiderstand angeschlossen. Der Drahtwiderstand besteht aus einem isolierten Kupferdraht mit dem Durchmesser $d_{\text{Cu}} = 0,5 \text{ mm}$, welcher auf einen Kunststoff-Wickelkörper mit kreisförmigem Querschnitt des Durchmessers $D = 10 \text{ mm}$ aufgewickelt ist. Insgesamt werden 500 Windungen auf einer Länge l einlagig aufgewickelt. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt bei Raumtemperatur (20°C) $\rho_{\text{Cu},20^\circ\text{C}} = 0,0179 \mu\Omega\text{m}$. Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes beträgt $\alpha_{\text{Cu}} = 0,00393 \text{ K}^{-1}$.

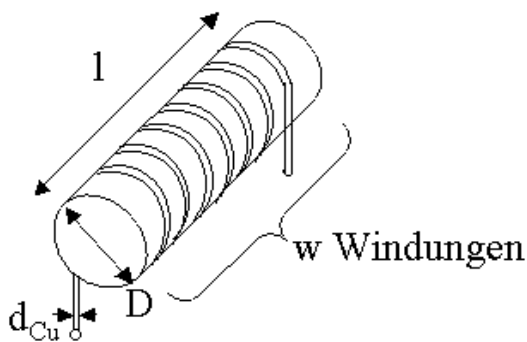


Bild 2 Aus Kupferdraht hergestellter Drahtwiderstand

Fragen:

1. Bestimmen Sie den Widerstand $R_{\text{Draht},20}$ des Drahtwiderstandes bei Zimmertemperatur (der Drahtdurchmesser darf gegenüber dem Durchmesser des Wickelkörpers vernachlässigt werden).
2. Wie groß ist der Widerstand $R_{\text{Draht},80}$, wenn die Temperatur auf 80°C steigt?
3. Wie groß wird der Widerstand $R_{\text{Draht},0}$, wenn der Drahtwiderstand auf 0°C abgekühlt wird?

Aufgabe 3 (Ohmsches Gesetz, Spannungsquelle, Stromquelle)

Um das elektrische Ersatzschaltbild (ESB) einer Batterie zu erhalten, wurden an der Batterie zwei Messungen durchgeführt (siehe Tabelle 1).

Messpunkt	1	2
Spannung [V]	14	13,5
Strom [A]	0	10

Tabelle 1 Messwerte

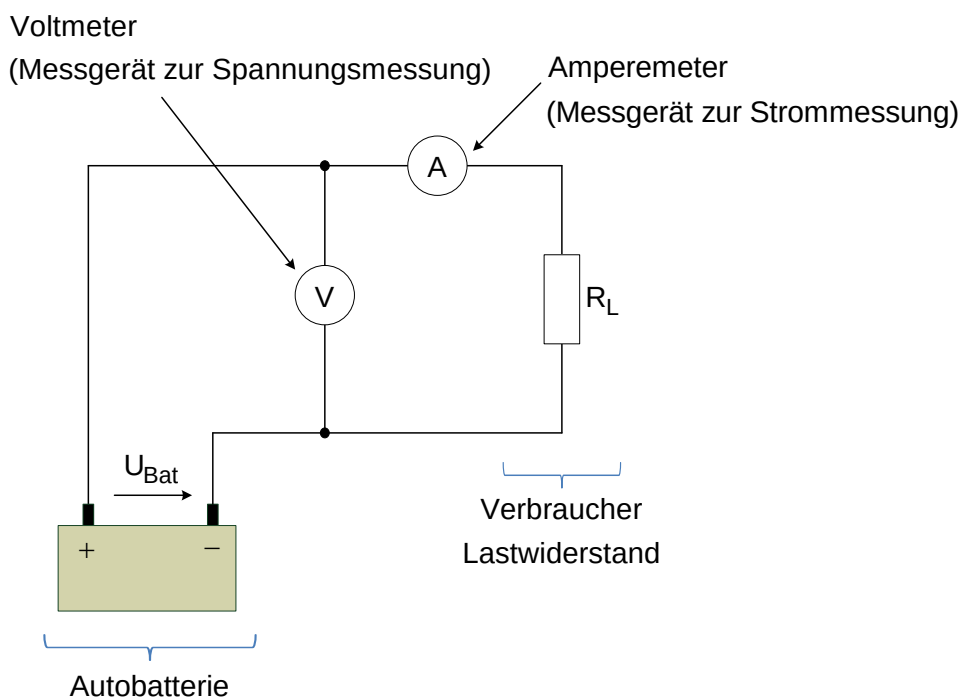


Bild 3 Batterie mit angeschlossenem Widerstand und Messgeräten zur Spannungs- und Strommessung

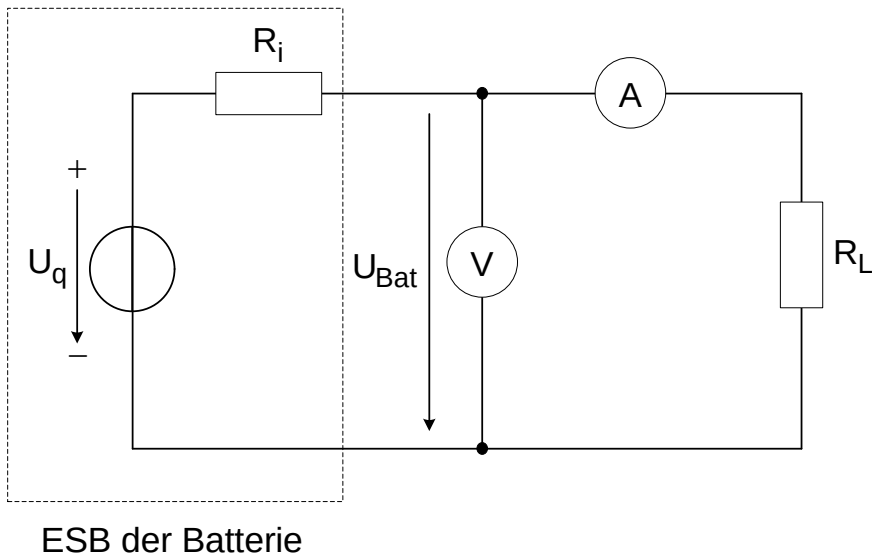


Bild 4 Darstellung der Batterie als Ersatzspannungsquelle (ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand = reale Spannungsquelle) mit angeschlossenem Verbraucher und Messgeräten zur Strom- und Spannungsmessung

Fragen:

1. Ermitteln Sie die Parameter (Quellenspannung U_q und Innenwiderstand R_i) zur Beschreibung der Batterie als Ersatzspannungsquelle (siehe Bild 4).
2. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild, wenn die Batterie als Ersatzstromquelle dargestellt werden soll und ermitteln Sie die Parameter (Quellstrom I_q und Innenwiderstand R_i) zur Beschreibung der Batterie als Ersatzstromquelle!

Aufgabe 4 (Unmittelbare Anwendung der Kirchhoffschen Regeln)

Gegeben ist die Gleichstromschaltung nach Bild 5.

Es sind folgende Daten gegeben: $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \, \Omega$ und $U_0 = U_4 = 100\text{V}$.

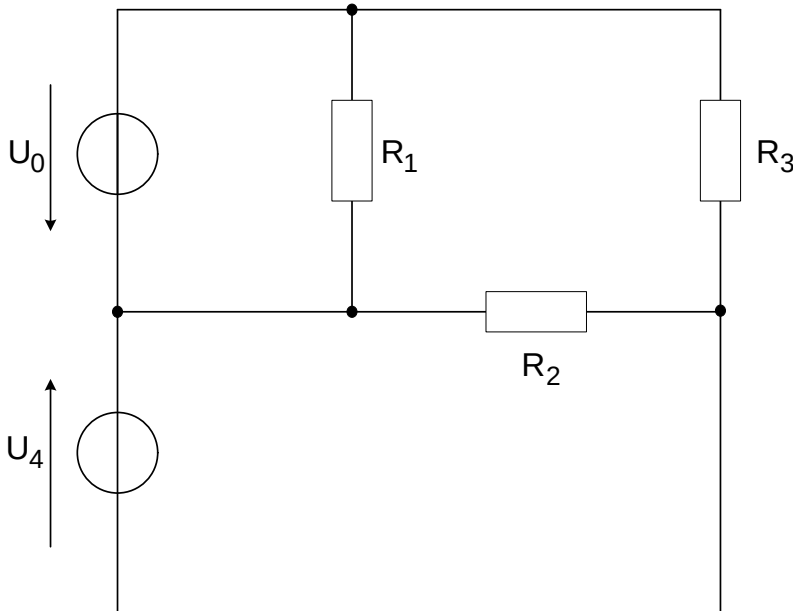


Bild 5 Gleichstromschaltung mit zwei Spannungsquellen und drei Widerständen

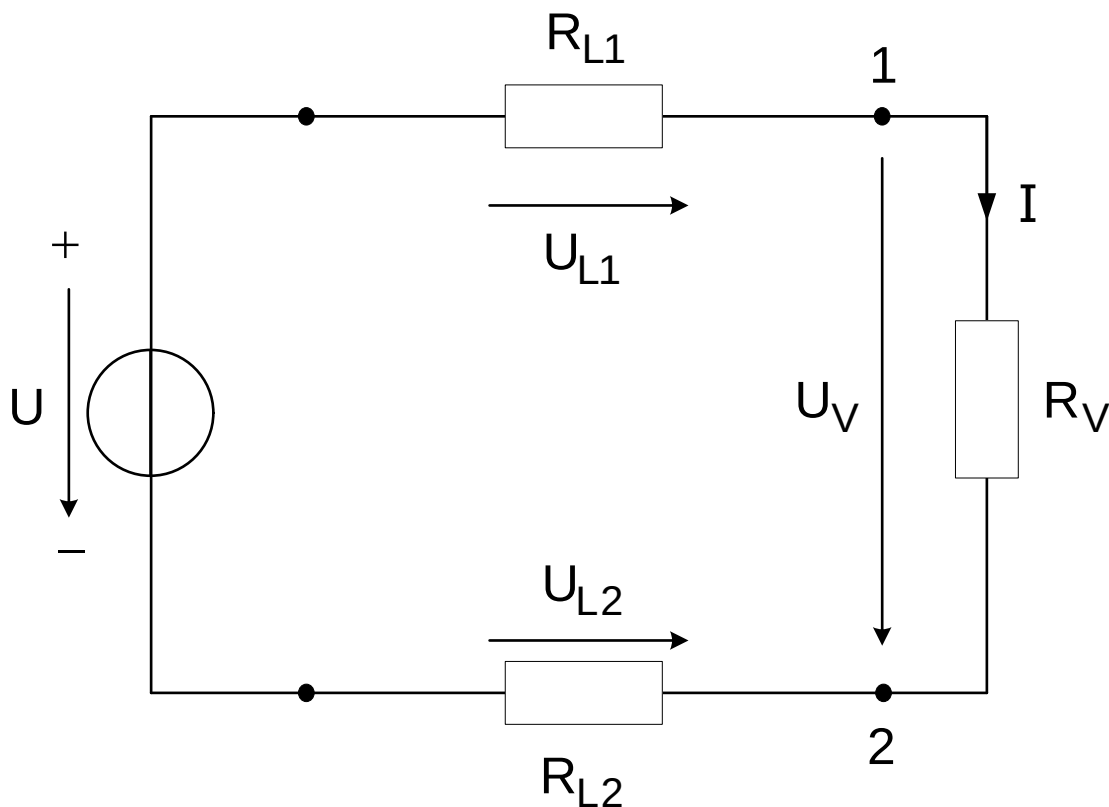
Fragen:

1. Wie viele Knoten k und Zweige z enthält das Netzwerk?
2. Wie viele Knoten- und Maschengleichungen sind zur vollständigen Bestimmung aller Zweigströme im Netzwerk erforderlich?
3. Markieren Sie die Knoten und tragen Sie die Zählpfeile und Benennungen für die unbekannten Zweigströme ein.
Legen Sie die zur Aufstellung der Maschengleichungen erforderlichen Maschen fest.
4. Stellen Sie die unabhängigen Knoten- und Maschengleichungen auf.
5. Berechnen Sie die unbekannten Zweigströme.
6. Wie groß sind die Spannungen an den Widerständen?

Übung 1

Gleichstrom – Ohmsches Gesetz, Quellen und Kirchhoffsche Regeln

Aufgabe 1 (Ohmsches Gesetz)



$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$
Spannungsquelle Leitung Verbraucher

Bild 1 An eine Spannungsquelle angeschlossener Verbraucher

Aufgabe 2 (Ohmsches Gesetz, Widerstandsberechnung)

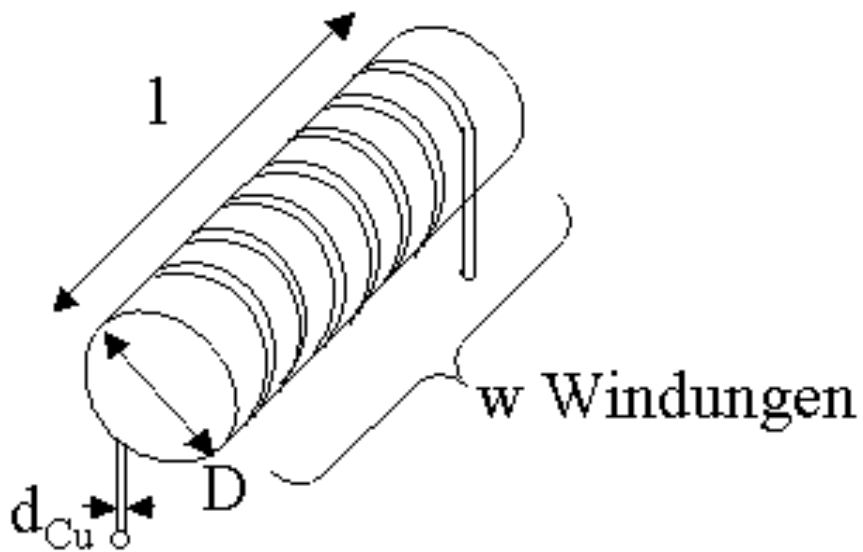


Bild 2 Aus Kupferdraht hergestellter Drahtwiderstand

Aufgabe 3 (Ohmsches Gesetz, Spannungsquelle, Stromquelle)

Messpunkt	1	2
Spannung [V]	14	13,5
Strom [A]	0	10

Tabelle 1 Messwerte

Voltmeter

(Messgerät zur Spannungsmessung)

Amperemeter

(Messgerät zur Strommessung)

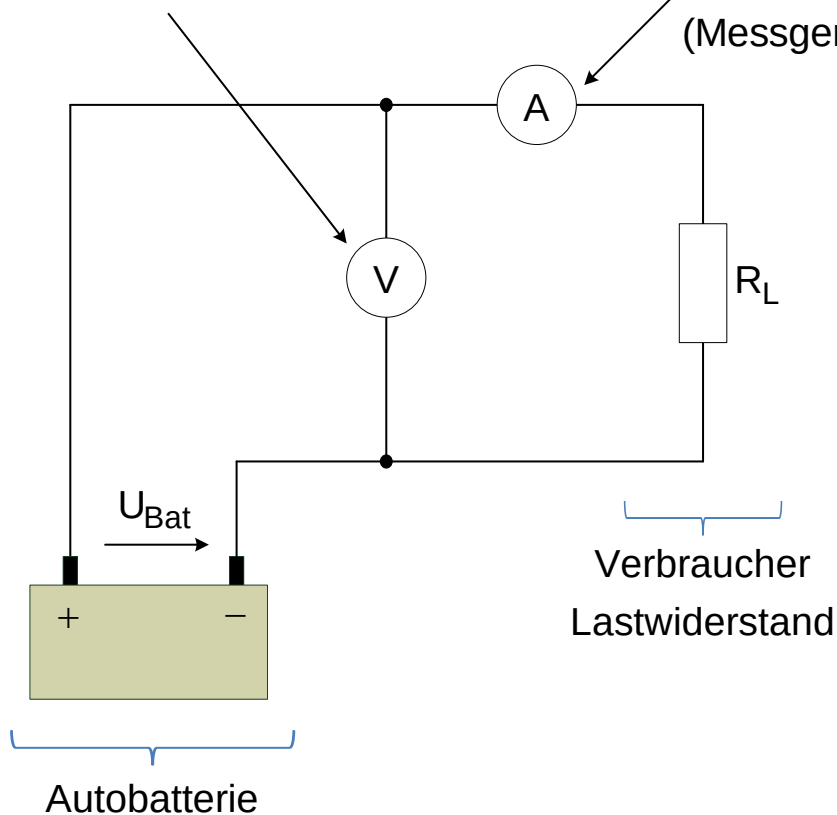
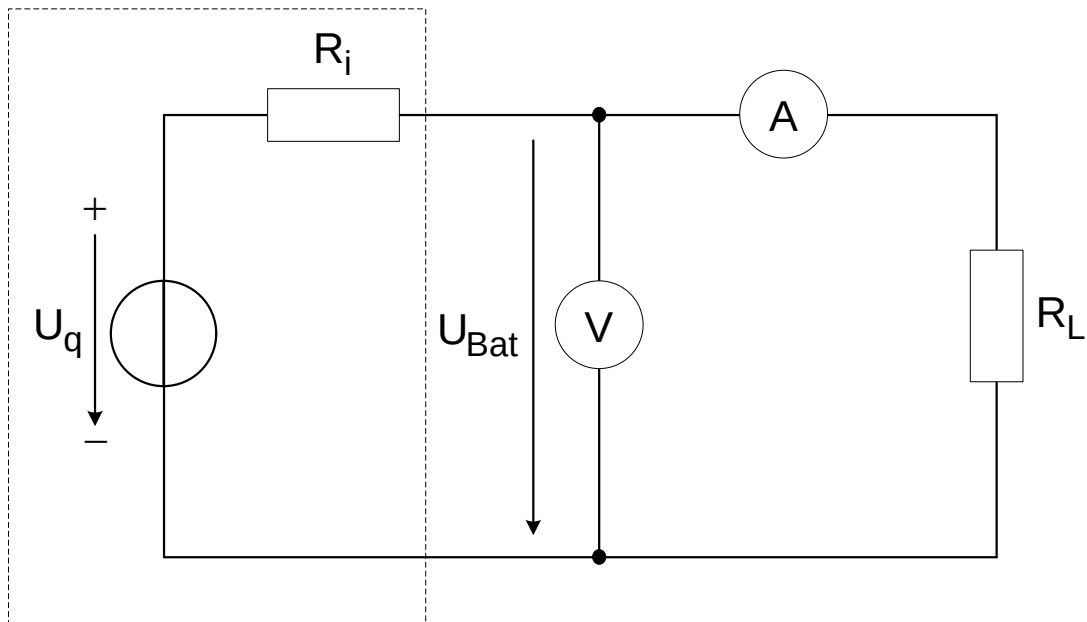
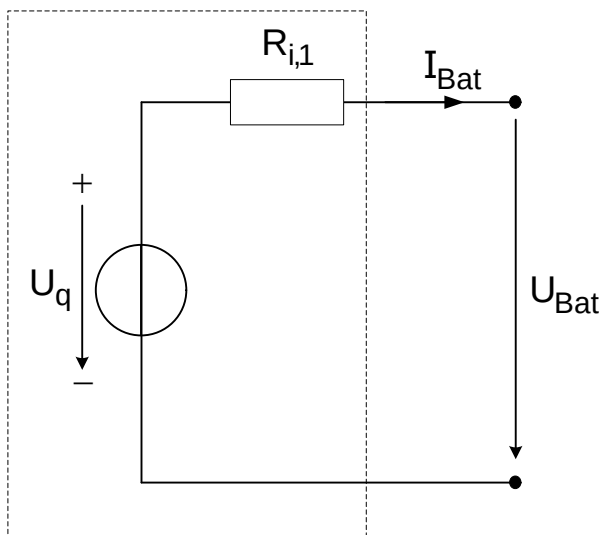


Bild 3 Batterie mit angeschlossenem Widerstand und Messgeräten zur Spannungs- und Strommessung



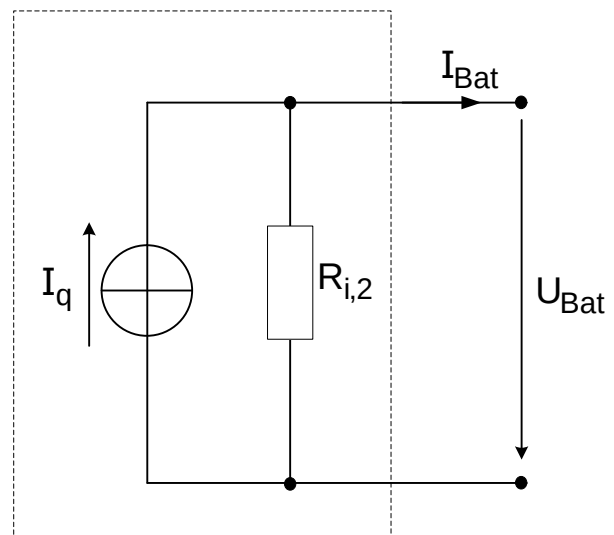
ESB der Batterie

Bild 4 Darstellung der Batterie als Ersatzspannungsquelle (ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand = reale Spannungsquelle) mit angeschlossenem Verbraucher und Messgeräten zur Strom- und Spannungsmessung



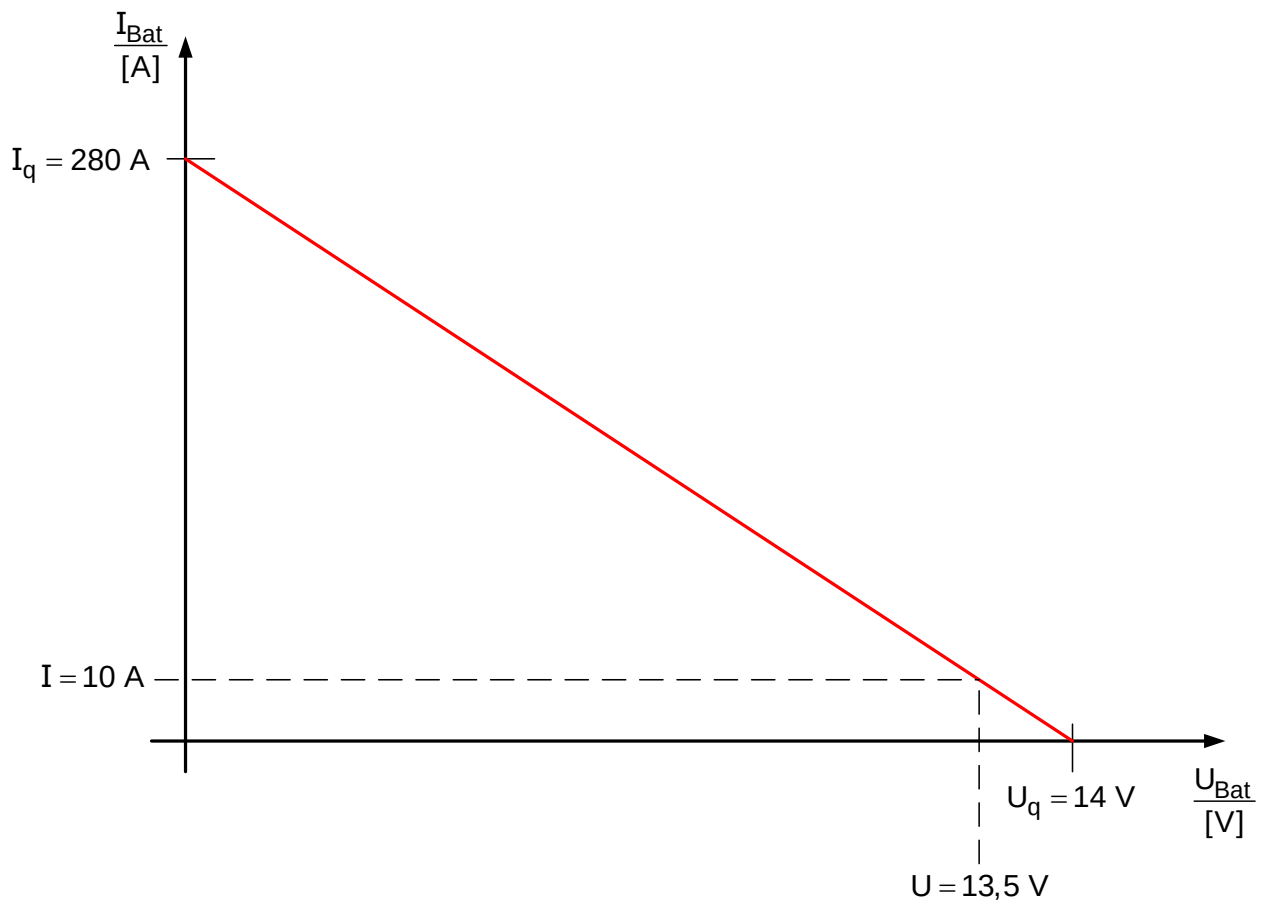
ESB der Batterie

Ersatzschaltbild der Batterie als reale Spannungsquelle



ESB der Batterie

Ersatzschaltbild der Batterie als reale Stromquelle



Strom- Spannungskennlinie der Batterie.

Aufgabe 4 (Unmittelbare Anwendung der Kirchhoffschen Regeln)

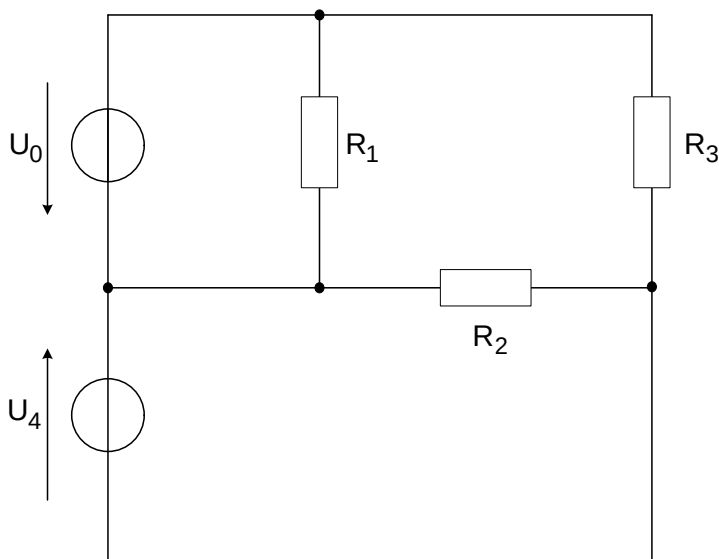
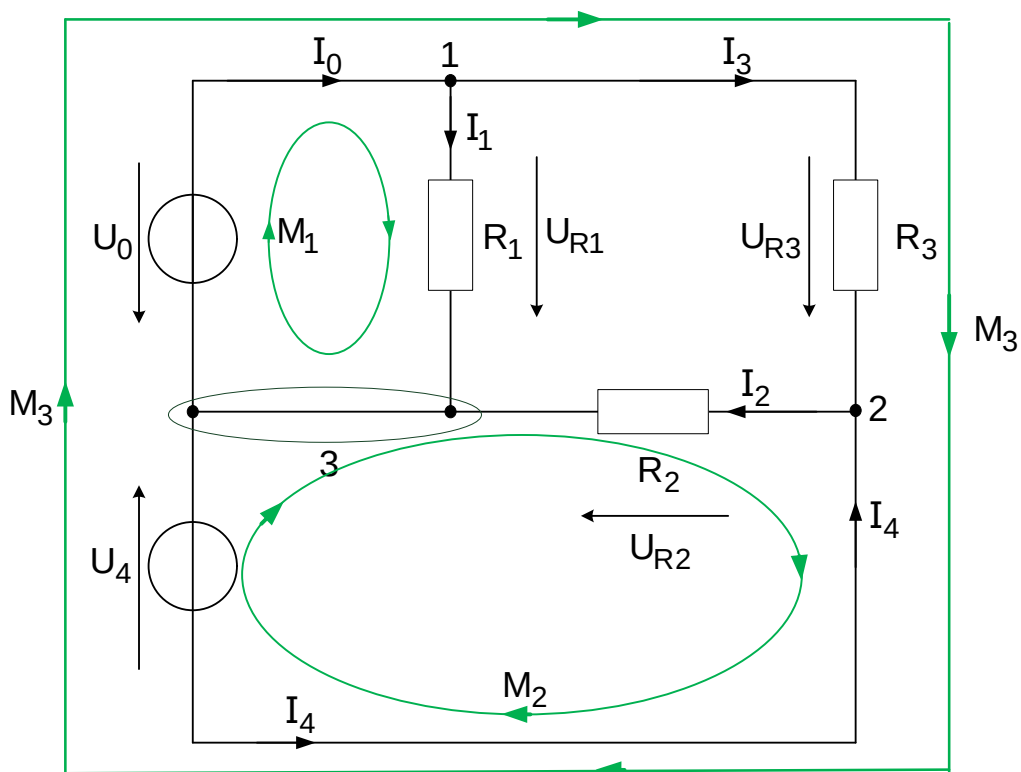


Bild 5 Gleichstromschaltung mit zwei Spannungsquellen und drei Widerständen



Schaltung mit Kennzeichnung der Knoten und eingetragenen Zählpfeilen für die Ströme und Spannungen



Kurzlösung zur Übung 1

Gleichstrom – Ohmsches Gesetz, Quellen und Kirchhoffsche Regeln

Aufgabe 1 (Ohmsches Gesetz)

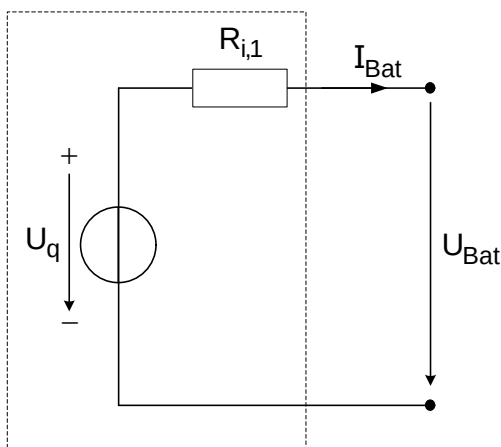
1. $I = 1 \text{ A}$
2. $U_V = 20 \text{ V}$
3. $\Delta U = 4 \text{ V}$
4. $P_V = 20 \text{ W}$
5. $\eta \approx 83,33 \%$

Aufgabe 2 (Ohmsches Gesetz, Widerstandsberechnung)

1. $R_{\text{Draht}}(\vartheta = 20^\circ\text{C}) = 1,432 \Omega$
2. $R(\vartheta = 80^\circ\text{C}) \approx 1,77 \Omega$
3. $R(\vartheta = 0^\circ\text{C}) \approx 1,32 \Omega$

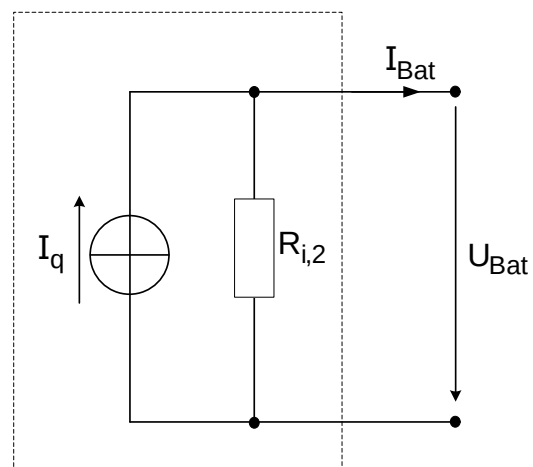
Aufgabe 3 (Ohmsches Gesetz, Spannungsquelle, Stromquelle)

1. $U_q = 14 \text{ V}$ und $R_i = 0,05 \Omega = 50 \text{ m}\Omega$
2. $I_q = 280 \text{ A}$ und $R_{i,2} = 50 \text{ m}\Omega$



ESB der Batterie

Ersatzschaltbild der Batterie als Ersatzstromquelle



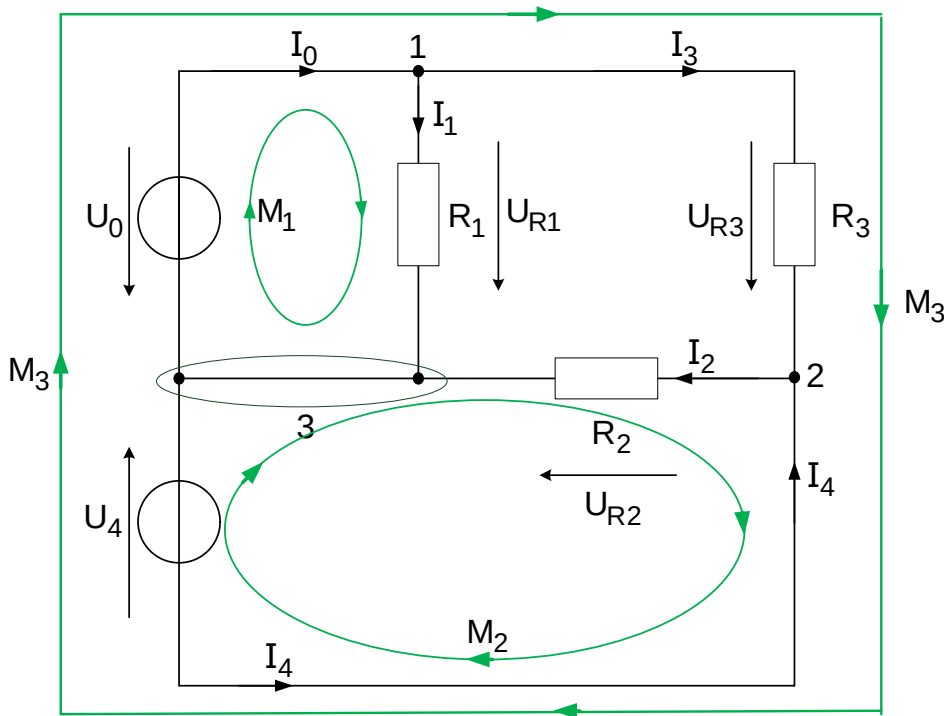
ESB der Batterie

Ersatzschaltbild der Batterie als Ersatzstromquelle

Aufgabe 4 (Unmittelbare Anwendung der Kirchhoffschen Regeln)

1. $k = 3$ Knoten und $z = 5$ Zweige

2. $KG = 2$ und $MG = 3$
3. Zählpfeile für die Spannungen und Ströme sowie Maschen prinzipiell beliebig, aber sinnvollerweise möglichst im Umlaufsinn der Maschen (siehe folgendes Bild):



Netzwerk mit eingetragenen Zählpfeilen für Ströme sowie Spannungen, Maschen und Knoten.

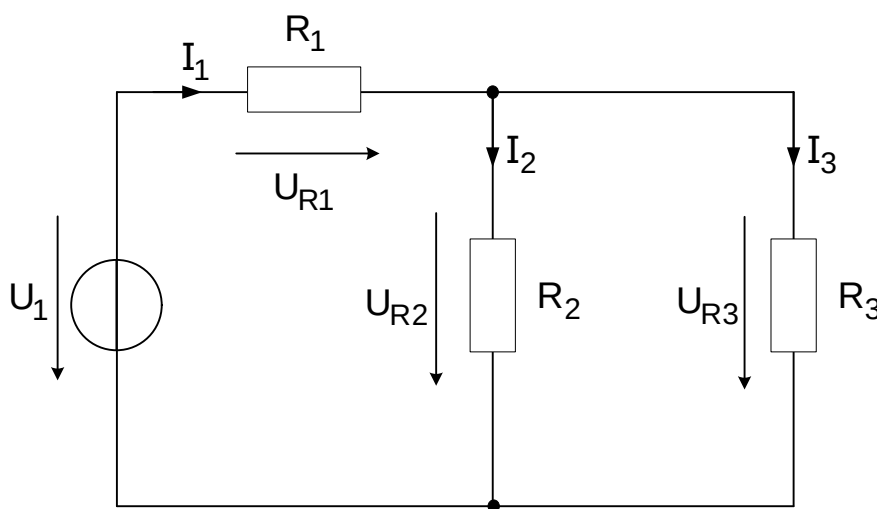
4. $R_1 \cdot I_1 - U_0 = 0$ (1)
 $-R_2 \cdot I_2 + U_4 = 0$ (2)
 $R_3 \cdot I_3 + U_4 - U_0 = 0$ (3)
 $I_0 - I_1 - I_3 = 0$ (4)
 $I_3 + I_4 - I_2 = 0$ (5)
5. $I_1 = 2 \text{ A}$ $I_2 = 2 \text{ A}$ $I_3 = 0 \text{ A}$ $I_0 = 2 \text{ A}$ $I_4 = 2 \text{ A}$
6. $U_{R1} = 100 \text{ V}$ $U_{R2} = 100 \text{ V}$ $U_{R3} = 0 \text{ V}$

Übung 2

Gleichstrom – Netzumformung, Ersatzspannungsquelle und Überlagerungssatz

Aufgabe 1 (Methode der Netzumformung)

In Bild 1 ist ein einfaches Widerstandsnetzwerk gegeben.



Gegebene Werte:

$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 6 \, \Omega$$

$$R_3 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 12 \, \text{V}$$

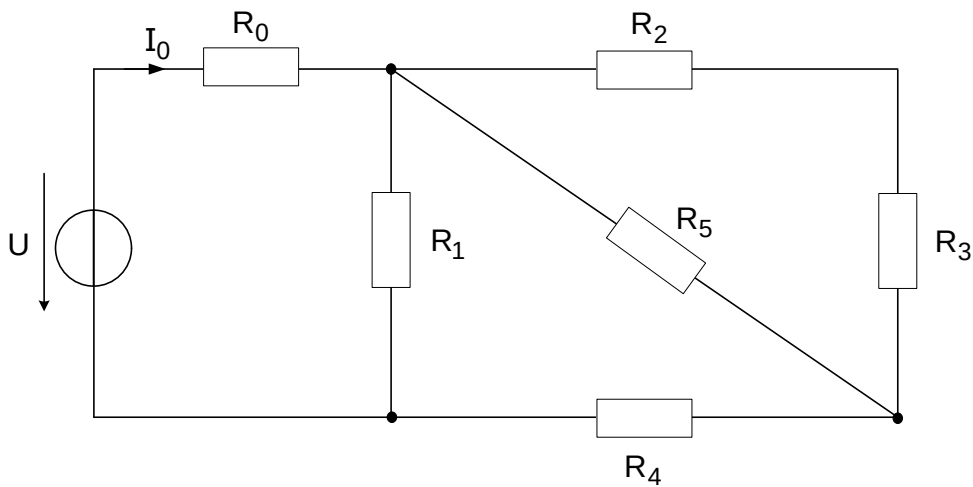
Bild 1 Einfache Gleichstromschaltung

Fragen:

1. Bestimmen Sie den Strom I_1 .
2. Welche Spannung fällt an R_1 ab und wie groß sind die Teilspannungen an R_2 und R_3 ?
3. Berechnen Sie die Ströme I_2 und I_3 .
Wie verhalten sie sich zu den entsprechenden Widerständen?
4. Wie verhält sich der Teilstrom I_2 zum Gesamtstrom I_1 ?
5. Wie verhält sich der Teilstrom I_3 zum Gesamtstrom I_1 ?

Aufgabe 2 (Methode der Netzumformung)

Gegeben ist die in Bild 2 dargestellte Schaltung.



Gegebene Werte:

$$R_0 = 25 \, \Omega$$

$$R_1 = 50 \, \Omega$$

$$R_2 = 25 \, \Omega$$

$$R_3 = 35 \, \Omega$$

$$R_4 = 26 \, \Omega$$

$$R_5 = 40 \, \Omega$$

$$U = 25 \, \text{V}$$

Bild 2 Einfache elektrische Gleichstromschaltung

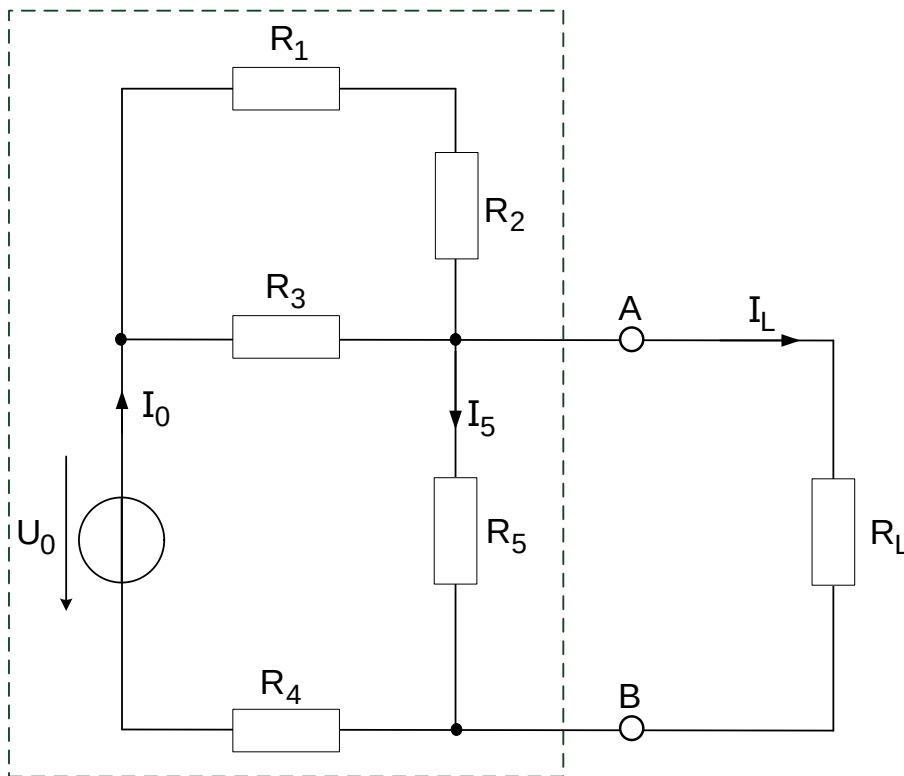
Fragen:

1. Wie groß ist der Strom I_0 ?
2. Welche Leistung nimmt die Schaltung auf?

Aufgabe 3 (Methode der Ersatzspannungsquelle)

Gegeben ist die in Bild 3 dargestellte Schaltung mit der idealen Spannungsquelle U_0 .

Von Interesse ist lediglich der Strom I_L durch den Lastwiderstand R_L .



Gegebene Werte:

$$R_1 = R_2 = R_4 = R_L = 50 \, \Omega$$

$$R_3 = R_5 = 2 \cdot R_L = 100 \, \Omega$$

$$U_0 = 10 \, \text{V}$$

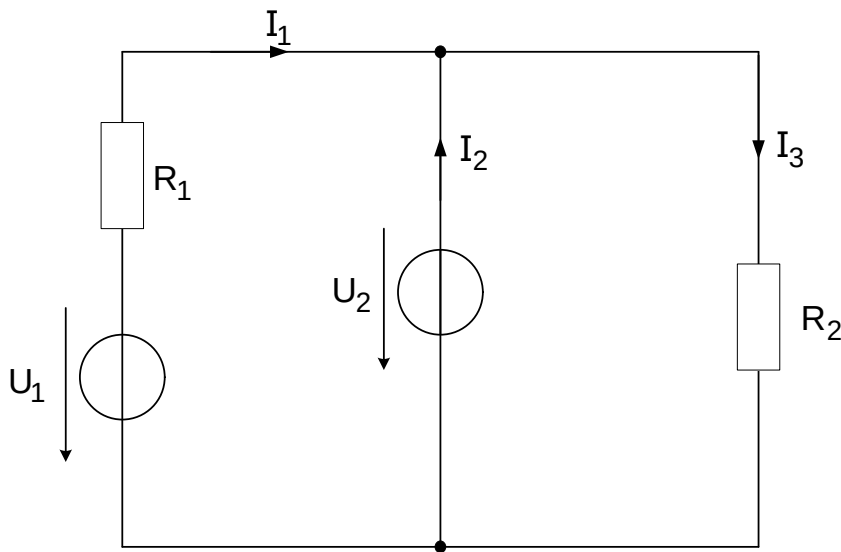
Bild 3 Einfache Gleichstromschaltung

Fragen:

1. Bezüglich der Klemmen A und B soll eine Ersatzspannungsquelle mit der Quellenspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i bestimmt werden.
Berechnen Sie die Spannung U_q .
2. Berechnen Sie den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle auf zwei verschiedene Möglichkeiten.
3. Wie groß ist der Strom I_L durch die Last R_L ?

Aufgabe 4 (Methode des Überlagerungssatzes)

Bei der in Bild 2.4 dargestellten Schaltung sollen die Zweigströme mit Hilfe des Überlagerungssatzes bestimmt werden.



Gegebene Werte:

$$R_1 = 6 \, \Omega$$

$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 12 \, \text{V}$$

$$U_2 = 6 \, \text{V}$$

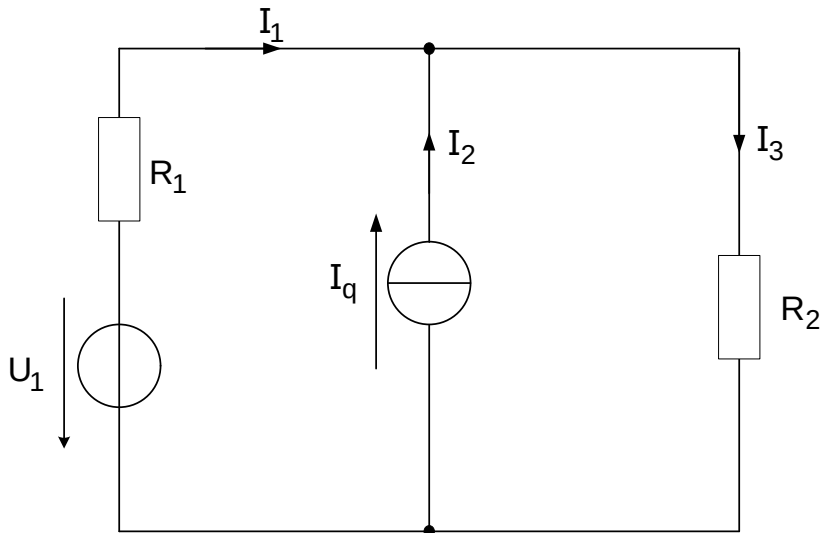
Bild 4 Beispielschaltung zur Anwendung des Überlagerungssatz

Frage:

1. Berechnen Sie die von den Spannungsquellen gelieferten Teilströme.
2. Wie groß sind die in der Schaltung eingetragenen Ströme I_1 , I_2 und I_3 ?
3. Wie lassen sich die Ströme I_1 , I_2 und I_3 ohne den Überlagerungssatz berechnen?

Aufgabe 5 (Methode des Überlagerungssatzes)

Bei der in Bild 5 dargestellten Schaltung mit den Widerständen R_1 und R_2 sowie einer Spannungs- und einer Stromquelle soll zur Berechnung der Zweigströme der Überlagerungssatz angewendet werden.



Gegebene Werte:

$$R_1 = 6 \, \Omega$$

$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 18 \, \text{V}$$

$$I_q = 3 \, \text{A}$$

Bild 5 Schaltung mit Spannungsquelle und Stromquelle

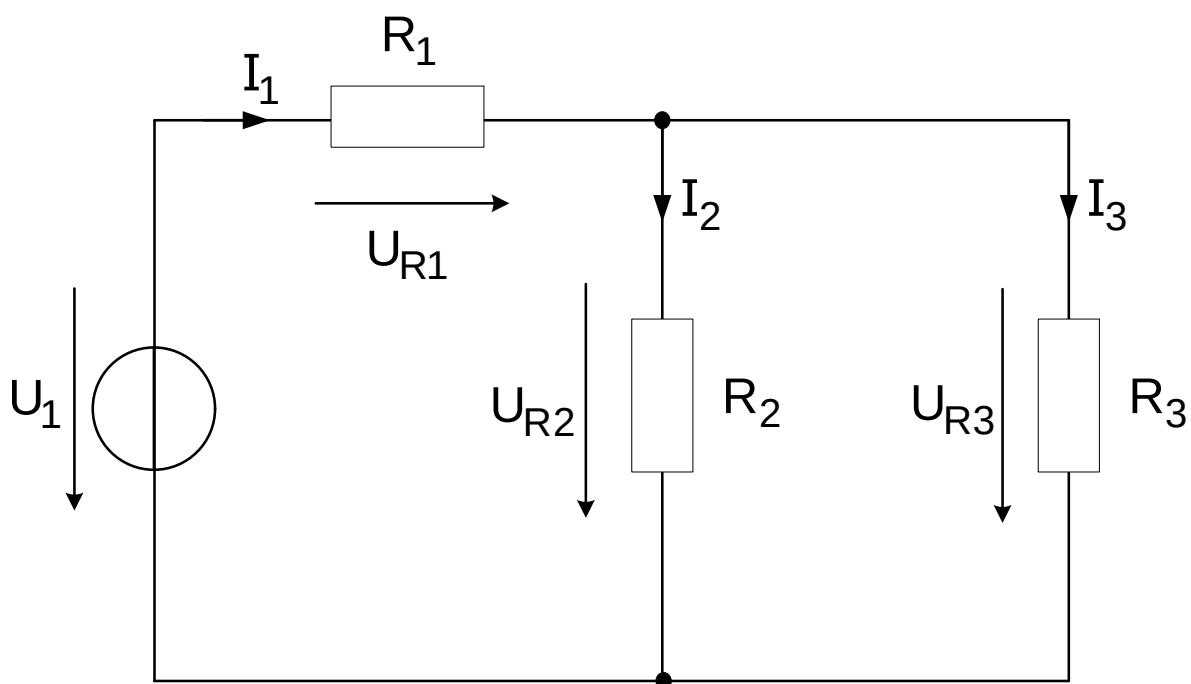
Fragen:

1. Welche Stromanteile werden von der Spannungsquelle geliefert und wie groß sind diese?
2. Welche Stromanteile werden von der Stromquelle geliefert und wie groß sind diese?
3. Wie groß sind die in der Schaltung eingetragenen Ströme I_1 , I_2 und I_3 ?

Übung 2

Gleichstrom – Netzumformung, Ersatzspannungsquelle und Überlagerungssatz

Aufgabe 1 (Methode der Netzumformung)



Gegebene Werte:

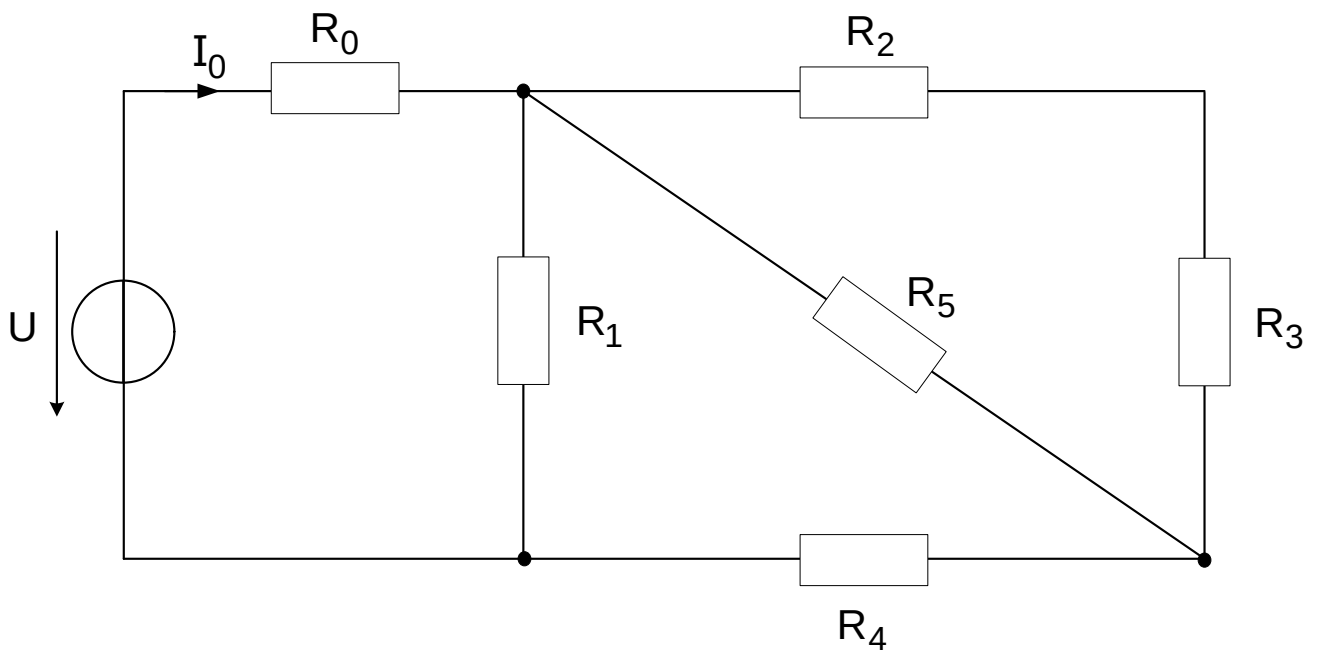
$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 6 \, \Omega$$

$$R_3 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 12 \, \text{V}$$

Aufgabe 2 (Methode der Netzumformung)



Gegebene Werte:

$$R_0 = 25 \, \Omega$$

$$R_1 = 50 \, \Omega$$

$$R_2 = 25 \, \Omega$$

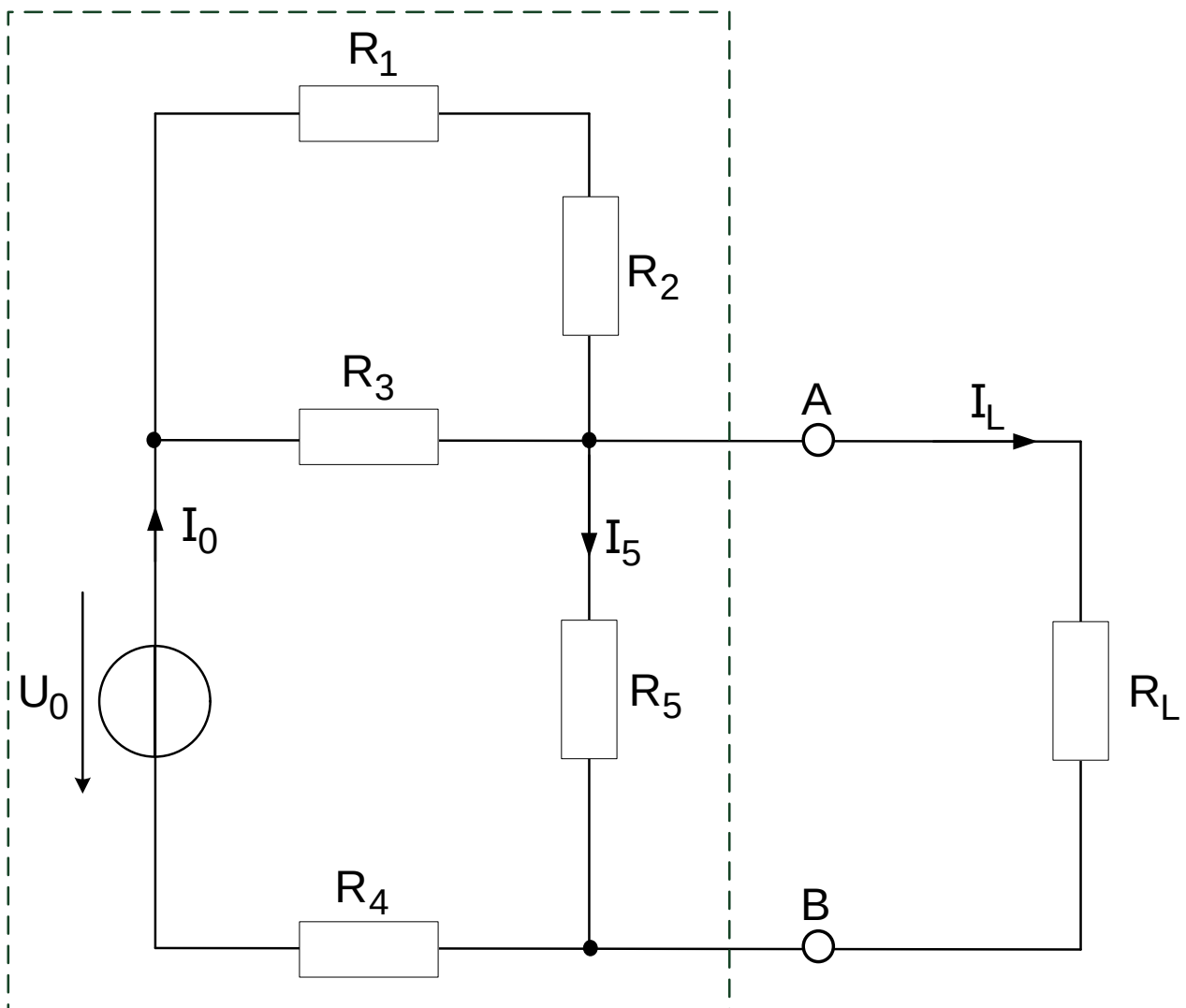
$$R_3 = 35 \, \Omega$$

$$R_4 = 26 \, \Omega$$

$$R_5 = 40 \, \Omega$$

$$U = 25 \, \text{V}$$

Aufgabe 3 (Methode der Ersatzspannungsquelle)

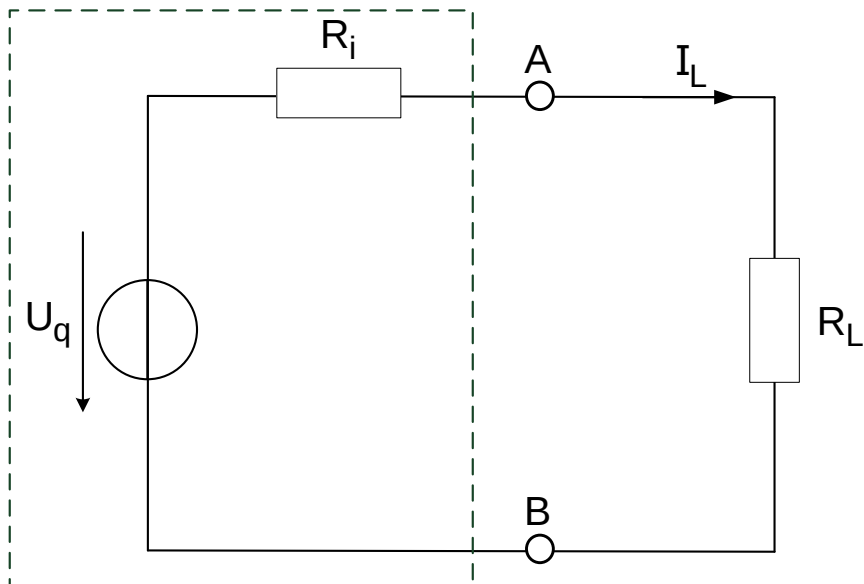


Gegebene Werte:

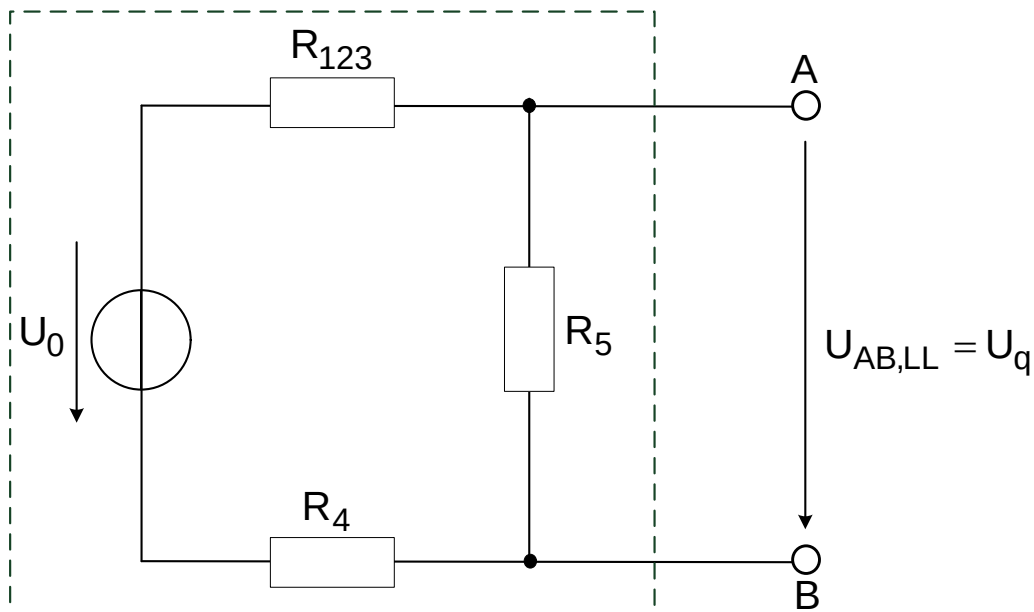
$$R_1 = R_2 = R_4 = R_L = 50 \, \Omega$$

$$R_3 = R_5 = 2 \cdot R_L = 100 \, \Omega$$

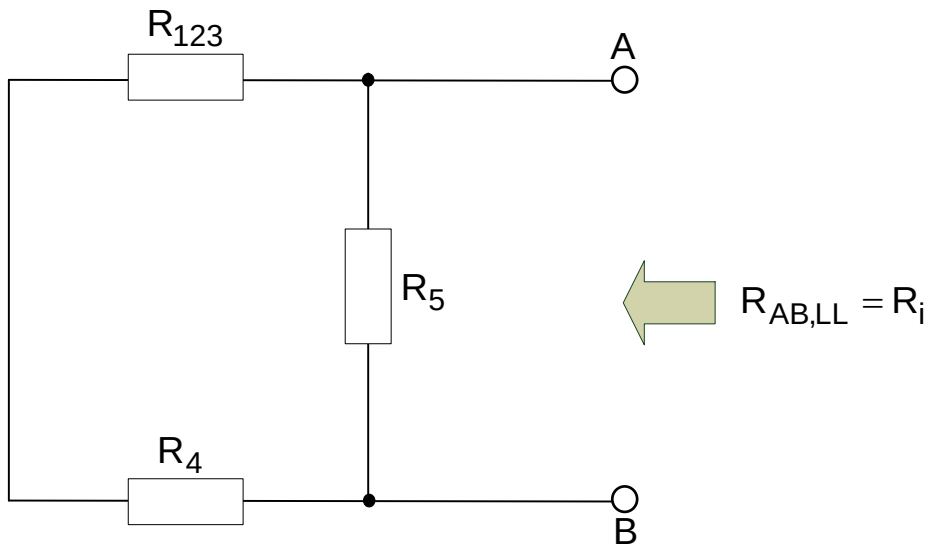
$$U_0 = 10 \, \text{V}$$



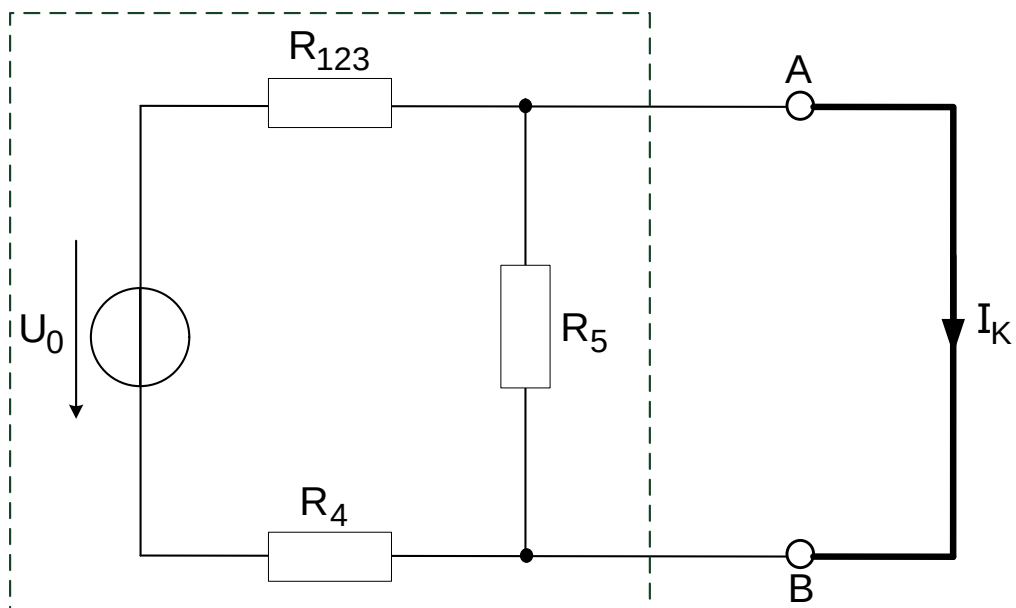
Ziel-Ersatzschaltbild - Ersatzspannungsquelle



Bestimmung der Leerlaufspannung mittels Spannungsteilerregel nach Zusammenfassen der Widerstände

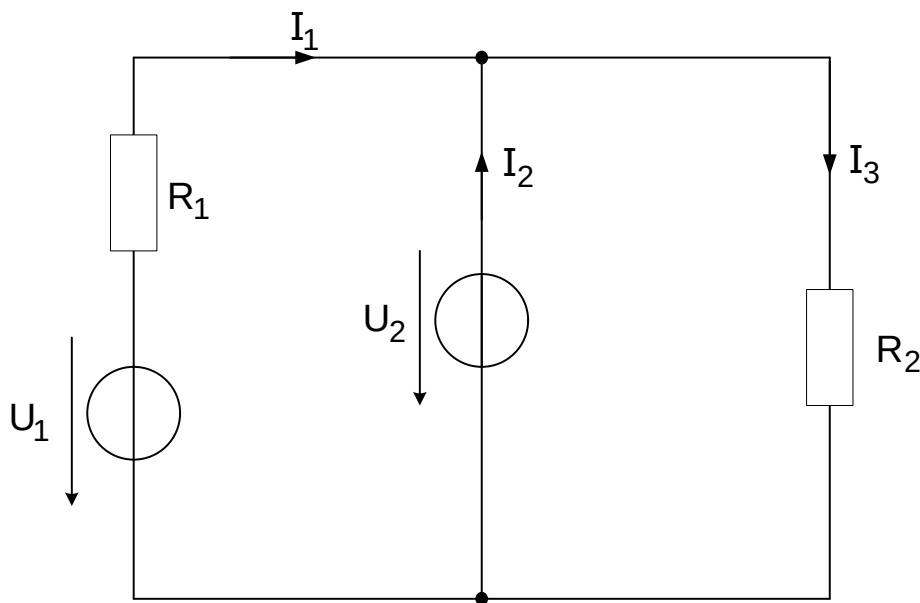


Bestimmung des Innenwiderstandes als „Ersatzwiderstand“ bezüglich der Klemmen A-B



Bestimmung des Innenwiderstandes mit Hilfe des Kurzschlussstromes

Aufgabe 4 (Methode des Überlagerungssatzes)



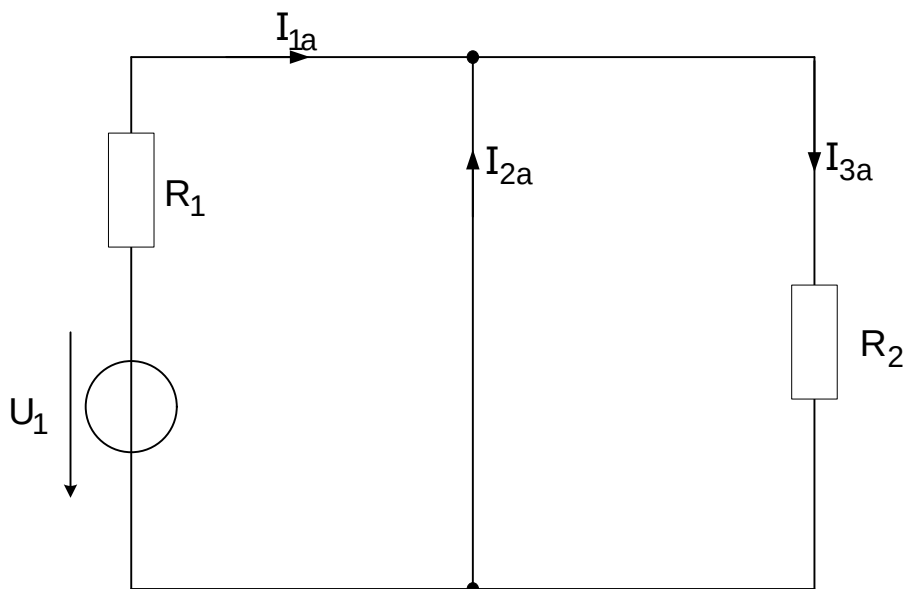
Gegebene Werte:

$$R_1 = 6 \, \Omega$$

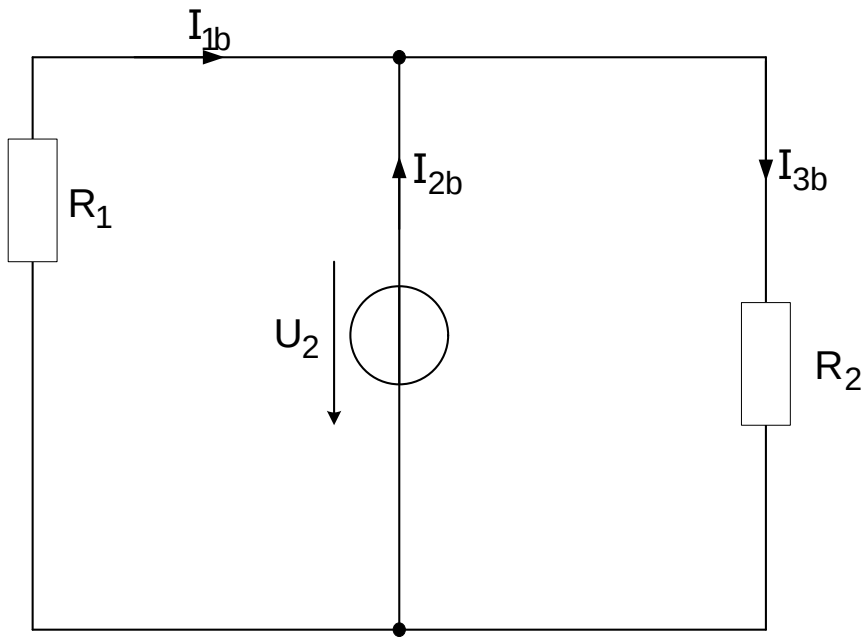
$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 12 \, \text{V}$$

$$U_2 = 6 \, \text{V}$$

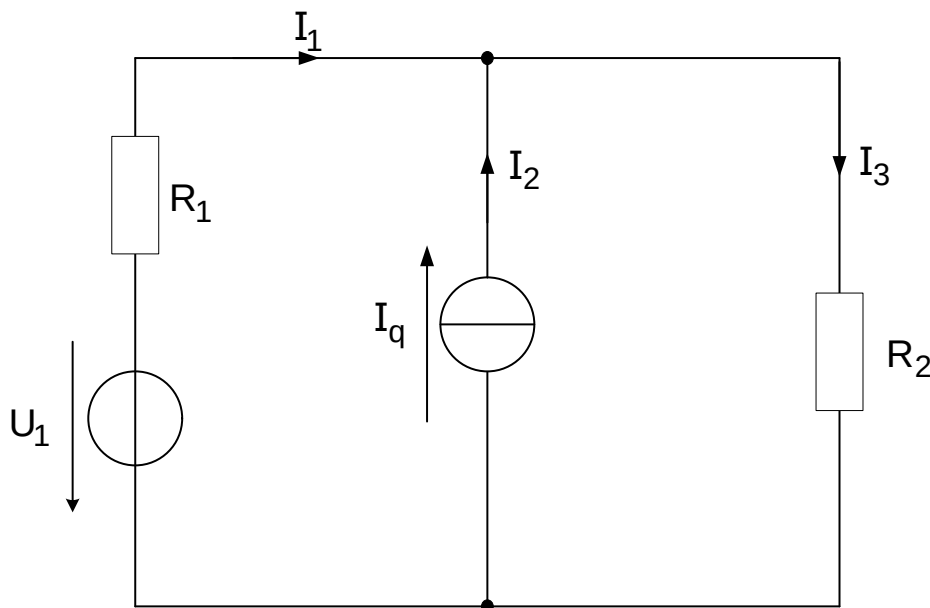


Betrachtung der alleinigen Wirkung von U_1



Betrachtung der alleinigen Wirkung von U_2

Aufgabe 5 (Methode des Überlagerungssatzes)



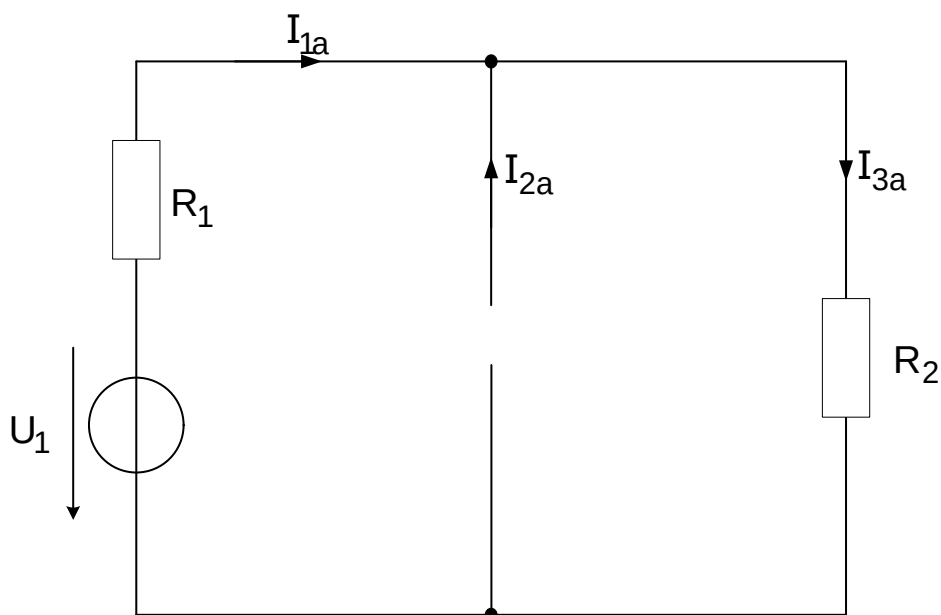
Gegebene Werte:

$$R_1 = 6 \, \Omega$$

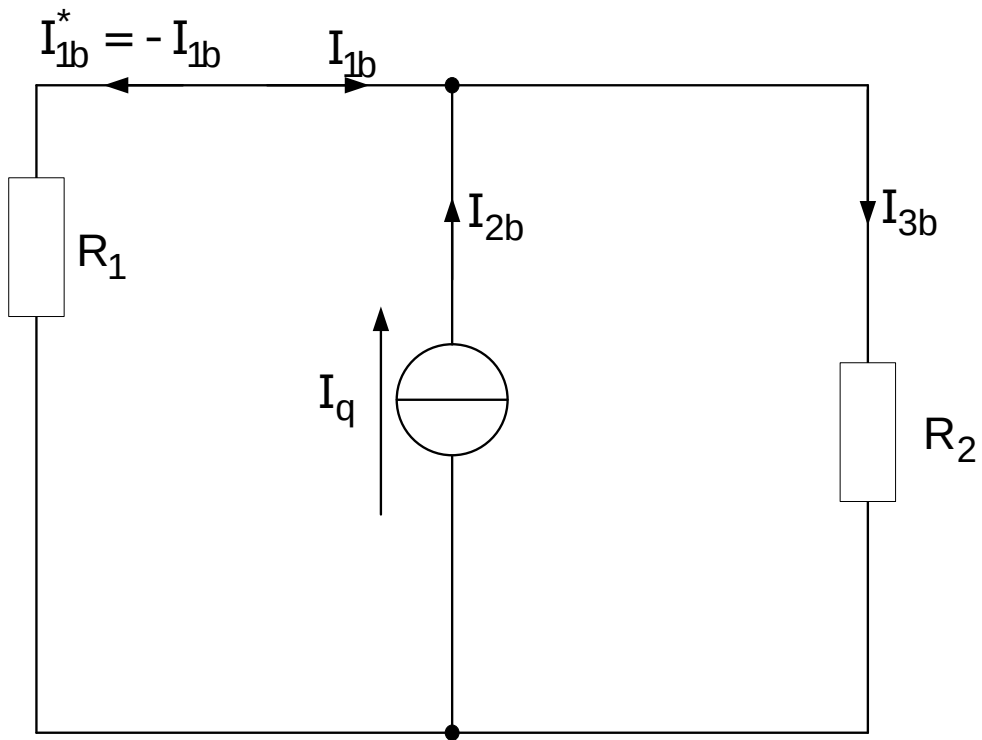
$$R_2 = 3 \, \Omega$$

$$U_1 = 18 \, \text{V}$$

$$I_q = 3 \, \text{A}$$



Betrachtung der alleinigen Wirkung von U_1



Betrachtung der alleinigen Wirkung von I_q



Kurzlösung zur Übung 2

Gleichstrom – Netzumformung, Ersatzspannungsquelle und Überlagerungssatz

Aufgabe 1 (Methode der Netzumformung)

1. $I_1 = 1 \text{ A}$ 2. $U_{R1} = 10 \text{ V}$ $U_{R2} = U_{R3} = 2 \text{ V}$
3. $I_2 = 0,33 \text{ A}$ $I_3 = 0,66 \text{ A}$ $\frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}$
4. $\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$ 5. $\frac{I_3}{I_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$

Aufgabe 2 (Methode der Netzumformung)

1. $I_0 = 0,5 \text{ A}$ 2. $P_{el} = 12,5 \text{ W}$

Aufgabe 3 (Methode der Ersatzspannungsquelle)

1. $U_q = 5 \text{ V}$ 2. $R_i = 50 \Omega$ 3. $I_L = 50 \text{ mA}$

Aufgabe 4 (Methode des Überlagerungssatzes)

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = 2 \text{ A} + (-1 \text{ A}) = 1 \text{ A} \qquad I_2 = I_{2a} + I_{2b} = -2 \text{ A} + 3 \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 0 \text{ A} + 2 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

Aufgabe 5 (Methode des Überlagerungssatzes)

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = 2 \text{ A} + (-1 \text{ A}) = 1 \text{ A} \qquad I_2 = I_{2a} + I_{2b} = 0 \text{ A} + 3 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 2 \text{ A} + 2 \text{ A} = 4 \text{ A}$$

Übung 3

Wechselstrom – Grundlagen, Zeigerdarstellung

Aufgabe 1 (Wechselstrom, Grundlagen)

Im Bild 1 sind die zeitlichen Verläufe von drei sinusförmigen Spannungen dargestellt.

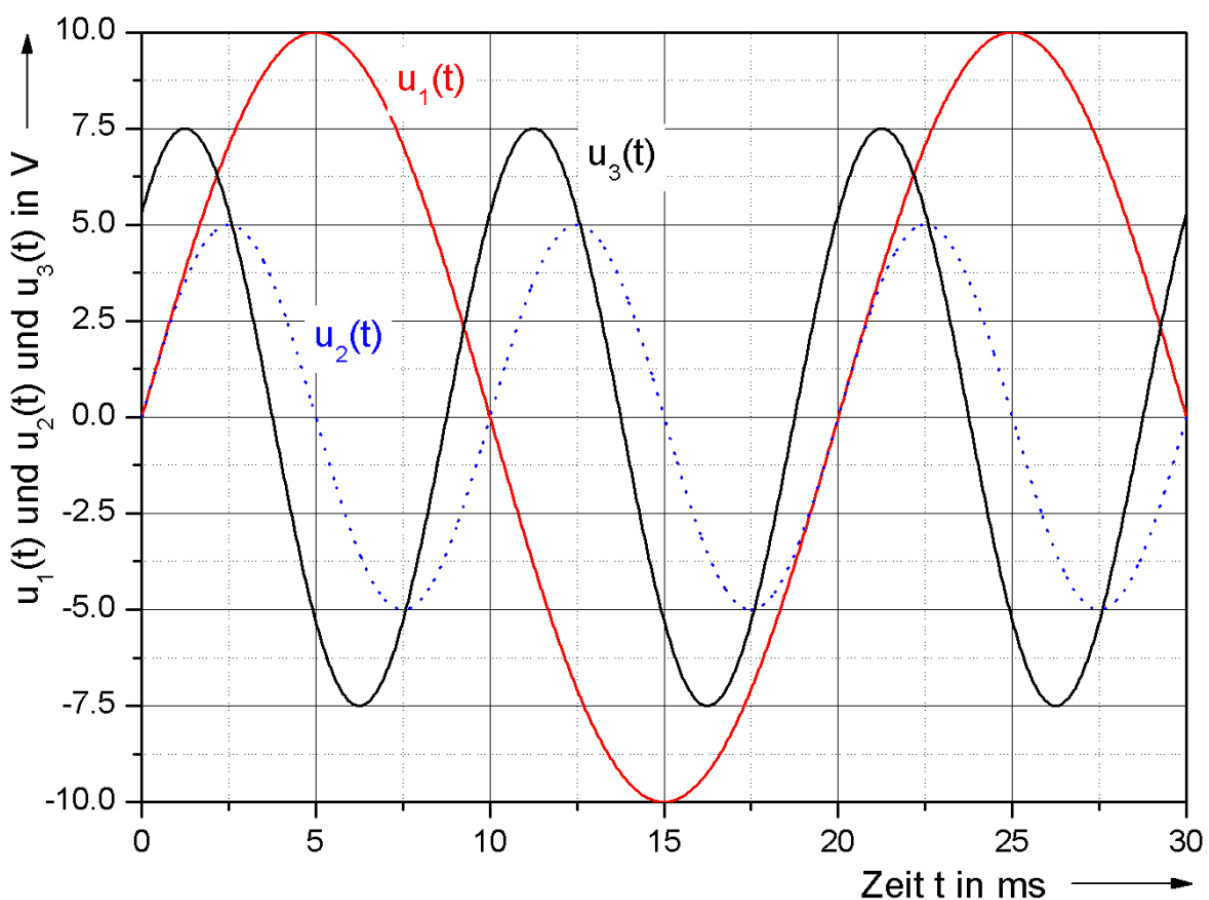


Bild 1 Zeitliche Verläufe (Liniendiagramm) von drei sinusförmigen Spannungen

Fragen:

1. Geben Sie für den dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannung $u_1(t)$ die mathematische Funktion in der Form $u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_1}\right)$ an.

Wie groß ist die Frequenz f_1 und die Kreisfrequenz ω_1 ?

2. Geben Sie für den dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannung $u_2(t)$ die mathematische Funktion in der Form $u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_2}\right)$ an.

Wodurch unterscheidet sich $u_2(t)$ von $u_1(t)$?

Wie groß ist die Frequenz f_2 und die Kreisfrequenz ω_2 ?

3. Geben Sie für den dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannung $u_3(t)$ die mathematische Funktion in der Form $u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_3} + \tau_0\right)$ an.

Wodurch unterscheidet sich $u_3(t)$ von $u_2(t)$?

Wie groß ist die Frequenz f_3 und die Kreisfrequenz ω_3 ?

Aufgabe 2 (Wechselstrom, Zeigerdarstellung)

Gegeben sind die beiden sinusförmigen Spannungen:

$$u_1(t) = 12 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{20 \text{ ms}} \cdot t\right) \quad (1)$$

$$u_2(t) = 8 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{20 \text{ ms}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2)$$

Fragen:

1. Stellen Sie die Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ als rotierende Amplitudenzeiger $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ dar - zeichnen Sie die Zeiger in das nachfolgende Diagramm (Bild 2) ein und geben Sie neben der Zeigerdarstellung auch die Liniendarstellungen der zeitlichen Funktionen an.
2. Bestimmen Sie mithilfe der Zeigerdarstellung die Amplitude $\hat{u}$ und den Phasenwinkel φ der Spannung $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.
3. Geben Sie die Funktion für $u(t)$ an.
Wie groß ist der Effektivwert U der sinusförmigen Summenspannung $u(t)$?

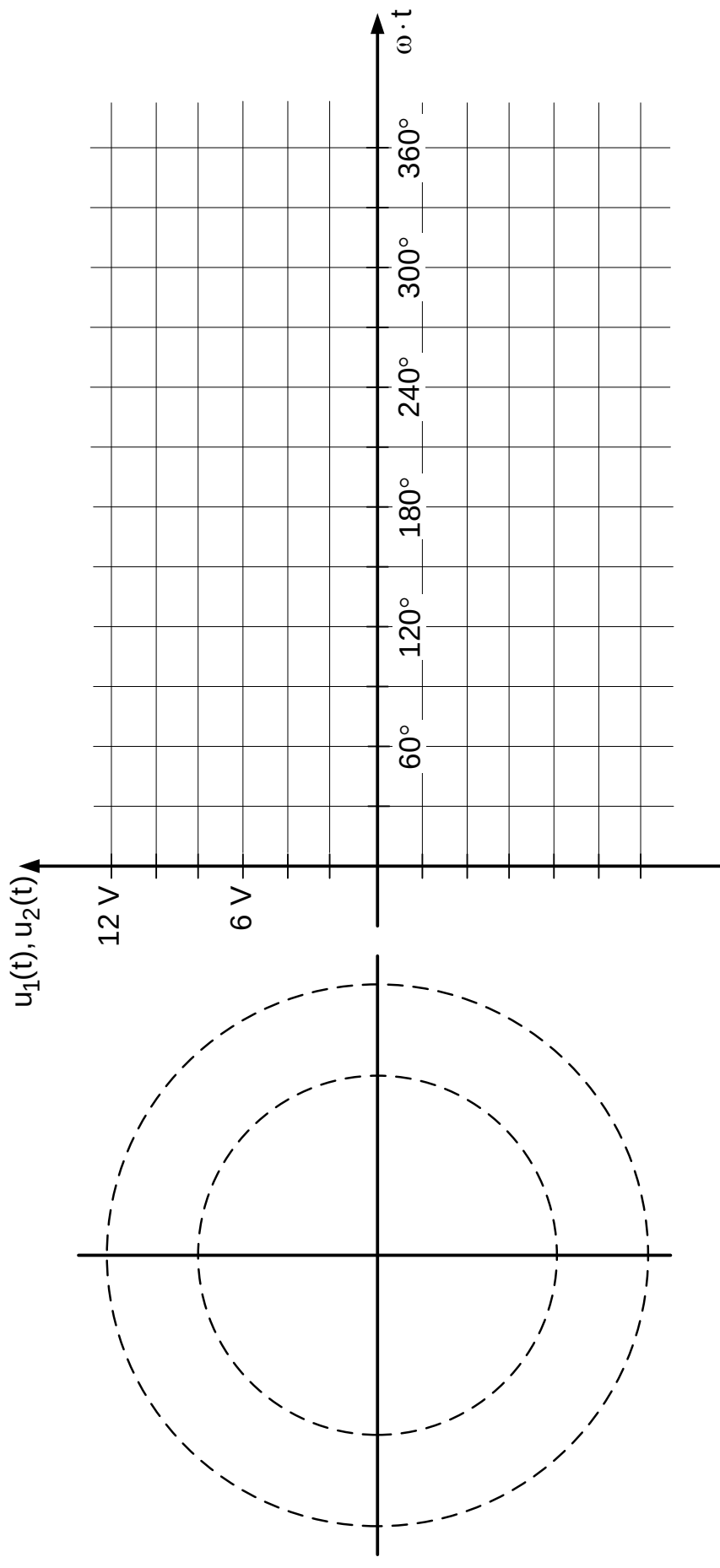
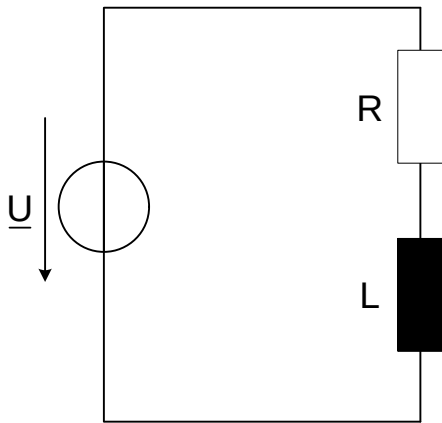


Bild 2 Zeiger- und Liniendarstellung der sinusförmigen Spannungen

Aufgabe 3 (Wechselstrom, Zeigerdiagramm)

Im Bild 3 ist die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Spule mit der Induktivität L (R-L-Glied) gegeben. Das R-L-Glied wird an eine sinusförmige Wechselspannungsquelle mit dem Effektivwert U angeschlossen.



Gegebene Werte:

$U = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

$R = 10 \, \Omega$

$L = 88 \text{ mH}$

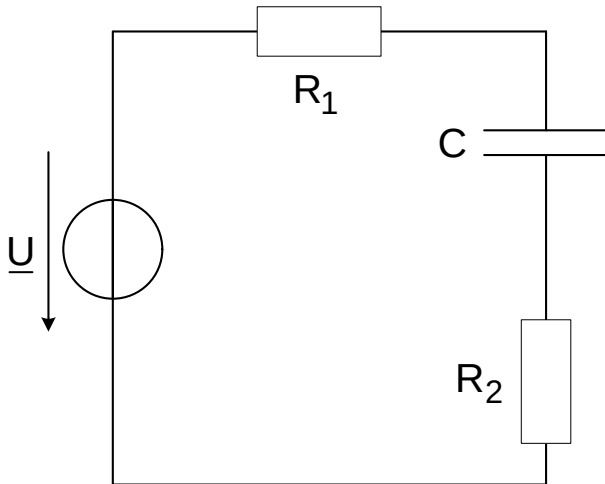
Bild 3 R-L-Glied an sinusförmiger Wechselspannung

Fragen:

1. Versehen Sie das ESB mit Zählpfeilen und Bezeichner für die unbekannten Ströme und Spannungen.
2. Bestimmen Sie den Blindwiderstand X_L der Induktivität L .
3. Wie groß ist der Betrag Z und der Winkel φ_Z der Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ der R-L-Schaltung?
4. Bestimmen Sie den Strom, den die Spannungsquelle liefern muss.
Wie groß sind der Effektivwert, Scheitelwert und die Frequenz des Stromes?
5. Wie groß sind die Teilspannungen an R und L ?
6. Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm.
7. Um welchen Phasenwinkel $\varphi = \varphi_U - \varphi_i$ ist der Strom gegenüber der Spannung phasenverschoben?

Aufgabe 4 (Wechselstrom, Zeigerdiagramm)

Im Bild 4 ist das ESB einer Reihenschaltung zweier ohmscher Widerstände R_1 und R_2 und eines Kondensators C mit der Kapazität C gegeben (R-C-Glied). Das R-C-Glied wird an eine sinusförmige Wechselspannungsquelle mit dem Effektivwert U angeschlossen.



Gegebene Werte:

$U = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

$R_1 = 100 \text{ } \Omega$

$R_2 = 150 \text{ } \Omega$

$C = 31,8 \text{ } \mu\text{F}$

Bild 4 R-C-Glied

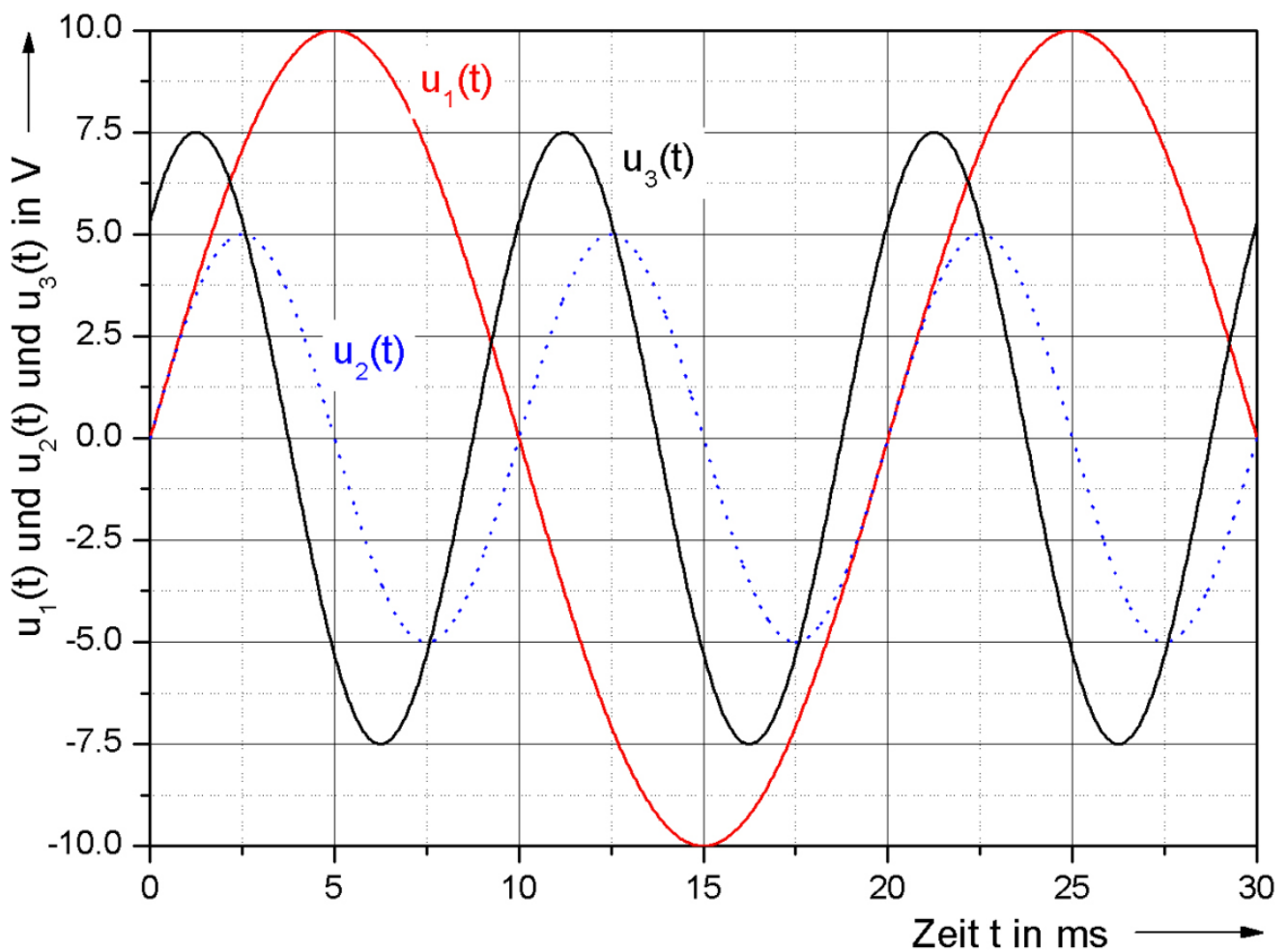
Fragen:

1. Versehen Sie das ESB mit Zählpfeilen und Bezeichner für die unbekannten Ströme und Spannungen.
2. Bestimmen Sie den Blindwiderstand X_C der Kapazität C .
3. Welchen Betrag Z besitzt die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ der Reihenschaltung?
Wie groß ist der Winkel φ_Z der Impedanz?
4. Bestimmen Sie den Strom, den die Spannungsquelle liefern muss.
Wie groß sind der Effektivwert, Scheitelwert und die Frequenz des Stromes?
5. Wie groß sind die Teilspannungen an R_1 , R_2 und C (Effektivwerte und Scheitelwerte)?
6. Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm.
7. Um welchen Phasenwinkel $\varphi = \varphi_U - \varphi_i$ ist der Strom gegenüber der Spannung phasenverschoben?

Übung 3

Wechselstrom – Grundlagen, Zeigerdarstellung

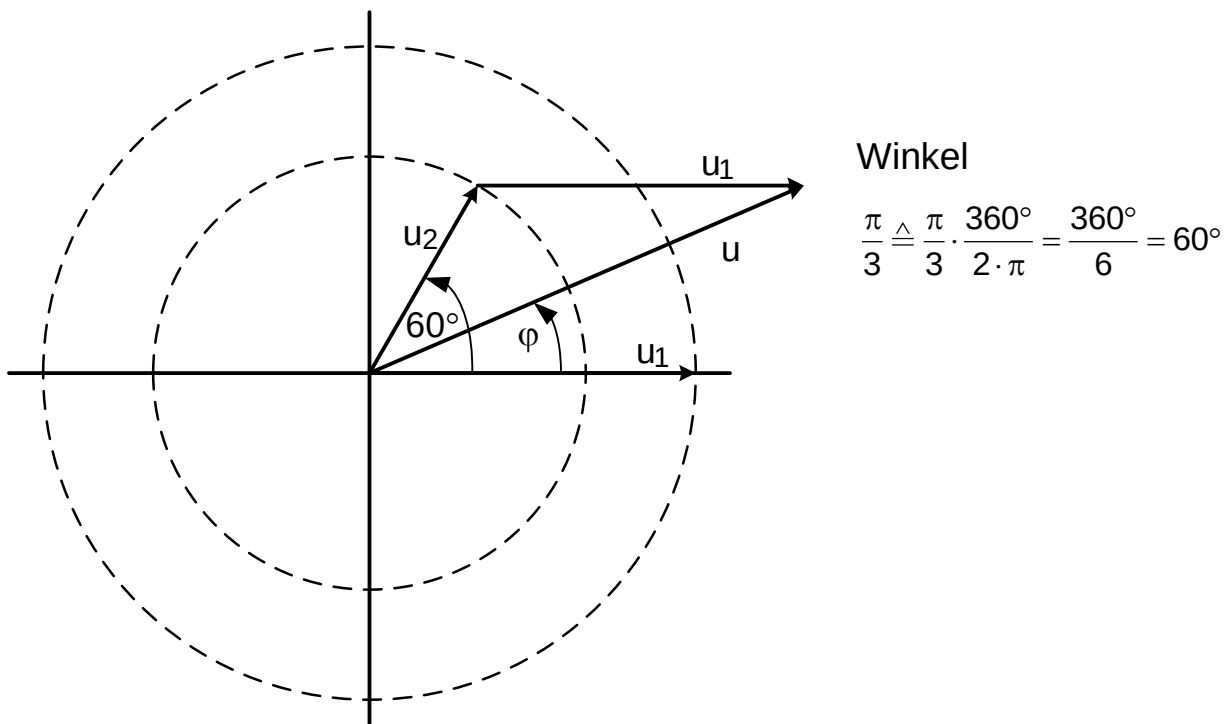
Aufgabe 1 (Wechselstrom, Grundlagen)



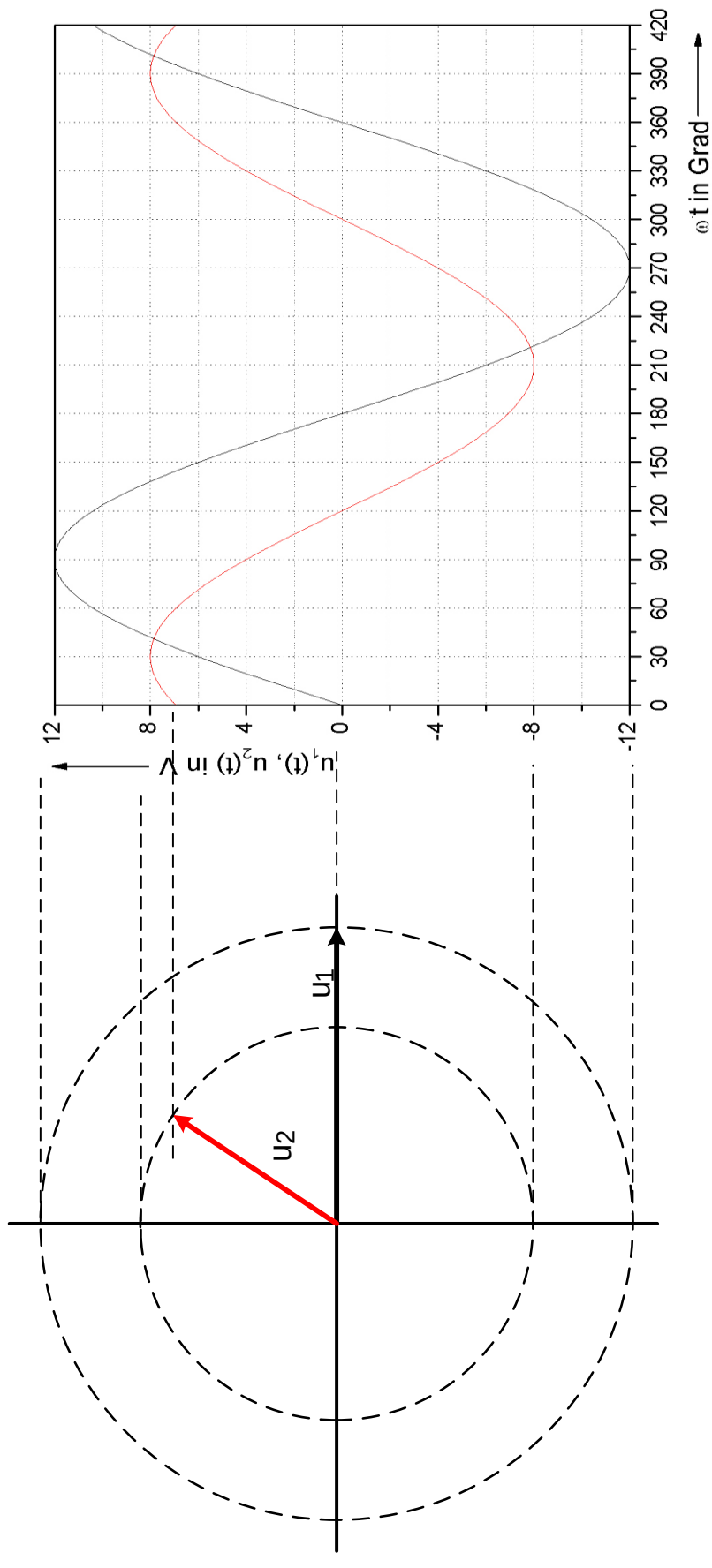
Zeitliche Verläufe (Liniendiagramm) von drei sinusförmigen Spannungen

Aufgabe 2 (Wechselstrom, Zeigerdarstellung)

Zeigeraddition: Spannungsmaßstab: $2 \text{ V} \triangleq 1 \text{ cm} \Rightarrow \hat{u}_1 \triangleq 6 \text{ cm}$ und $\hat{u}_2 \triangleq 4 \text{ cm}$

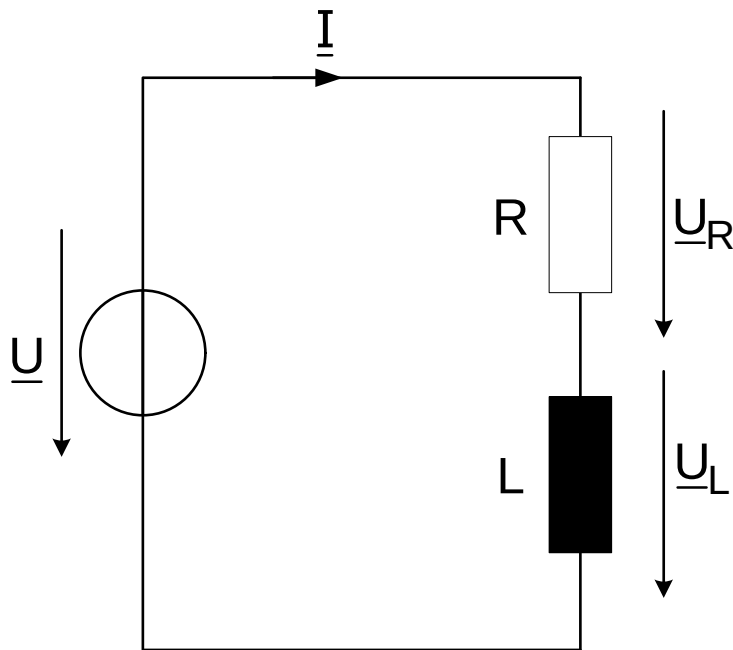


Abgelesen: $\varphi \approx 23,5^\circ$ $\hat{u} = |\hat{u}| \triangleq 8,7 \text{ cm} \Rightarrow \hat{u} \approx 8,7 \text{ cm} \cdot \frac{2 \text{ V}}{\text{cm}} = 17,4 \text{ V}$



Zeiger- und Liniendarstellung der sinusförmigen Spannungen

Aufgabe 3 (Wechselstrom, Zeigerdiagramm)



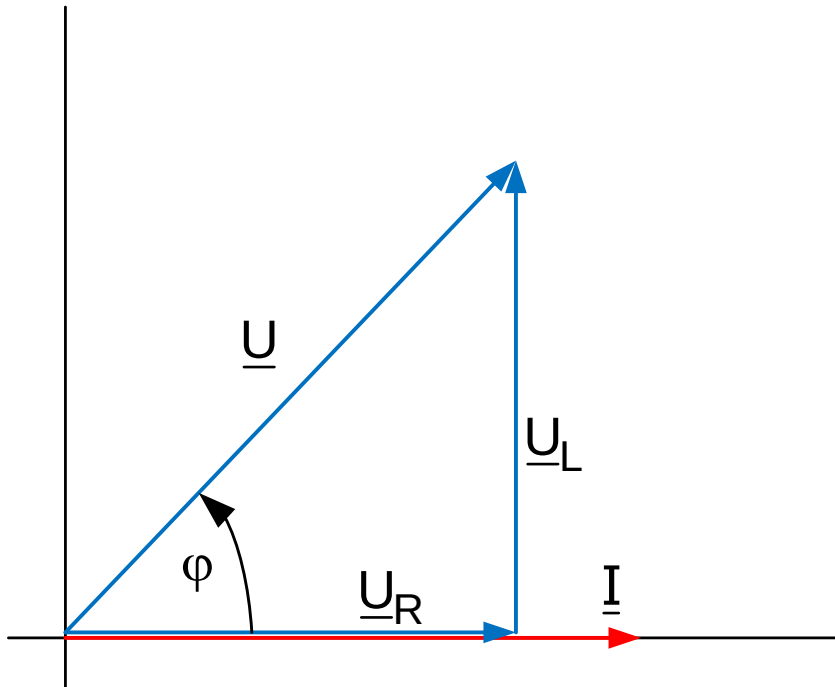
Gegebene Werte:

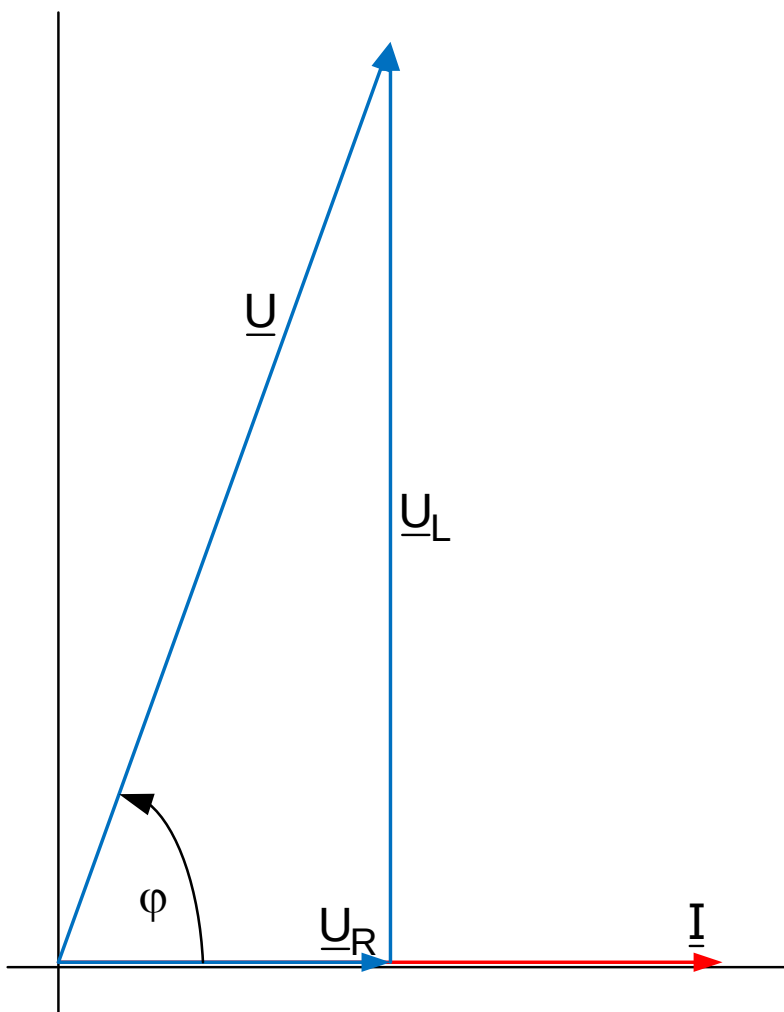
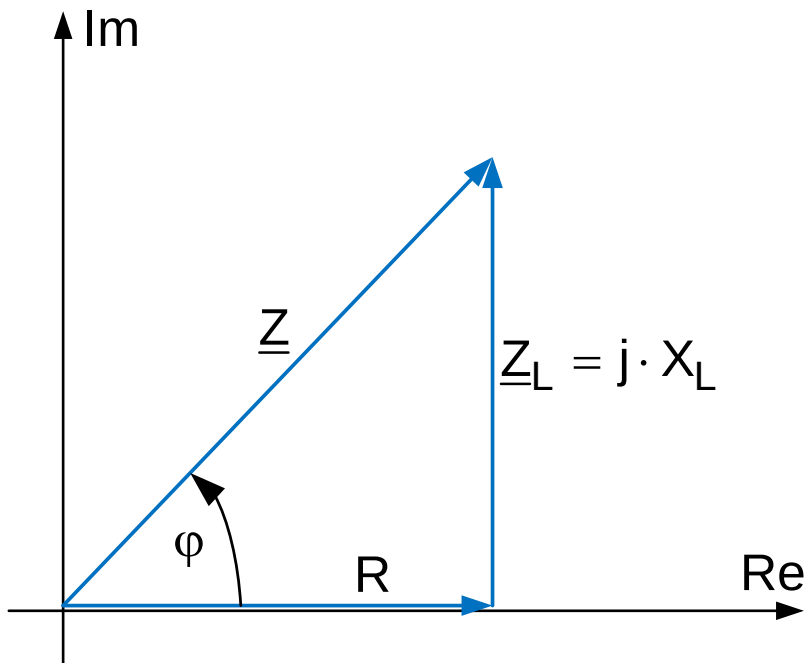
$U = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

$R = 10 \text{ } \Omega$

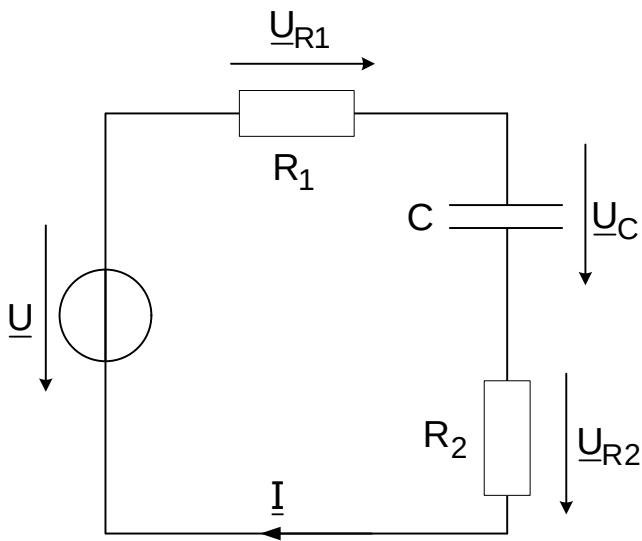
$L = 88 \text{ mH}$

R-L-Glied an sinusförmiger Wechselspannung





Aufgabe 4 (Wechselstrom, Zeigerdiagramm)



Gegebene Werte:

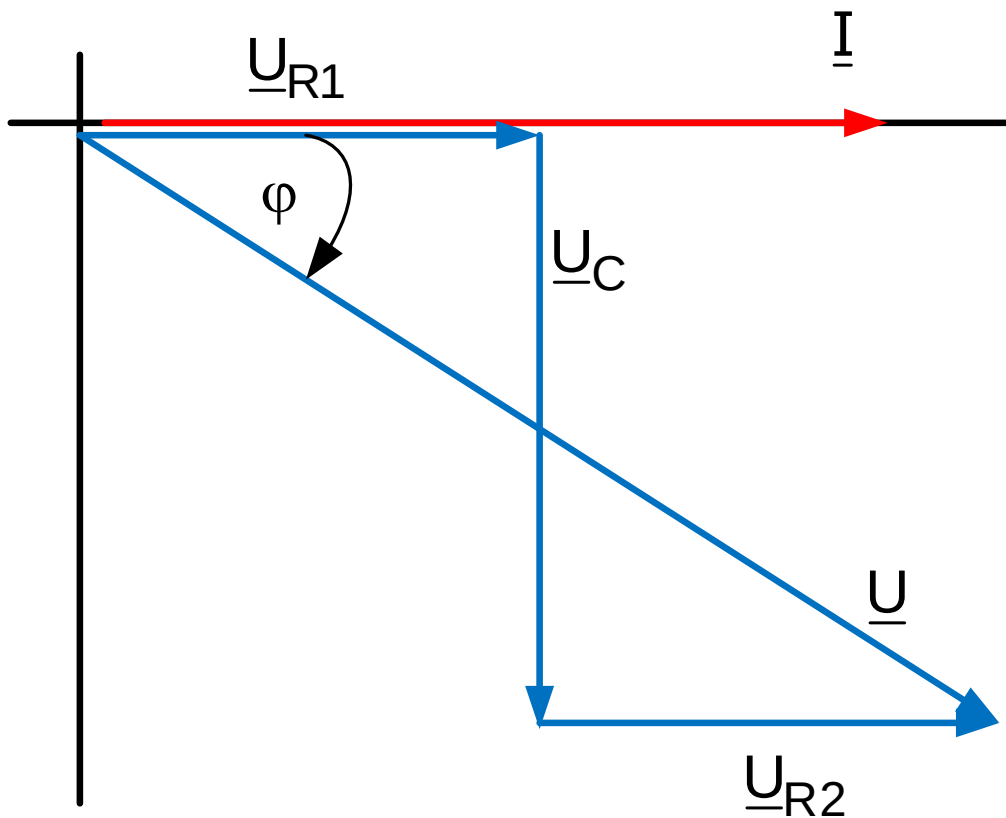
$U = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

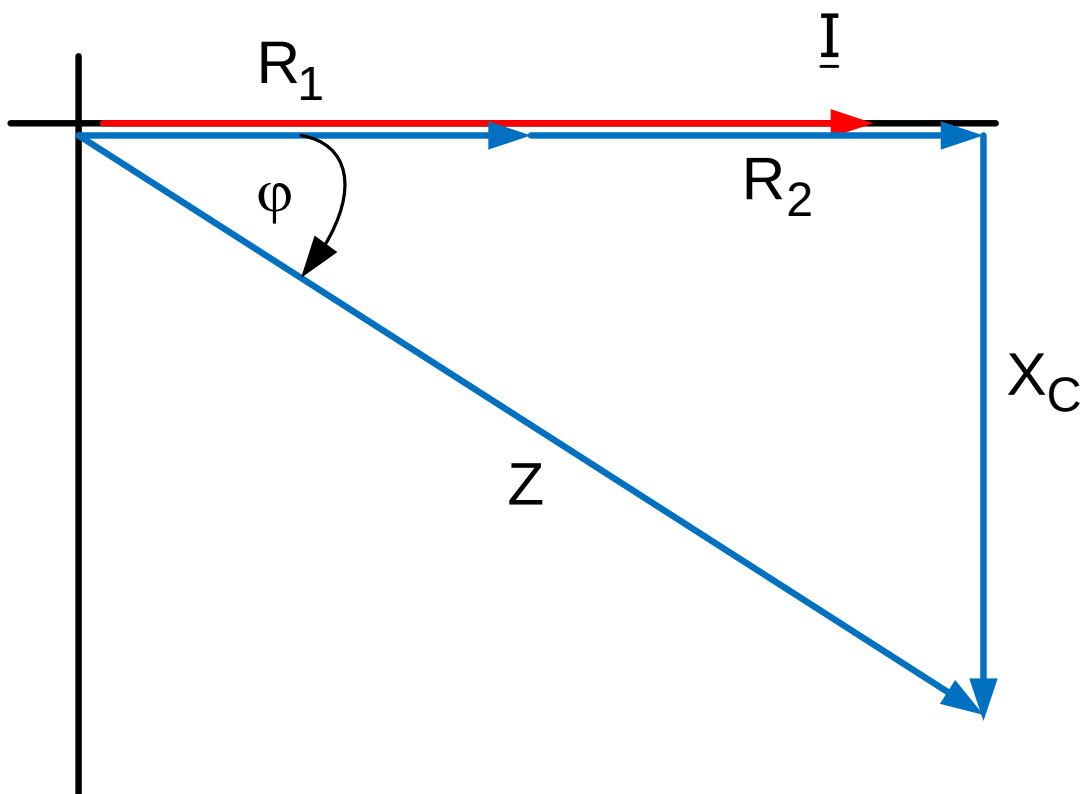
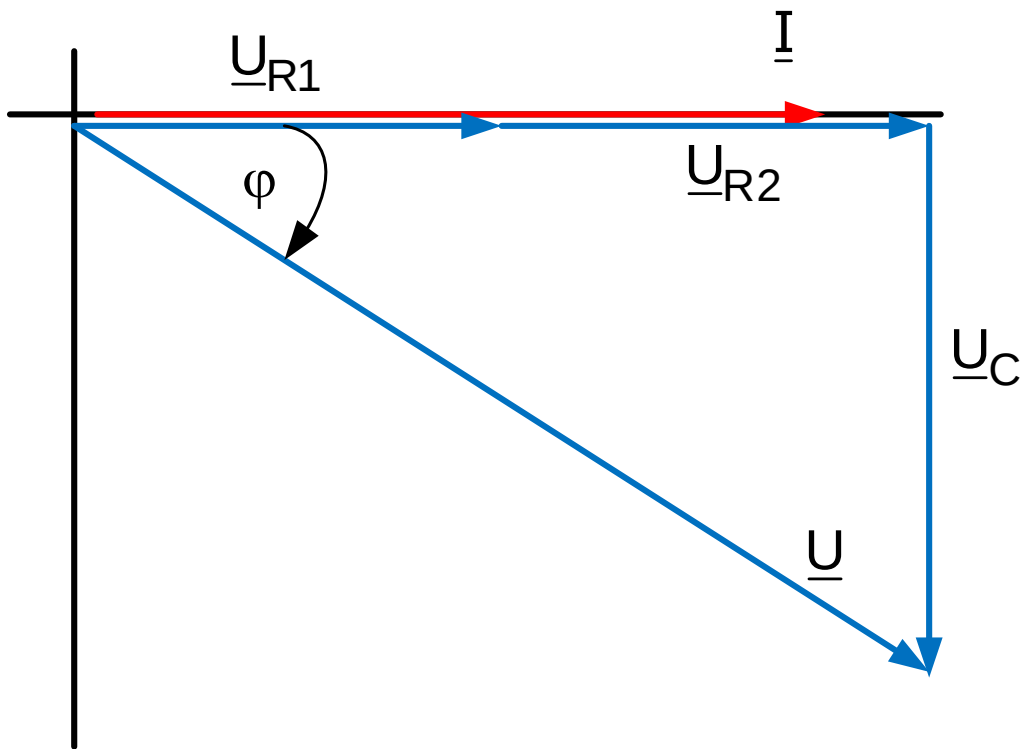
$R_1 = 100 \Omega$

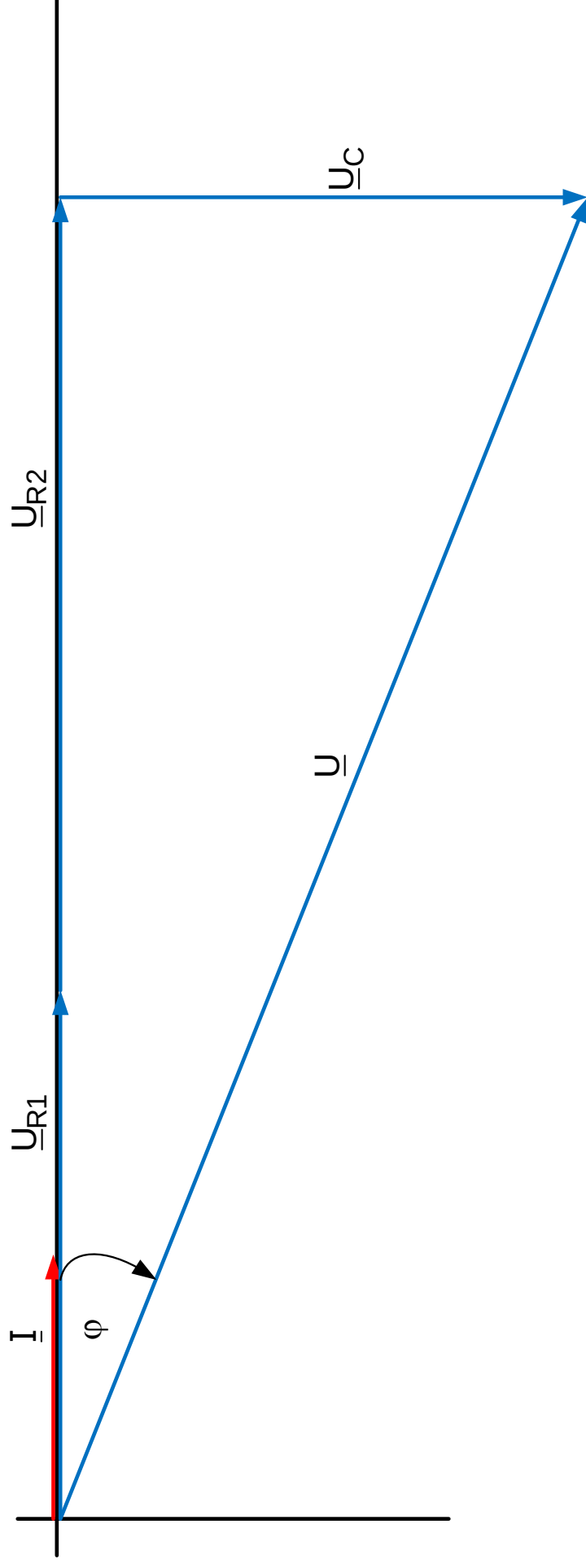
$R_2 = 150 \Omega$

$C = 31,8 \mu\text{F}$

R-C-Glied









Kurzlösung zur Übung 3

Wechselstrom

Aufgabe 1 (Wechselstrom, Grundlagen)

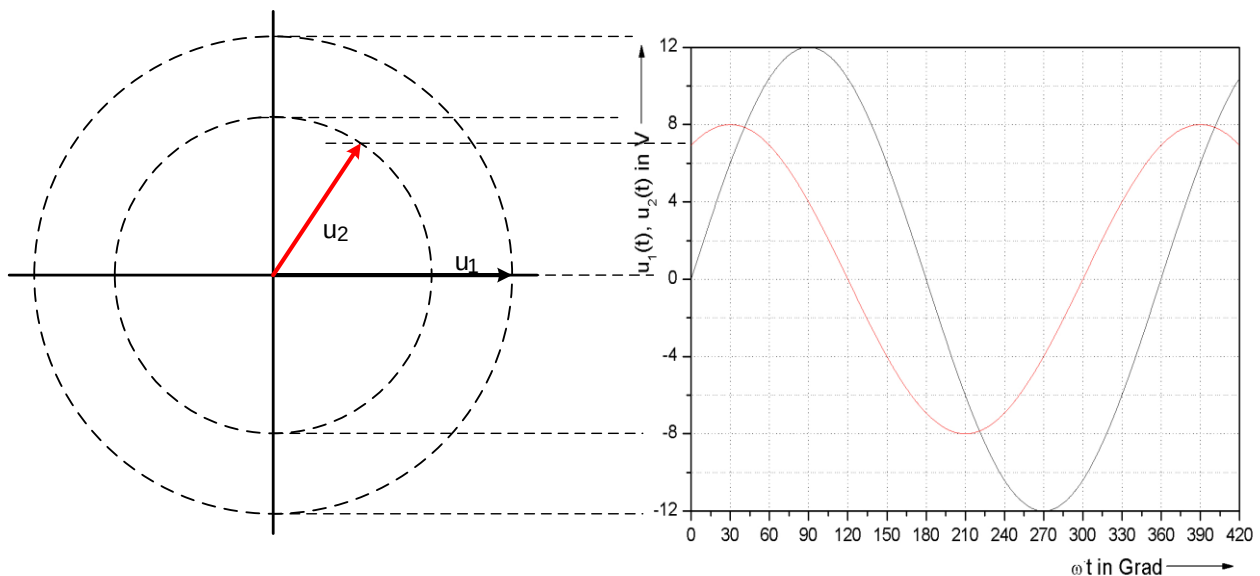
1. $u_1(t) = 10 \text{ V} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{20 \text{ ms}}\right)$ $f_1 = 50 \text{ Hz}$ $\omega_1 \approx 314,16 \frac{1}{\text{s}}$

– 2. $u_2(t) = 5 \text{ V} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{10 \text{ ms}}\right)$ $f_2 = 100 \text{ Hz}$ $\omega_2 \approx 628,32 \frac{1}{\text{s}}$

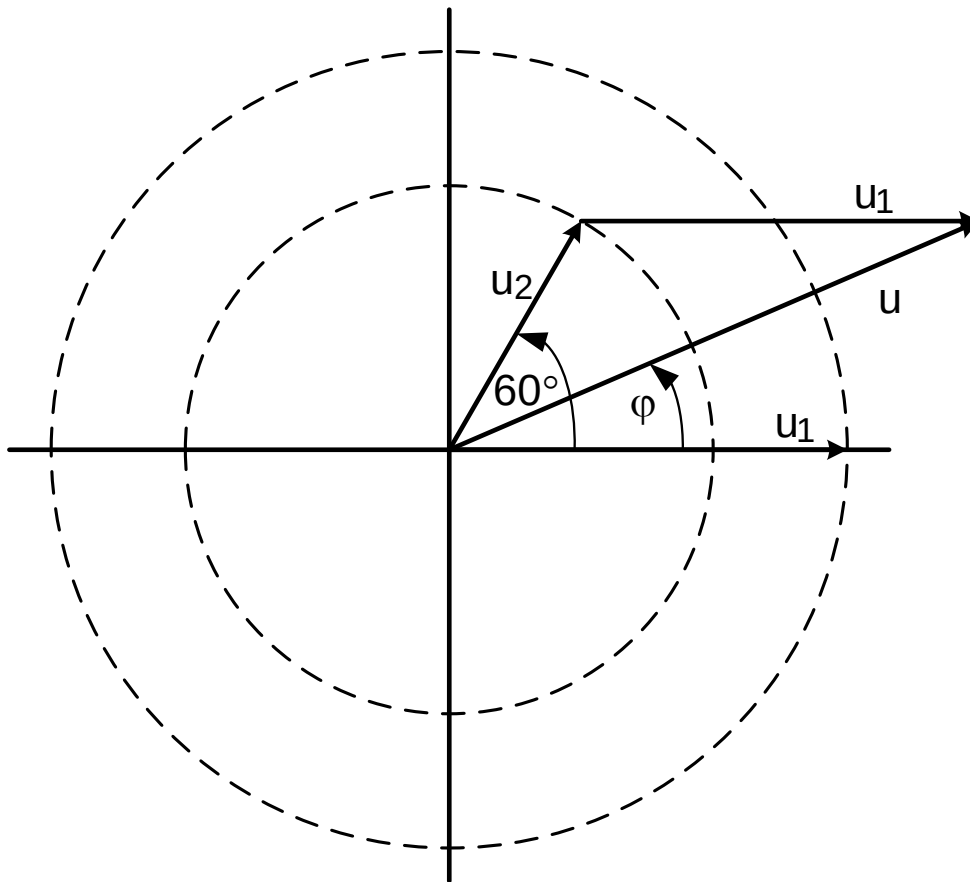
3. $u_3(t) = 7,5 \text{ V} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{10 \text{ ms}} + 0,785\right)$ $f_3 = 100 \text{ Hz}$ $\omega_3 \approx 628,32 \frac{1}{\text{s}}$

Aufgabe 2 (Wechselstrom, Zeigerdarstellung)

1. Spannungen in Zeigerdarstellung und Zeitfunktionen im Liniendiagramm



2. Zeigeraddition (maßstäblich)



Abgelesen: $\hat{u} \approx 17,4 \text{ V}$ $\varphi \approx 23,5^\circ$

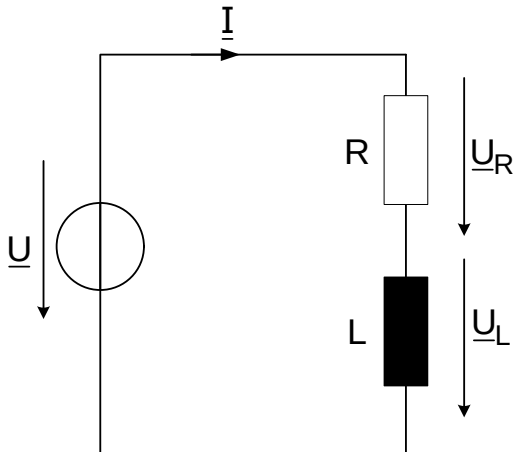
Berechnet: $\hat{u} \approx 17,4 \text{ V}$ $\varphi \approx 23,413^\circ$

3. $u(t) = 17,4 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{20 \text{ ms}} \cdot t + 0,13 \cdot \pi\right)$ mit $\varphi = 23,5^\circ \triangleq 23,4^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,13 \cdot \pi$

$$U \approx 12,3 \text{ V}$$

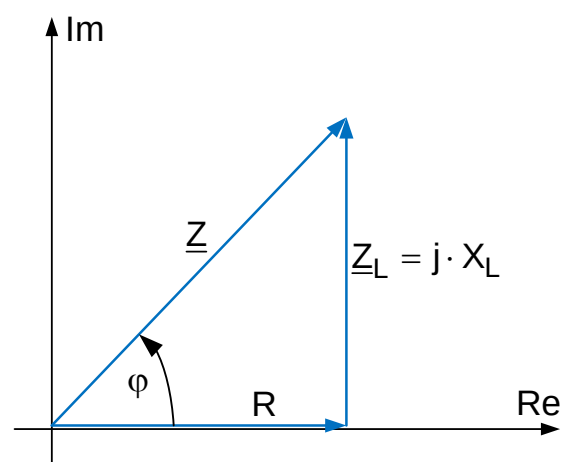
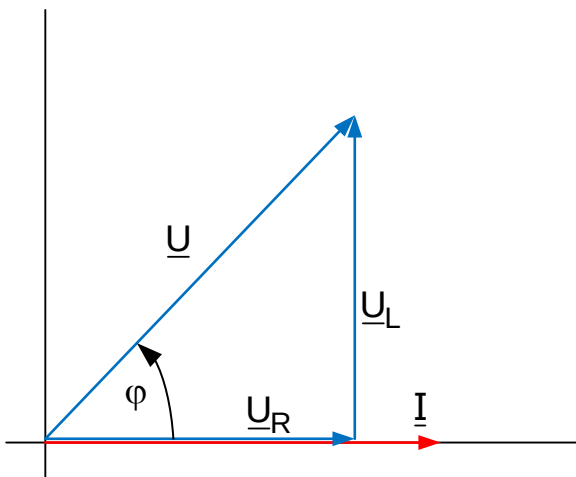
Aufgabe 3 (Wechselstrom, Zeigerdarstellung)

1. ESB mit Zählfeilen und Bezeichner



2. $X_L \approx 27,7 \, \Omega$

3. Zeigerdiagramm qualitativ und Impedanz Z



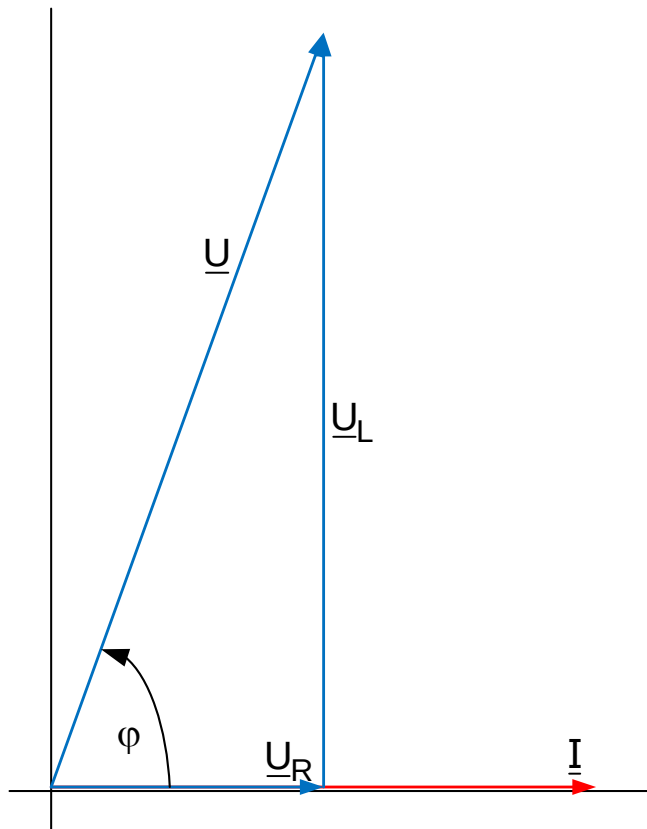
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \dots \approx 29,4 \, \Omega$$

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) \approx 70,1^\circ$$

4. $I \approx 3,4 \, \text{A}$ $\hat{i} \approx 4,8 \, \text{A}$ $f = 50 \, \text{Hz}$

5. $U_R \approx 34 \, \text{V}$ $U_L \approx 94 \, \text{V}$

6. Zeigerdiagramm maßstäblich



Spannungsmaßstab: $10 \text{ V} \triangleq 1 \text{ cm}$

$U_R \triangleq 3,4 \text{ cm}$

$U_L \triangleq 9,4 \text{ cm}$

Strommaßstab: $1 \text{ A} \triangleq 2 \text{ cm}$

$I \triangleq 6,8 \text{ cm}$

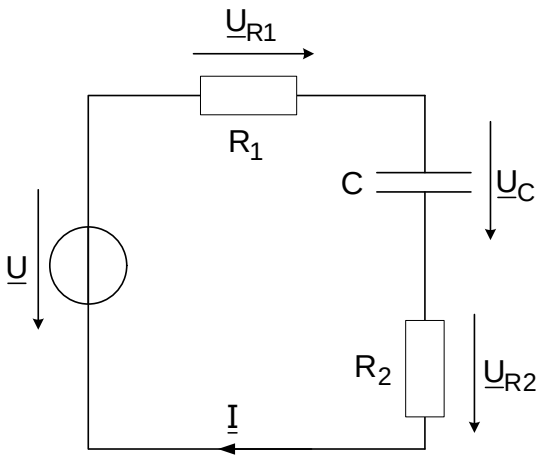
7. $\varphi \approx 70,1^\circ$

$\underline{I}$ eilt $\underline{U}$ um φ **nach**!

Die Schaltung wirkt ohmsch-induktiv!

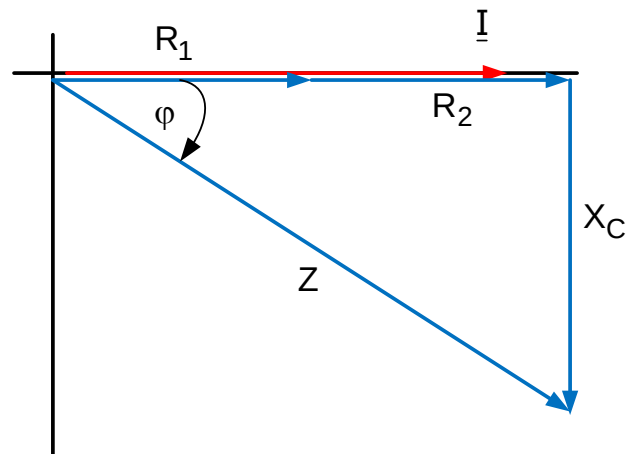
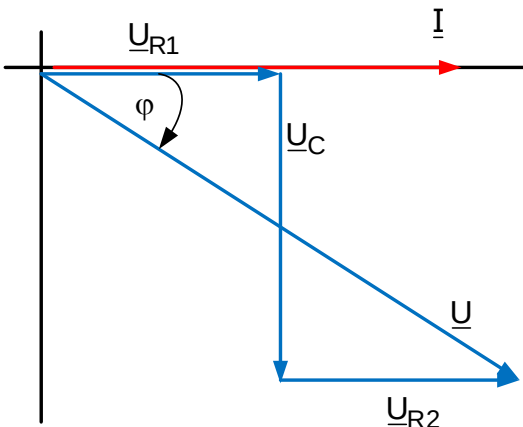
Aufgabe 4 (Wechselstrom, Zeigendarstellung)

1. ESB mit Zählpfeilen und Bezeichner



2. $X_C \approx 100 \, \Omega$

3. Zeigerdiagramm qualitativ und Impedanz Z



$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_C)^2} = \dots \approx 269,3 \, \Omega$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{X_C}{R_1 + R_2}\right) = \dots \approx -21,8^\circ$$

4. $I \approx 0,37 \, \text{A}$ $\hat{I} \approx 0,523 \, \text{A}$ $f = 50 \, \text{Hz}$

5. $U_{R1} \approx 37 \, \text{V}$ $U_{R2} \approx 55,5 \, \text{V}$ $U_C \approx 37 \, \text{V}$
 $\hat{U}_{R1} \approx 52,3 \, \text{V}$ $\hat{U}_{R2} \approx 78,5 \, \text{V}$ $\hat{U}_C \approx 52,3 \, \text{V}$

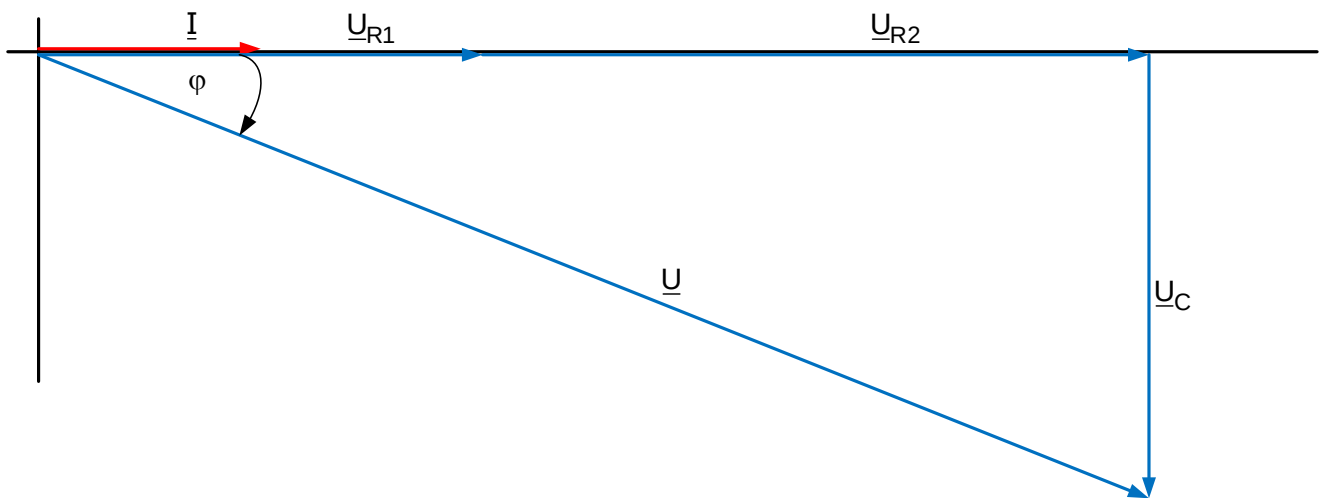
6. Maßstäbliches Zeigerdiagramm

Strommaßstab: $1\text{ A} \triangleq 10\text{ cm}$ $I = 0,37\text{ A} \triangleq 3,7\text{ cm}$

Spannungsmaßstab: $5\text{ V} \triangleq 1\text{ cm}$ $U_{R1} = 37\text{ V} \triangleq 7,4\text{ cm}$

$U_{R2} = 55,5\text{ V} \triangleq 11,1\text{ cm}$

$U_C = 37\text{ V} \triangleq 7,4\text{ cm}$



Abgelesen: $|\varphi| \approx 22^\circ$

$\underline{I}$ eilt $\underline{U}$ um $|\varphi| \approx 22^\circ$ voraus!

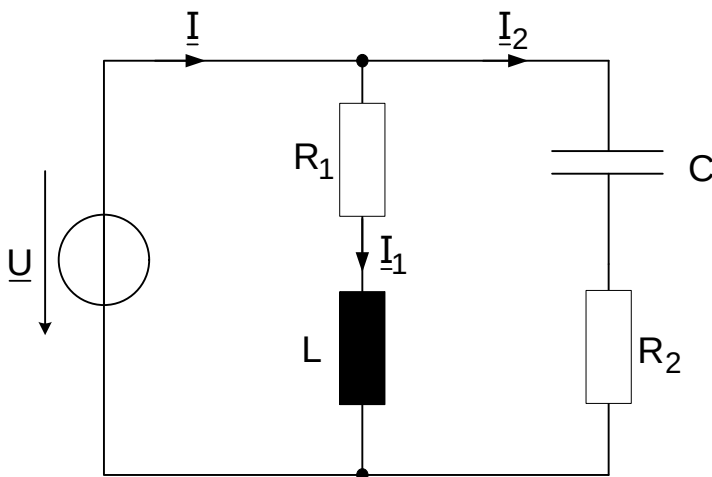
Die Schaltung wirkt kapazitiv, da der Strom der Spannung voraus eilt!

Übung 4

Zeigerdarstellung, Komplexe Rechnung

Aufgabe 1 (Zeigerdiagramm)

In Bild 1 ist eine einfache Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen gegeben. Die Strom- und Spannungsverhältnisse sowie die Leistungsaufnahme der Schaltung soll im Folgenden untersucht werden.



Gegebene Werte:

$U = 10 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

$R_1 = 10 \Omega$

$L = 79,6 \text{ mH}$

$R_2 = 20 \Omega$

$C = 318 \mu\text{F}$

Bild 1 Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen

Fragen:

1. Bestimmen Sie die Blindwiderstände X_L und X_C .
2. Bestimmen Sie die Beträge der Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$.
3. Bestimmen Sie die Beträge sämtlicher Teilspannungen.
4. Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerdiagramm.
5. Bestimmen Sie den Betrag I des Stromes $\underline{I}$ sowie den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$.
Wie wirkt die Schaltung (induktiv, kapazitiv, ohmsch)?
6. Berechnen Sie die Schein-, Blind- und Wirkleistung.

Aufgabe 2 (Komplexe Rechnung)

Eine reale Spule, deren Ersatzschaltbild nach Bild 2 durch die Reihenschaltung des Wirkwiderstandes $R = 20 \, \Omega$ und der Induktivität $L = 0,2 \, \text{H}$ gegeben ist, liegt an einer sinusförmigen Spannung der Frequenz $f = 50 \, \text{Hz}$ und dem Effektivwert $U = 220 \, \text{V}$.

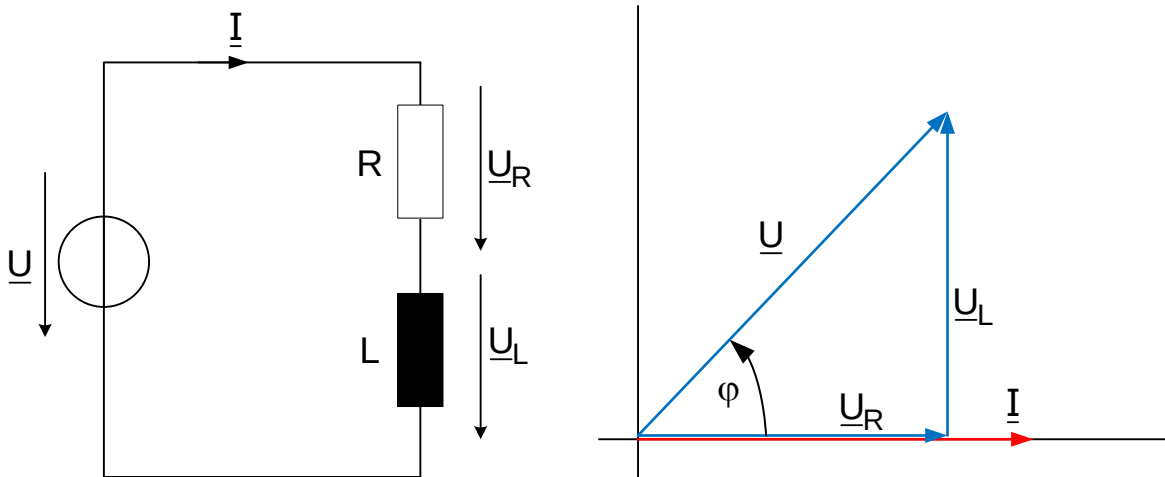


Bild 2 Ersatzschaltbild und qualitatives Zeigerdiagramm

Fragen:

1. Wie groß ist der Effektivwert I des Stromes $\underline{I}$ und um welchen Winkel ist die Spannung gegenüber dem Strom phasenverschoben?
Was eilt wem vor?
2. Wie groß sind die Teilspannungen $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$ nach Betrag und Phase?
3. Berechnen Sie die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$.
Bestimmen Sie daraus die Wirkleistung P und die Blindleistung Q .

Aufgabe 3 (Komplexe Rechnung)

In der in Bild 3 dargestellten Schaltung mit dem Widerstand $R = 40 \, \Omega$ sowie der Induktivität L mit dem induktiven Blindwiderstand $X_L = 30 \, \Omega$ und der Kapazität C mit dem kapazitiven Blindwiderstand $X_C = 60 \, \Omega$ beträgt der Effektivwert U_V der sinusförmigen Wechselspannung $\underline{U}_V$ gleich $U_V = 180 \, \text{V}$. Die Frequenz beträgt $f = 50 \, \text{Hz}$.

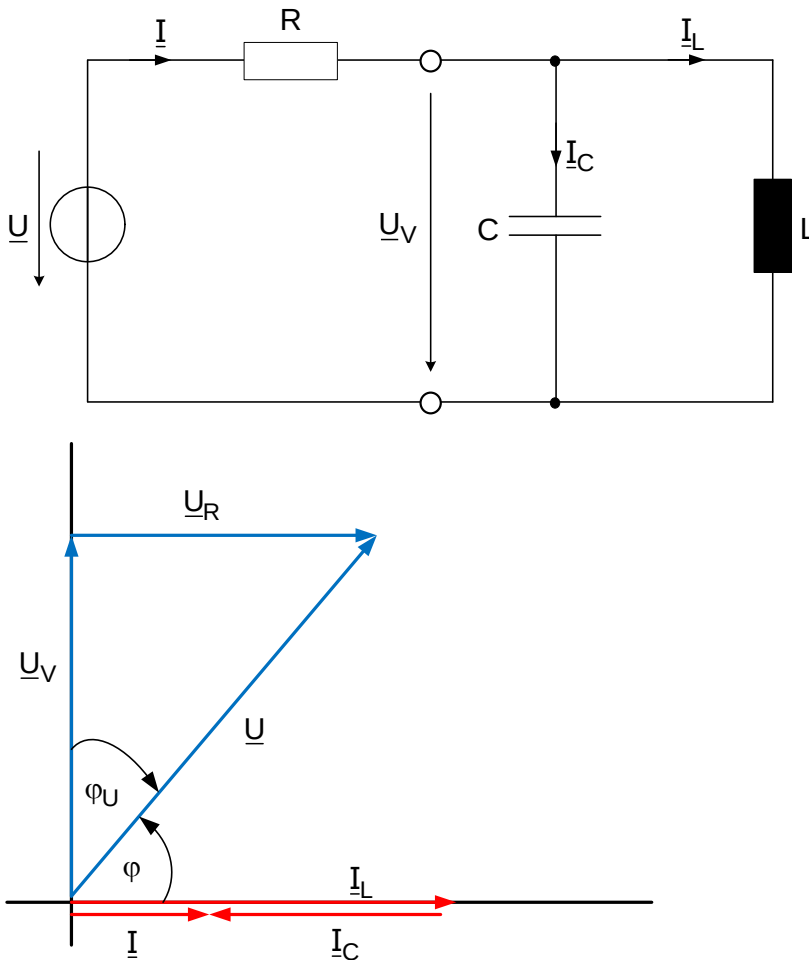


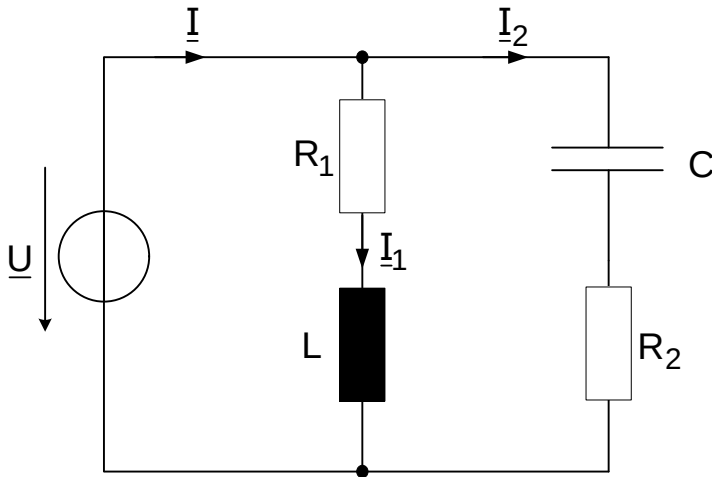
Bild 3 Ersatzschaltbild und qualitatives Zeigerdiagramm

Fragen:

1. Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$ und die Versorgungsspannung $\underline{U}$?
2. Wie groß ist die von der Schaltung aufgenommene komplexe Scheinleistung $\underline{S}$? Berechnen Sie daraus die Wirkleistung P , die Blindleistung Q und den Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$.

Aufgabe 4 (Komplexe Rechnung)

In Bild 4 ist eine einfache Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen gegeben. Die Strom- und Spannungsverhältnisse sowie die Leistungsaufnahme der Schaltung soll im Folgenden mit Hilfe der komplexen Rechnung untersucht werden.



Gegebene Werte:

$U = 10 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinusförmig

$R_1 = 10 \Omega$

$L = 79,6 \text{ mH}$

$R_2 = 20 \Omega$

$C = 318 \mu\text{F}$

Bild 4 Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen

Fragen:

- Bestimmen Sie die komplexen Widerstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ der beiden Teilzweige.
- Bestimmen Sie die komplexen Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$.
- Bestimmen Sie die Beträge und Phasenlagen sämtlicher Teilspannungen.
- Zeichnen Sie ein qualitatives Zeigerdiagramm.
- Bestimmen Sie den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen dem Gesamtstrom $\underline{I}$ und der Spannung $\underline{U}$.
Wie wirkt die Schaltung (induktiv, kapazitiv, ohmsch)?
- Wie groß sind die von der Schaltung aufgenommene komplexe Scheinleistung $\underline{S}$, die Wirkleistung P und die Blindleistung Q ?

Aufgabe 5 (Komplexe Rechnung)

Die in Bild 5 dargestellte Schaltung mit den Widerständen $R_L = 13 \, \Omega$ sowie $R_C = 460 \, \Omega$ und dem induktiven Blindwiderstand $X_L = 19 \, \Omega$ liegt an der sinusförmigen Wechselspannung $\underline{U}$ mit dem Effektivwert $U = 230 \, \text{V}$. Die Frequenz beträgt $f = 60 \, \text{Hz}$.

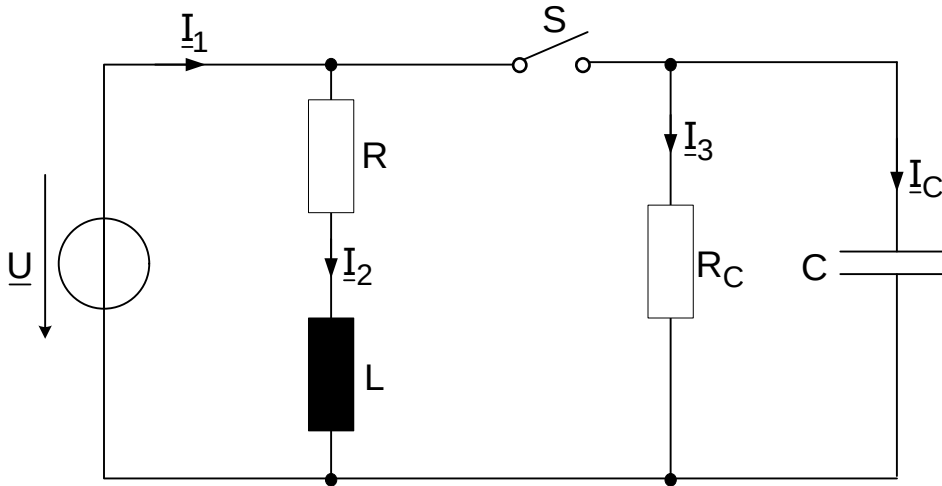


Bild 5 R-L-C Wechselstromschaltung

Fragen:

Der Schalter S sei zunächst offen!

1. Wie groß sind der Strom $\underline{I}_2$ und der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ der Schaltung?
2. Wie groß sind die von der Schaltung aufgenommene komplexe Scheinleistung $\underline{S}$, die Wirkleistung P und die Blindleistung Q ?

Nun werde der Schalter S geschlossen!

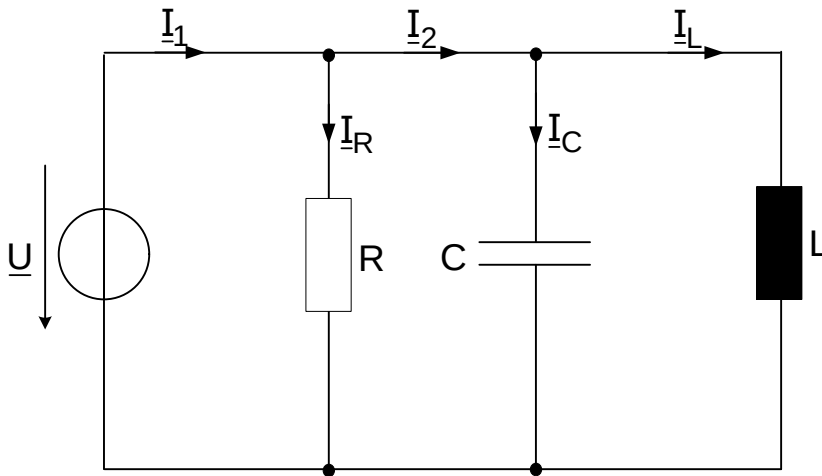
3. Wie groß muss die Kapazität C gewählt werden, damit die Blindleistung der Schaltung vollständig kompensiert wird?

Berechnen Sie für diesen Fall den Kondensatorstrom $\underline{I}_C$ sowie den Netzstrom $\underline{I}_1$.

Zeichnen Sie für den Fall der vollständigen Blindleistungskompensation ein qualitatives Zeigerdiagramm

Aufgabe 6 (Komplexe Rechnung, Schwingkreis)

Gegeben ist das in Bild 6 dargestellte Ersatzschaltbild eines R-L-C-Parallelschwingkreises.



Gegebene Werte:

$U = 100 \text{ V}$, sinusförmig

$R = 5 \text{ } \Omega$

$L = 2,4 \text{ mH}$

$C = 16 \text{ } \mu\text{F}$

Bild 6 Ersatzschaltbild eines RLC-Parallelschwingkreises

Fragen:

1. Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz f_0 .
2. Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_R$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_1$ bei der Resonanzfrequenz?
3. Bestimmen Sie den Betrag des Eingangsleitwertes und den Phasenwinkel als Funktionen der Frequenz f bzw. der Kreisfrequenz ω .

Im Folgenden werde die Schaltung mit der Frequenz $f_1 = 1 \text{ kHz}$ betrieben.

4. Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_R$.
Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Frage 2.
5. Bestimmen Sie den Strom $\underline{I}_1$.
6. Bestimmen Sie die von der gesamten Schaltung aufgenommene komplexe Scheinleistung $\underline{S}$.
Wie wirkt die Schaltung bei der Frequenz f_1 ?

Übung 4

Zeigerdarstellung, Komplexe Rechnung

Aufgabe 1 (Zeigerdiagramm)

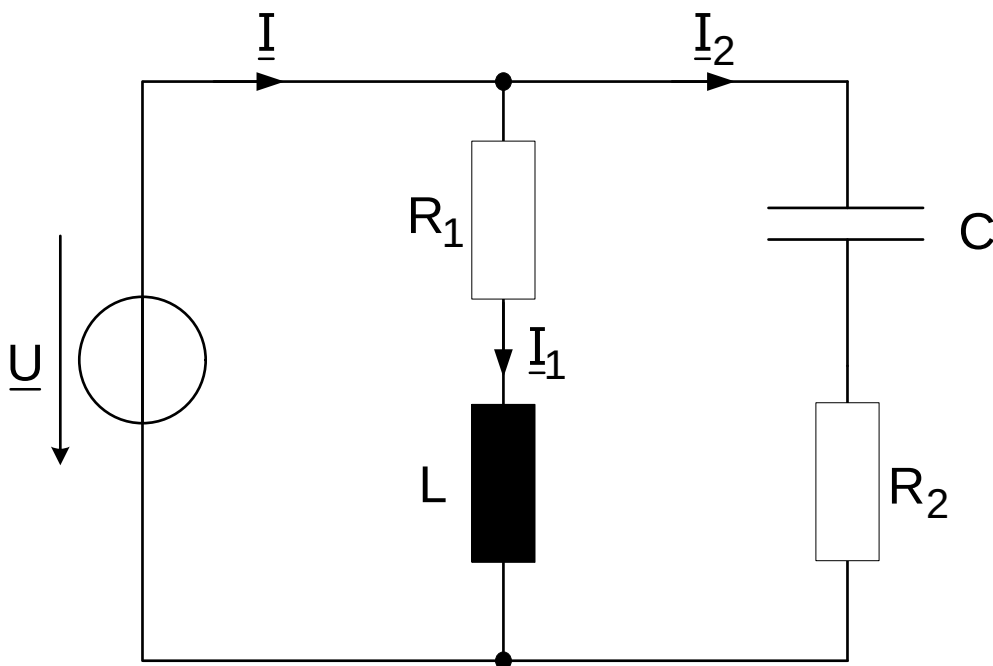


Bild 1 Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen

Gegebene Werte:

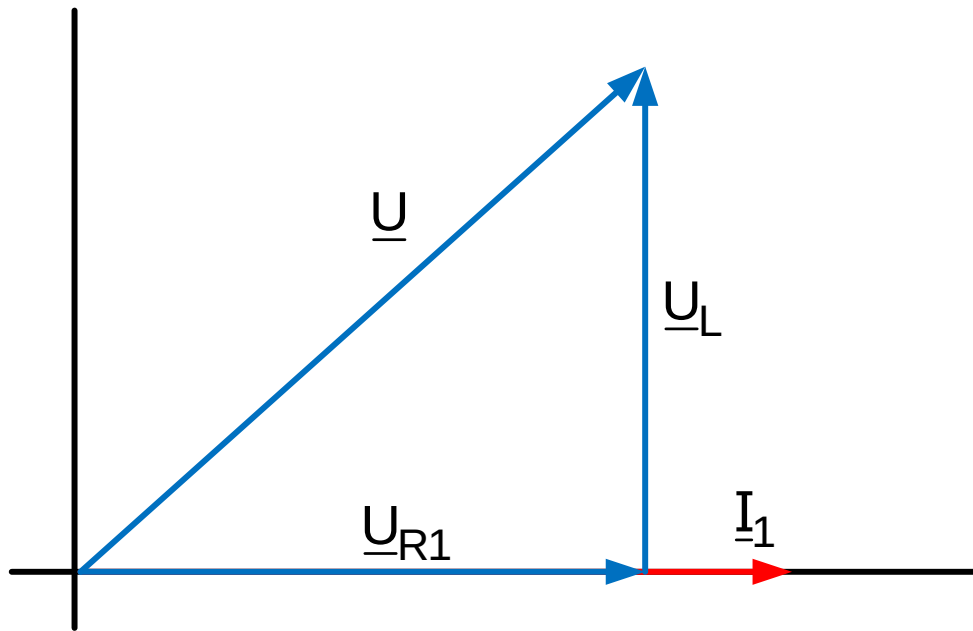
$U = 10 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinus-förmig

$R_1 = 10 \, \Omega$

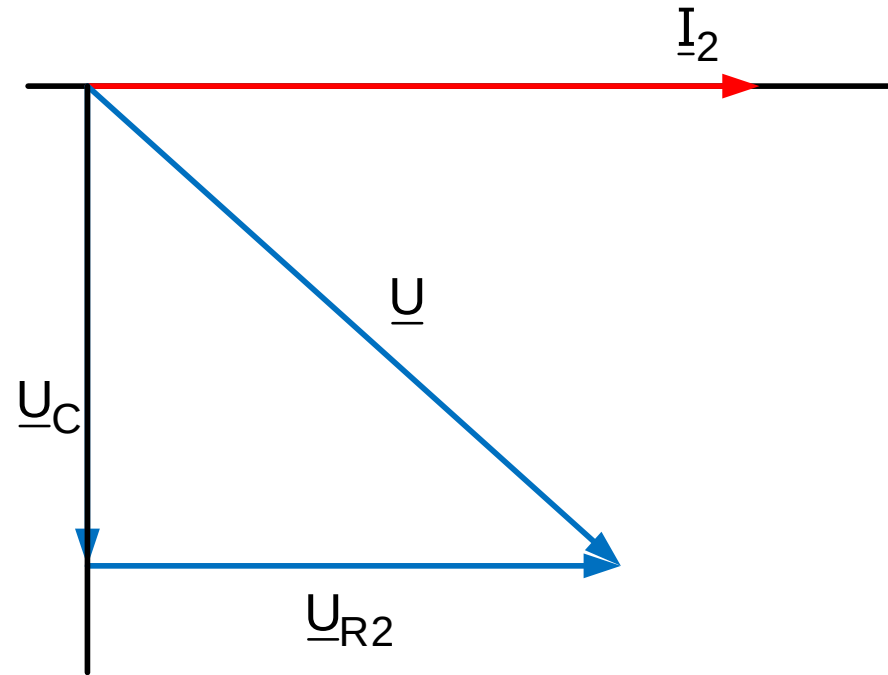
$L = 79,6 \text{ mH}$

$R_2 = 20 \, \Omega$

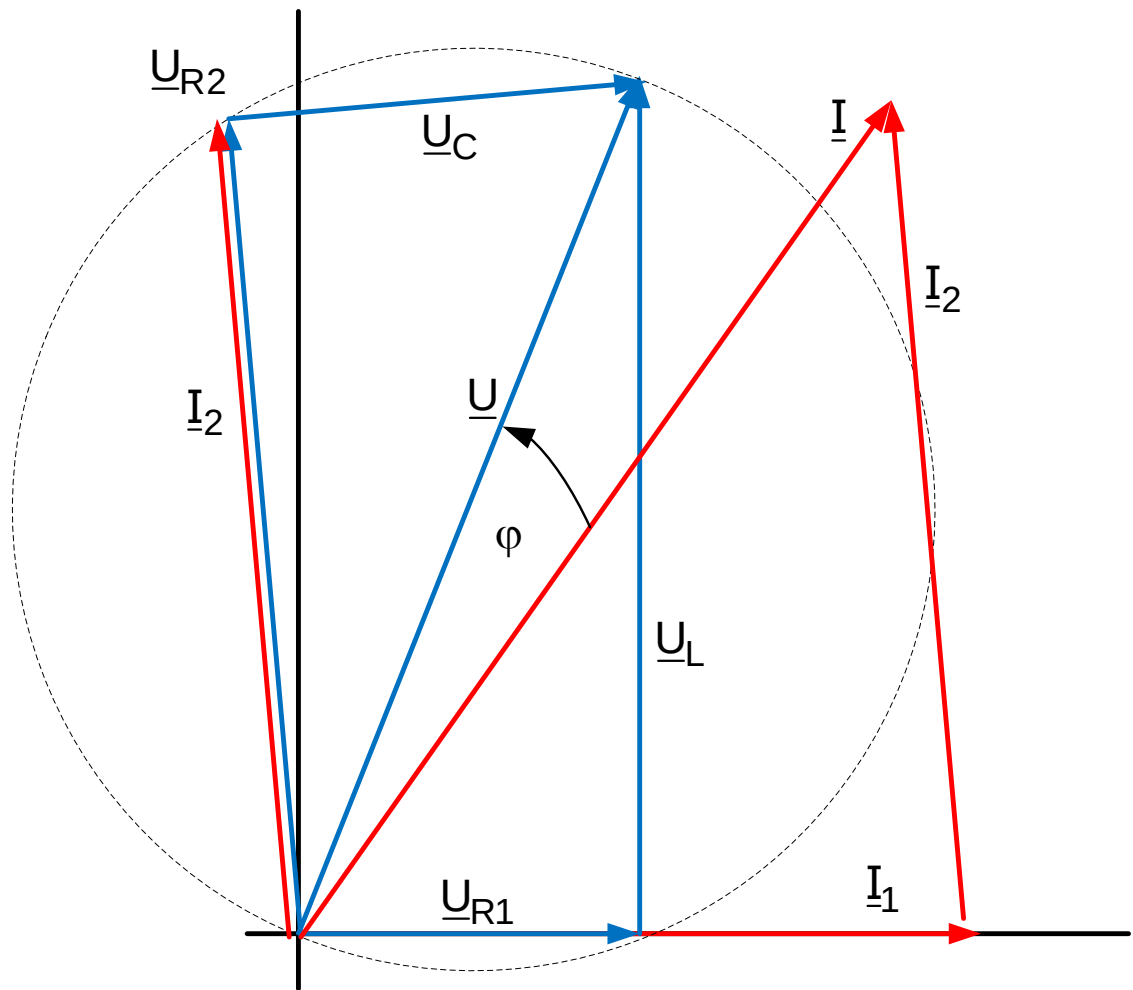
$C = 318 \, \mu\text{F}$



Zweig 1 (links):



Zweig 2 (rechts):



Maßstäbliches Zeigerdiagramm

Aufgabe 2 (Komplexe Rechnung)

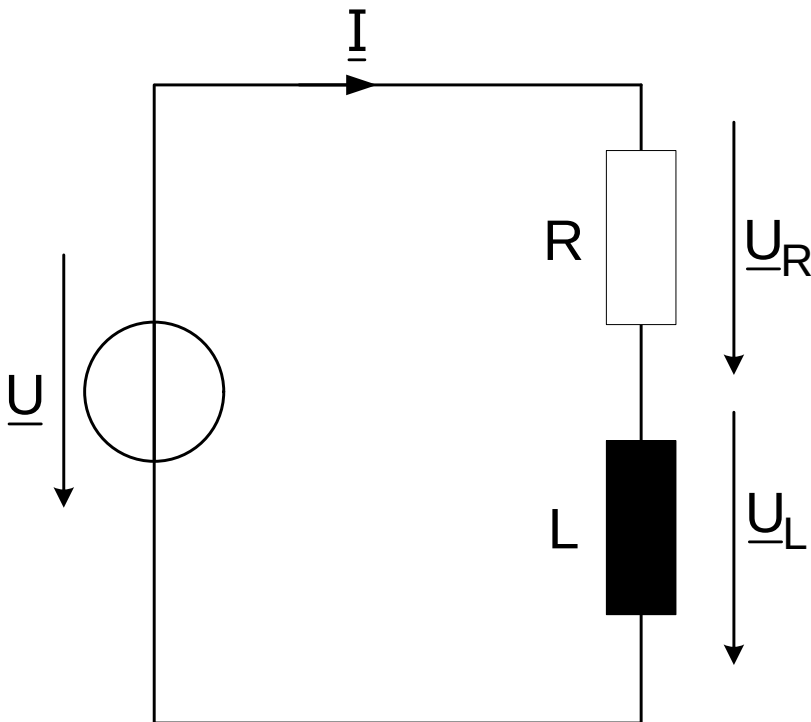
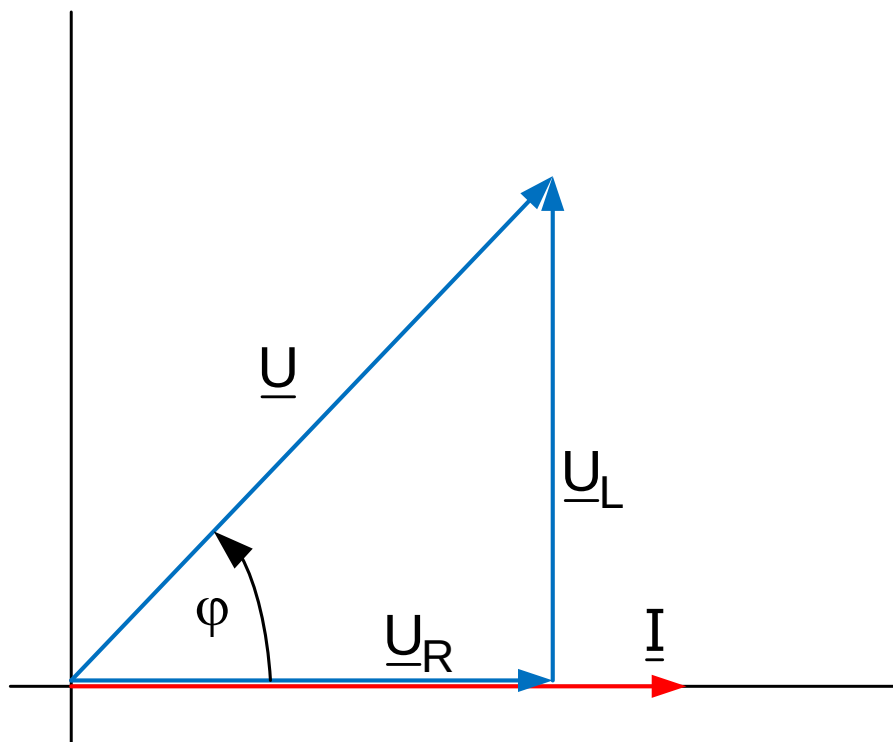


Bild 2 Ersatzschaltbild



Qualitatives Zeigerdiagramm

Aufgabe 3 (Komplexe Rechnung)

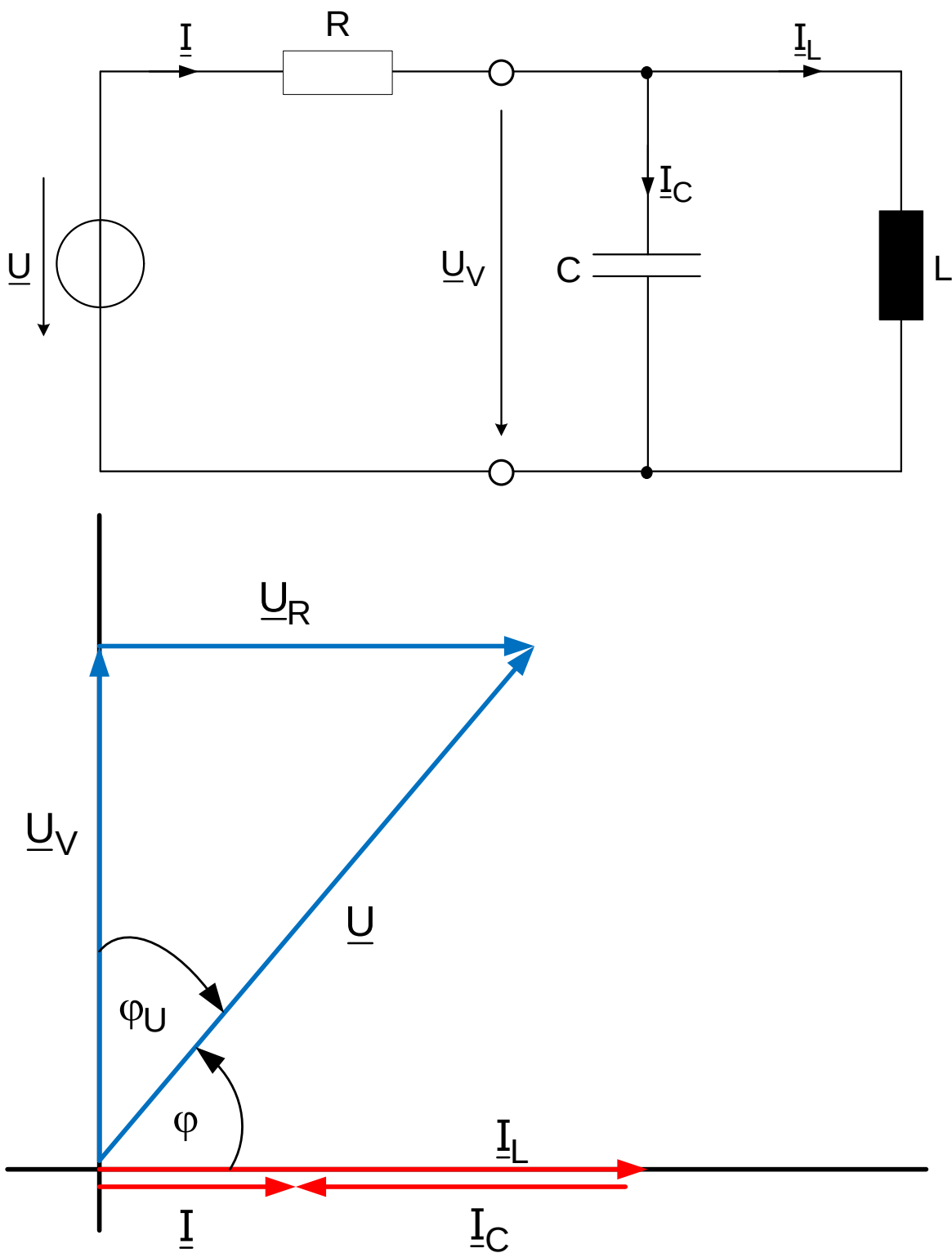


Bild 3 Ersatzschaltbild und qualitatives Zeigerdiagramm

Aufgabe 4 (Komplexe Rechnung)

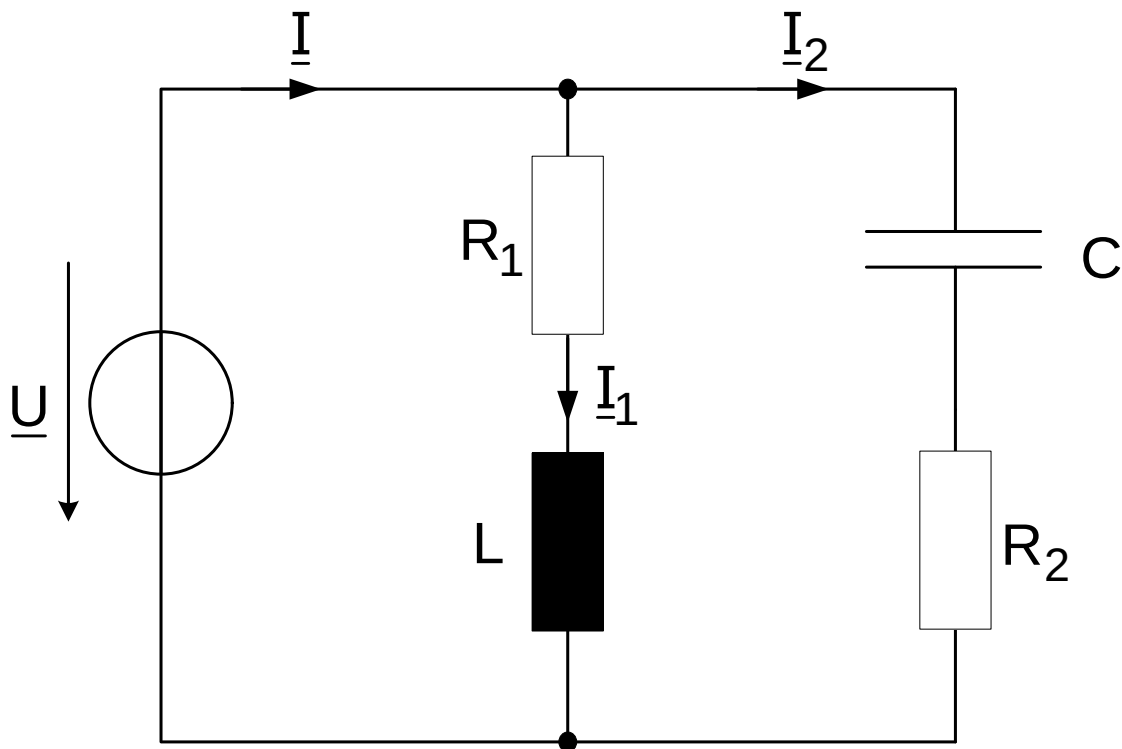


Bild 4 Wechselstromschaltung mit zwei parallelen Zweigen

Gegebene Werte:

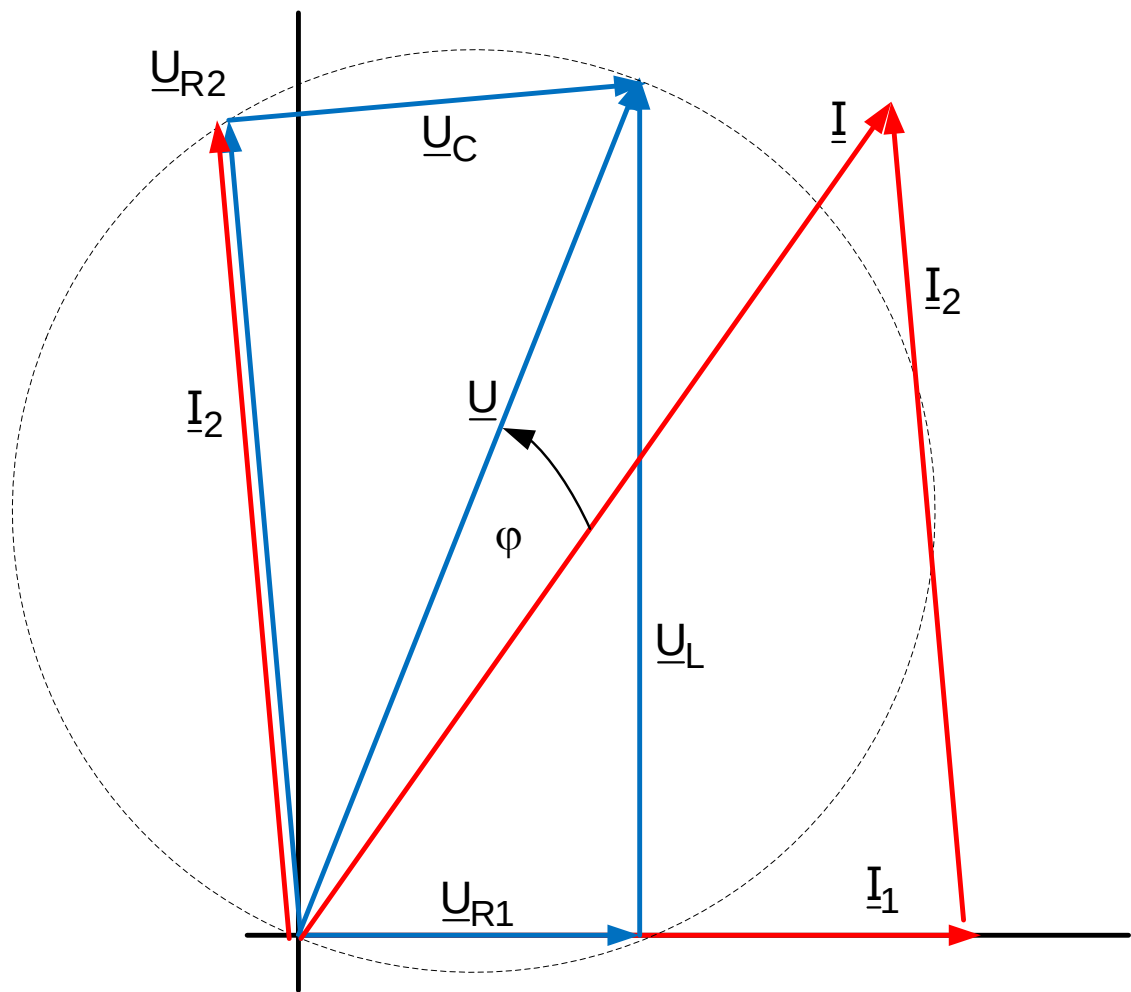
$U = 10 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, sinus-förmig

$R_1 = 10 \text{ } \Omega$

$L = 79,6 \text{ mH}$

$R_2 = 20 \text{ } \Omega$

$C = 318 \text{ } \mu\text{F}$



Maßstäbliches Zeigerdiagramm – siehe Aufgabe 1

Aufgabe 5 (Komplexe Rechnung)

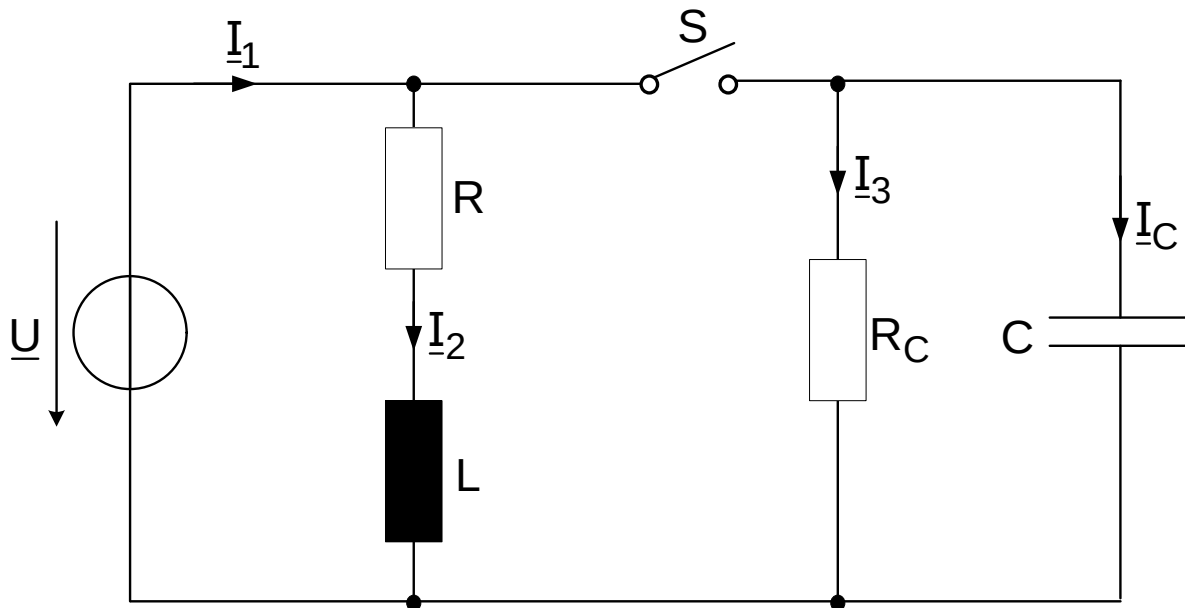
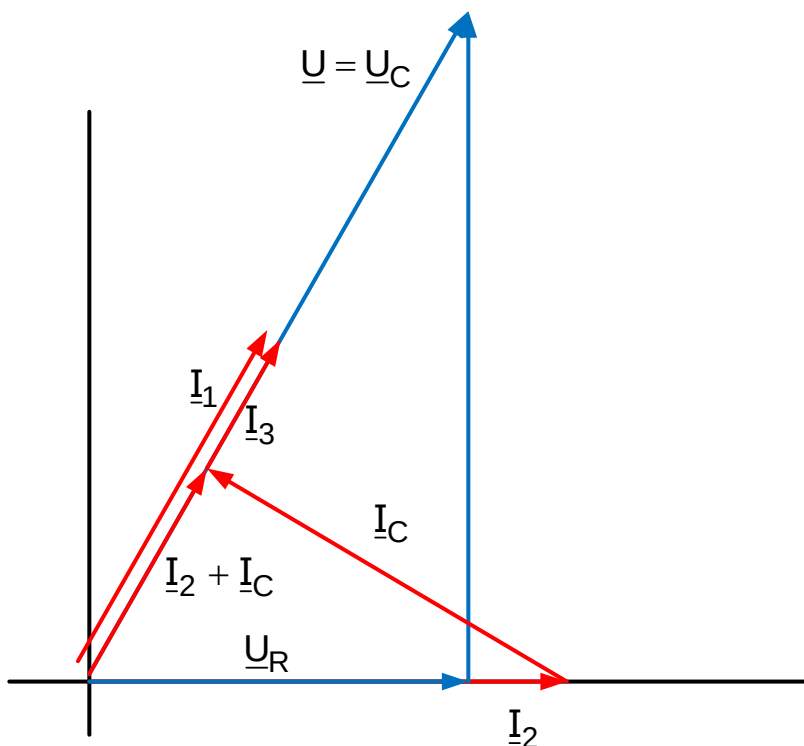


Bild 5 R-L-C Wechselstromschaltung



Zeigerdiagramm für vollständige Blindleistungskompensation

Aufgabe 6 (Komplexe Rechnung, Schwingkreis)

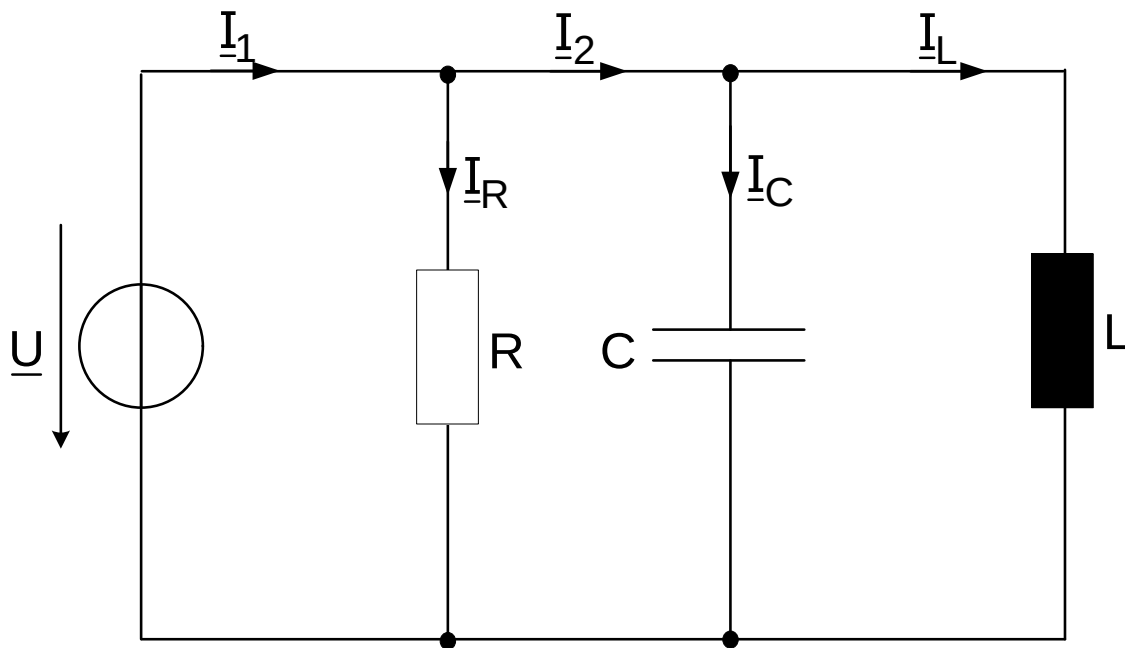


Bild 6 Ersatzschaltbild eines RLC-Parallelschwingkreises

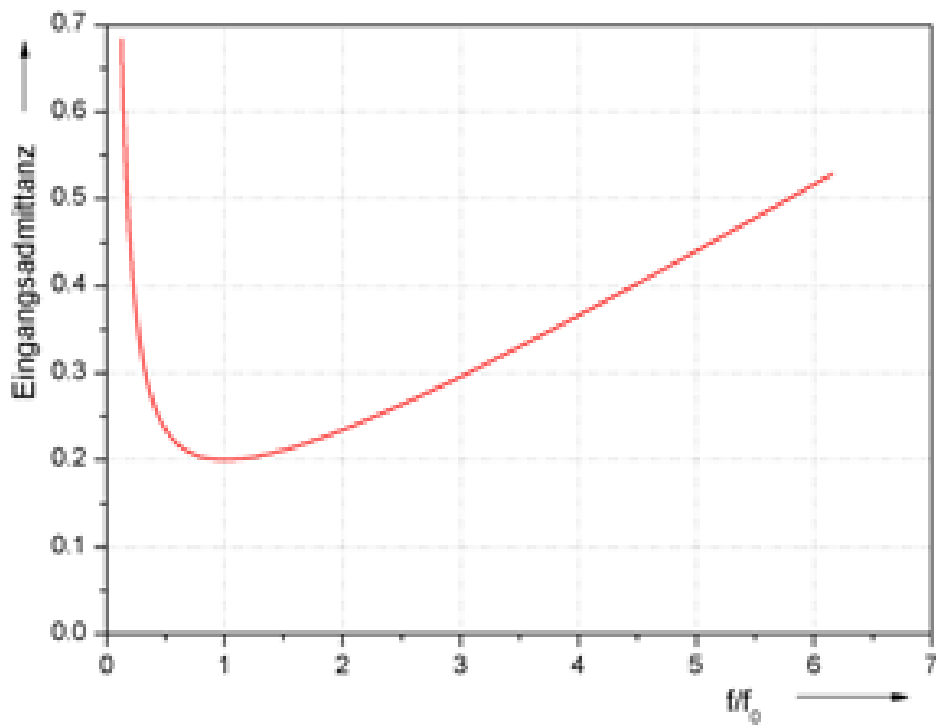
Gegebene Werte:

$U = 100 \text{ V}$, sinusförmig

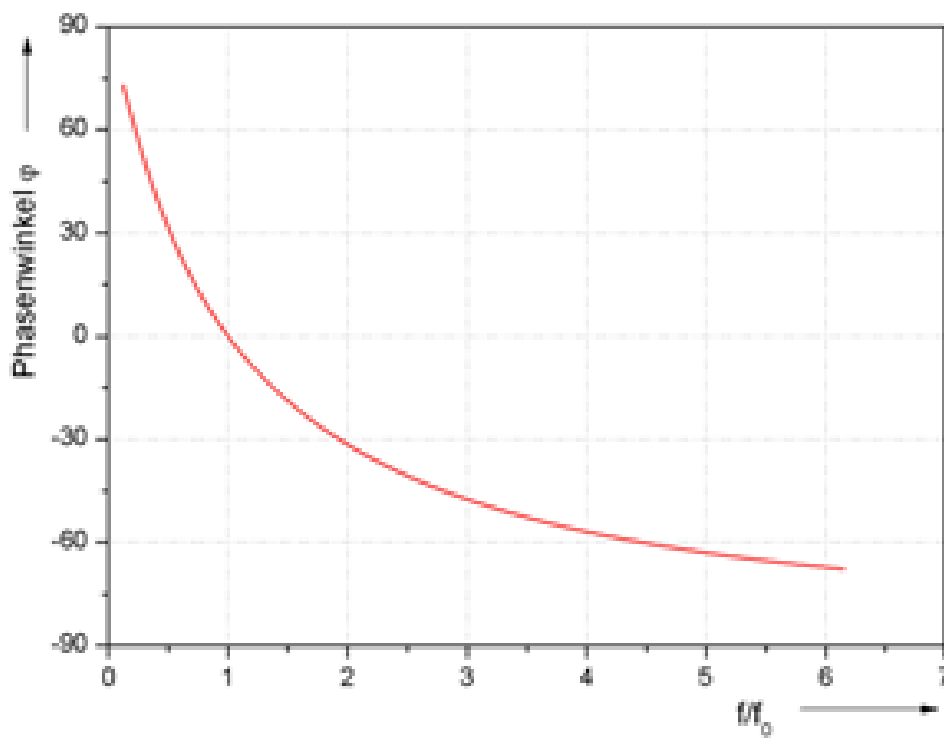
$R = 5 \, \Omega$

$L = 2,4 \text{ mH}$

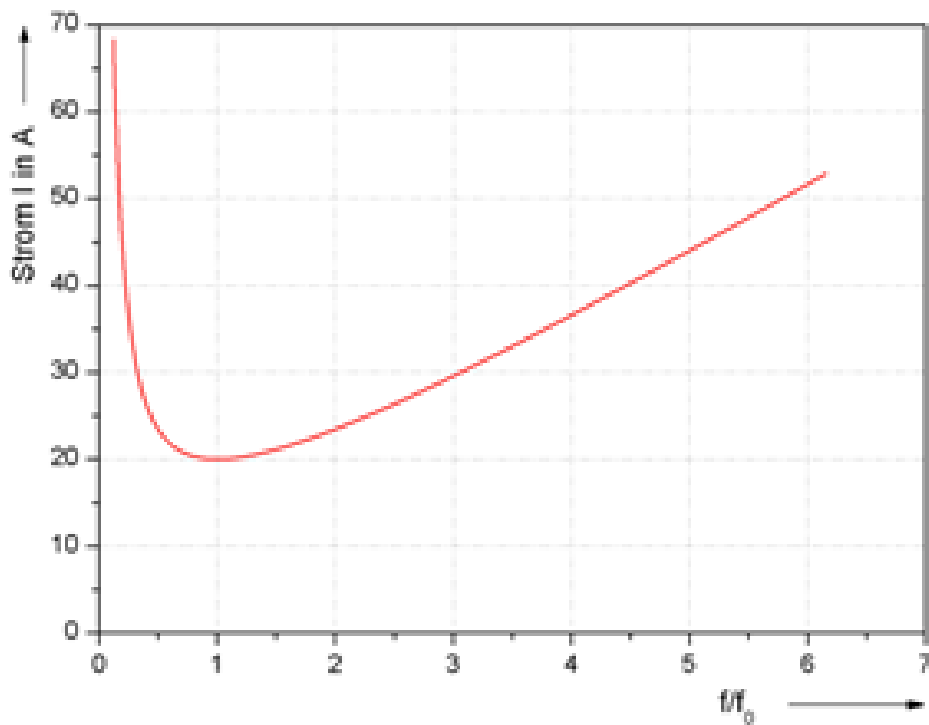
$C = 16 \, \mu\text{F}$



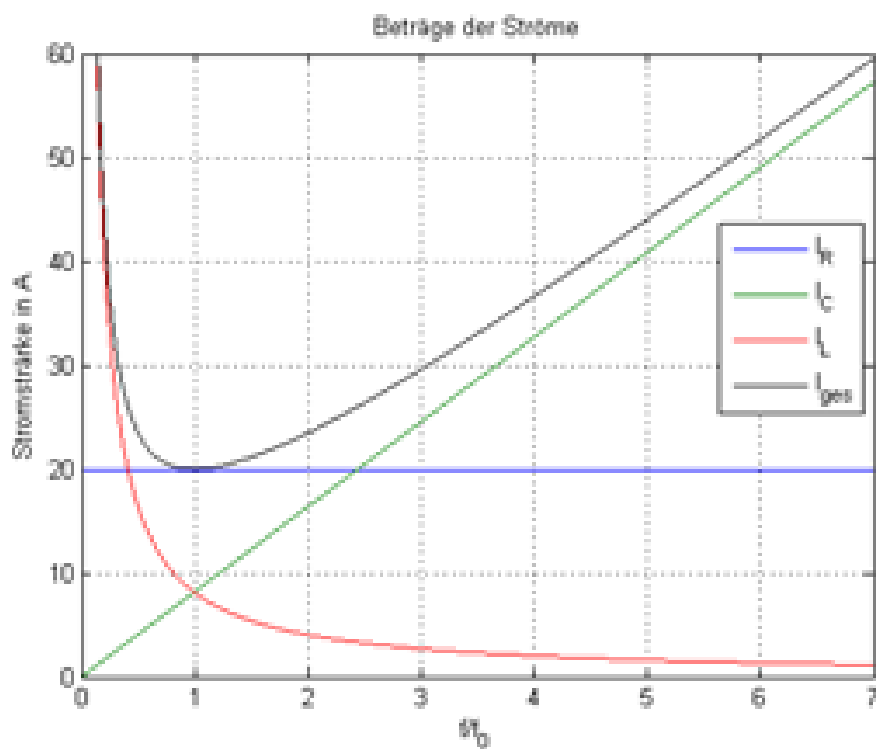
a) Betrag der Eingangsadmittanz



b) Phasenverschiebungswinkel



c) Betrag des Gesamtstromes bei eingprägter Spannung



d) Beträge der Teilströme bei eingprägter Spannung

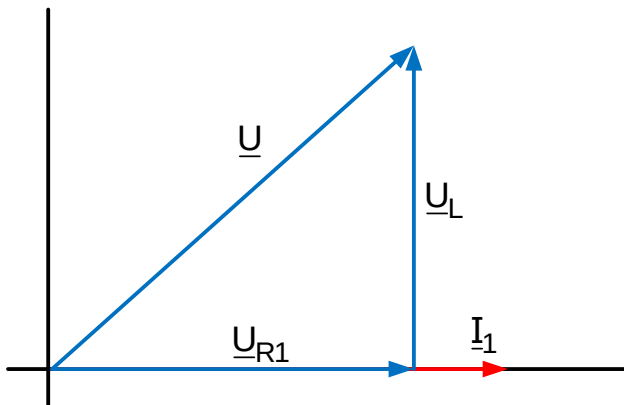


Kurzlösung zur Übung 5

Zeigerdarstellung, Komplexe Rechnung

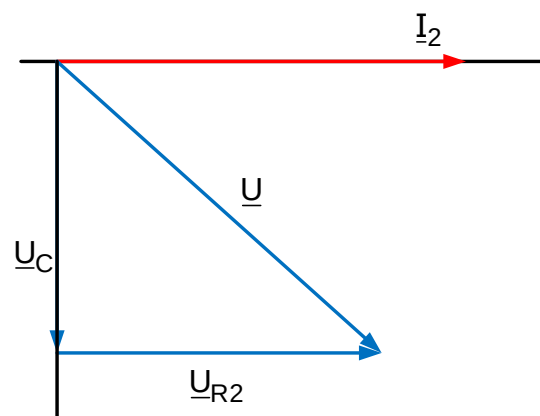
Aufgabe 1 (Zeigerdiagramm)

- $X_L \approx 25 \Omega$ $X_C \approx 10 \Omega$
- Zunächst Zeigerdiagramme (qualitativ) für die beiden Zweige:



Zweig 1 (links):

Daraus ergeben sich die Impedanzen zu:



Zweig 2 (rechts):

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \dots \approx 27 \Omega$$

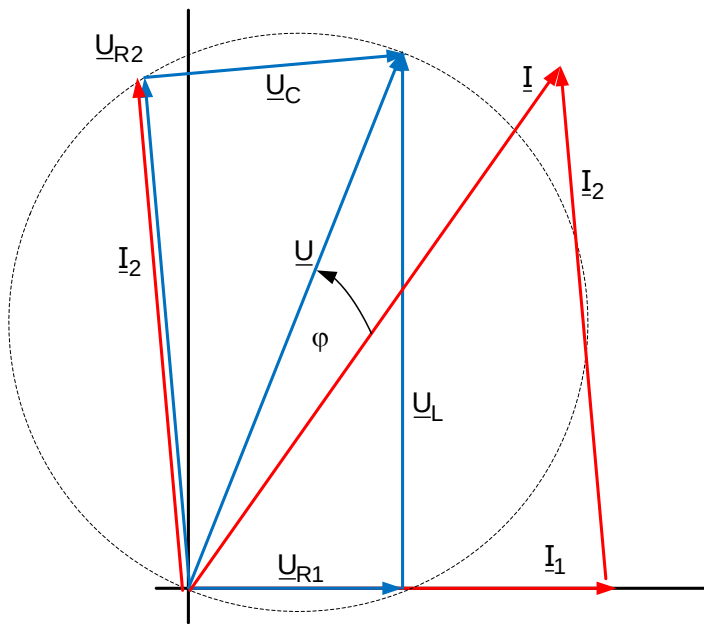
$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \dots \approx 22 \Omega$$

Somit: $I_1 \approx 0,37 \text{ A}$

$I_2 \approx 0,447 \text{ A}$

- $U_{R1} \approx 3,71 \text{ V}$ $U_L \approx 9,28 \text{ V}$ $U_{R2} \approx 8,94 \text{ V}$ $U_C \approx 4,47 \text{ V}$

4. Maßstäbliches Zeigerdiagramm



5. Abgelesen aus dem maßstäblichen Zeigerdiagramm: $\varphi \approx +14,5^\circ$
 Die Schaltung wirkt ohmsch-induktiv.

6. $S \approx 5,5 \text{ VA}$ $P \approx 5,32 \text{ W}$ $Q \approx 1,38 \text{ var}$

Aufgabe 2 (Komplexe Rechnung)

1. $\underline{I} \approx 3,3 \text{ A} \cdot e^{-j72,3^\circ}$ Die Spannung $\underline{U}$ eilt dem Strom $\underline{I}$ um $\varphi = 72,3^\circ$ vor.

2. $\underline{U}_R \approx 66,7 \cdot e^{-j72,3^\circ} \text{ V}$ $\underline{U}_R \approx 20,2 \text{ V} - j \cdot 63,6 \text{ V}$
 $\underline{U}_L \approx 210 \text{ V} \cdot e^{j17,7^\circ}$ $\underline{U}_L \approx 200 \text{ V} + j \cdot 64 \text{ V}$

3. $\underline{S} \approx 734 \text{ VA} \cdot e^{+j72,3^\circ}$ $\underline{S} \approx (223 + j \cdot 699) \text{ VA}$
 $P = \text{Re}(\underline{S}) \approx 223 \text{ W}$ $Q = \text{Im}(\underline{S}) \approx 699 \text{ var}$

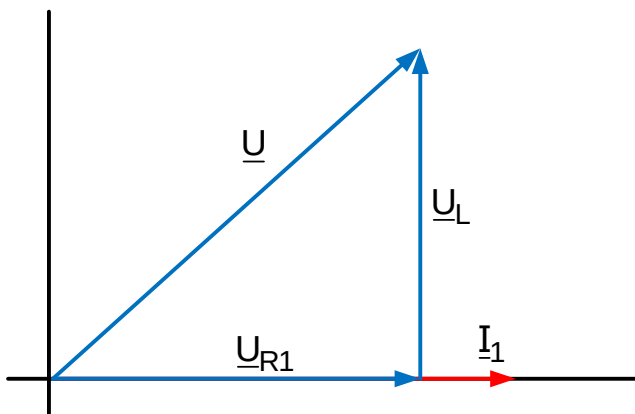
Da $Q > 0$ ist, wirkt die Schaltung ohmsch-induktiv!

Aufgabe 3 (Komplexe Rechnung)

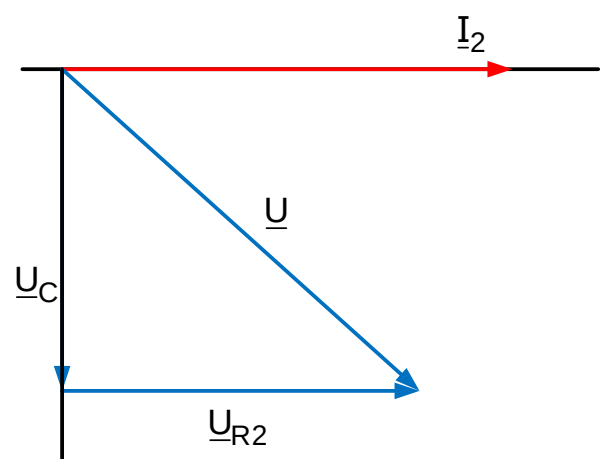
- $\underline{I}_L = -j \cdot 6 \text{ A} = 6 \text{ A} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$ $\underline{I}_C = j \cdot 3 \text{ A} = 3 \text{ A} \cdot e^{+j \cdot 90^\circ}$ $\underline{I} = -j \cdot 3 \text{ A} = 3 \text{ A} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$
 $\underline{U} = (180 - j \cdot 120) \text{ V} \approx 216 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 33,7^\circ}$
- $\underline{S} = (360 + j \cdot 540) \text{ VA}$ $P = 360 \text{ W}$ $Q = 540 \text{ var}$ $\cos(\varphi) \approx 0,555$

Aufgabe 4 (Zeigerdiagramm)

- $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_L \approx 10 \Omega + j \cdot 25 \Omega$ $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_C \approx 20 \Omega - j \cdot 10 \Omega$
- $\underline{I}_1 \approx 371,3 \text{ mA} \cdot e^{-j \cdot 68,2^\circ}$ $\underline{I}_2 \approx 447 \text{ mA} \cdot e^{j \cdot 26,6^\circ}$
 Kartesisch: $\underline{I}_1 \approx (0,14 - j \cdot 0,35) \text{ A}$ $\underline{I}_2 \approx (0,4 + j \cdot 0,2) \text{ A}$
- $\underline{U}_{R1} \approx 3,7 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 68,2^\circ}$ $\underline{U}_L \approx 9,3 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 21,8^\circ}$
 $\underline{U}_{R2} \approx 8,9 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 26,6^\circ}$ $\underline{U}_C \approx 4,5 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 63,4^\circ}$
- Qualitative Zeigerdiagramme für beide Zweige

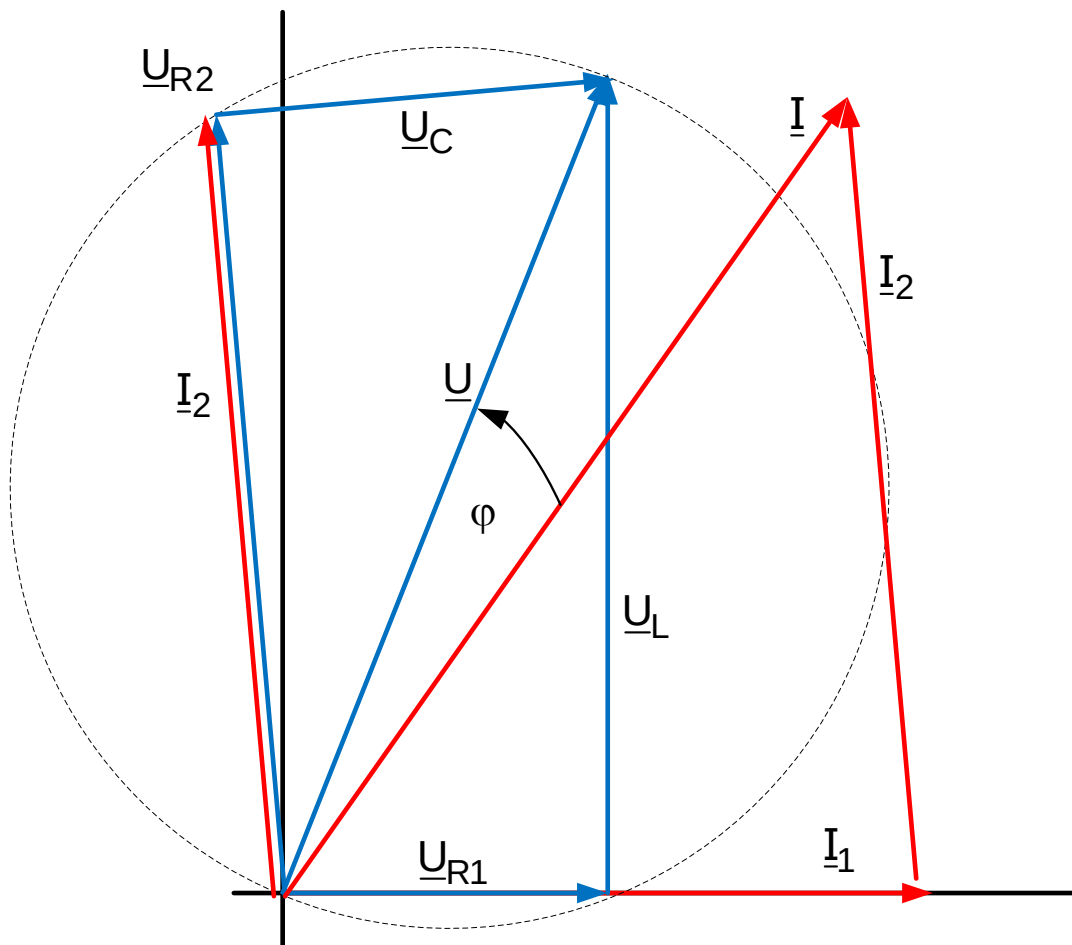


Zweig 1 (links):



Zweig 2 (rechts):

Kombination beider Teilzeigerdiagramme ergibt:



5. $\underline{I} \approx (0,54 - j \cdot 0,15) \text{ A}$ $\varphi \approx +15,1^\circ$ Die Schaltung wirkt ohmsch-induktiv!

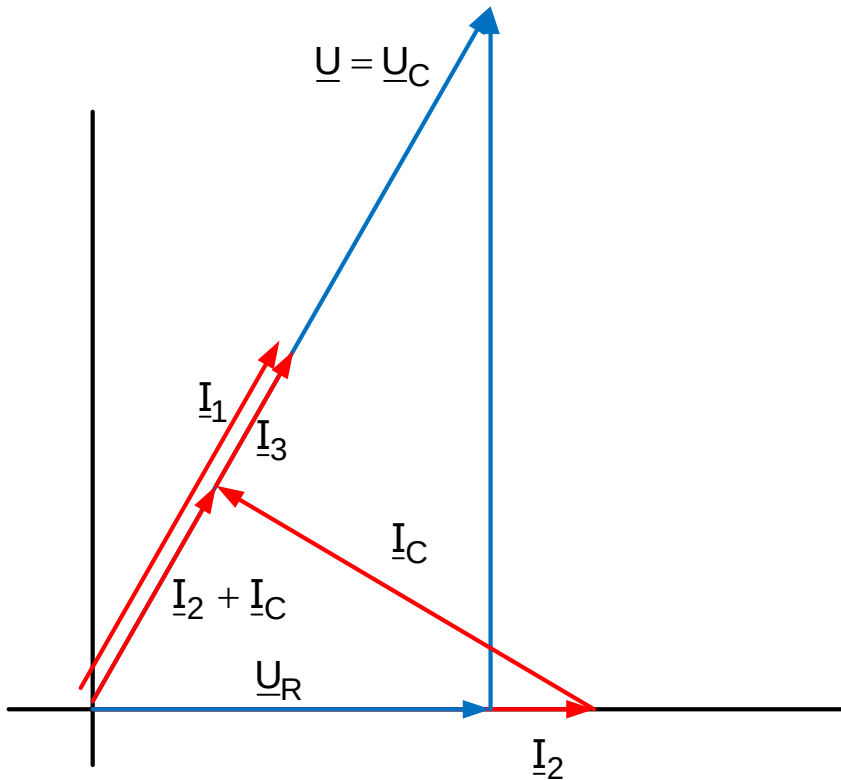
6. $\underline{S} \approx 5,6 \text{ VA} \cdot e^{j \cdot 15^\circ}$ $P \approx 5,4 \text{ W}$ $Q \approx 1,5 \text{ var}$

Aufgabe 5 (Komplexe Rechnung)

$$1. \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \approx (5,6 - j \cdot 8,3) \text{ A} \approx 10 \cdot e^{-j \cdot 55,6^\circ} \text{ A} \quad \cos(\varphi) \approx 0,565$$

$$2. \quad \underline{S} \approx 2298 \text{ VA} \cdot e^{j \cdot 55,6^\circ} \quad P \approx 1298 \text{ W} \quad Q_L \approx 1896 \text{ var}$$

$$3. \quad C \approx 95 \mu\text{F} \quad \underline{I}_C \approx j \cdot 8,3 \text{ A} \quad \underline{I}_3 = 0,5 \text{ A} \quad \underline{I}_1 \approx 6,1 \text{ A}$$



Aufgabe 6 (Komplexe Rechnung, Schwingkreis)

$$1. \quad f_0 \approx 812 \text{ Hz}$$

$$2. \quad \underline{I}_R = 20 \text{ A} \quad \underline{I}_C \approx j \cdot 8,2 \text{ A} \quad \underline{I}_L \approx -j \cdot 8,2 \text{ A} \quad \underline{I}_1 = 20 \text{ A} \quad \underline{I}_2 = 0 \text{ A}$$

$$3. \quad Y = |\underline{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2} \quad \varphi = +\arctan\left(R \cdot \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right)$$

$$4. \quad \underline{I}_R = 20 \text{ A} \quad \underline{I}_C \approx j \cdot 10 \text{ A} \quad \underline{I}_L \approx -j \cdot 6,6 \text{ A} \quad \underline{I}_2 \approx j \cdot 3,4 \text{ A}$$

$$(X_L = \omega \cdot L \approx 15 \, \Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \approx 10 \, \Omega)$$

5. $\underline{I}_1 \approx (20 + j \cdot 3,4) \, \text{A}$

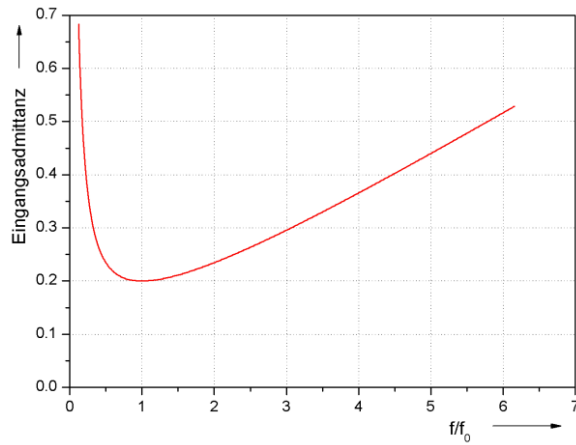
6. $\underline{S} \approx (2000 - j \cdot 342) \, \text{VA}$ $P = \text{Re}\{\underline{S}\} = 2000 \, \text{W}$ $Q = \text{Im}\{\underline{S}\} \approx -342 \, \text{var}$

Da $Q < 0$ ist, wirkt die Schaltung ohmsch-kapazitiv!

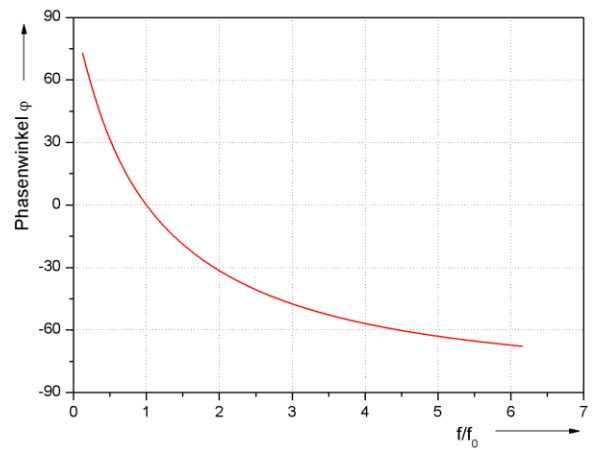
Zu 3. Für Interessierte: Grenzpunkte der Funktionen $Y(\omega)$ und $\varphi(\omega)$:

Frequenz ω	0	Resonanz: $\omega = \omega_0$	∞
Y	∞	$1/R$	∞
φ	$\pi / 2$	0	$-\pi / 2$

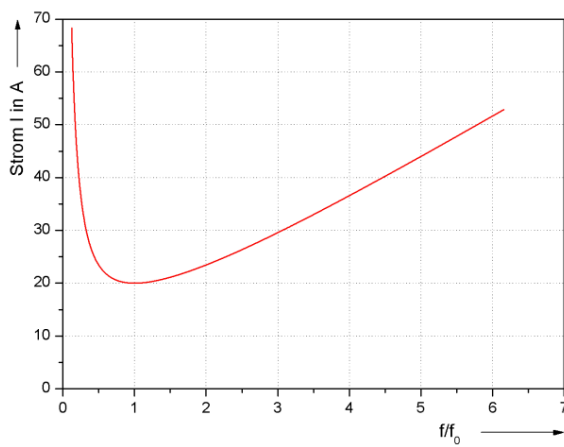
Die folgenden Bilder zeigen den Verlauf des Eingangsleitwertes und des Phasenverschiebungswinkels als Funktion der Frequenz:



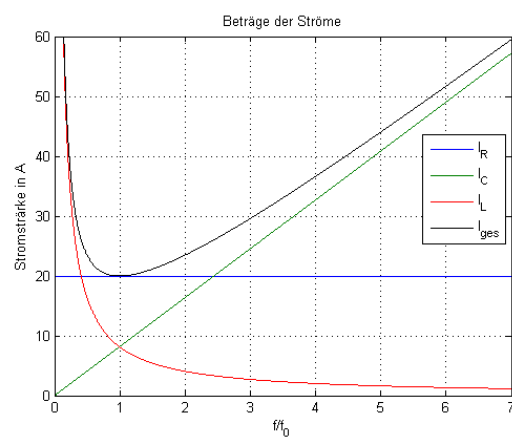
a) Eingangsadmittanz (Betrag)



b) Phasenverschiebungswinkel



c) Strom $|I_1|$ (eingeprägte Spannung)



d) Teilströme (eingeprägte Spannung, d.h. $U = \text{const.}$)

Übung 5

Wechselstrom, Komplexe Rechnung

Aufgabe 1 (Grundgesetze, Netzwerkanalyse, Wechselstrom)

In Bild 1 ist eine an sinusförmiger Wechselspannung betriebene Schaltung (Brückenschaltung) für Messzwecke dargestellt.

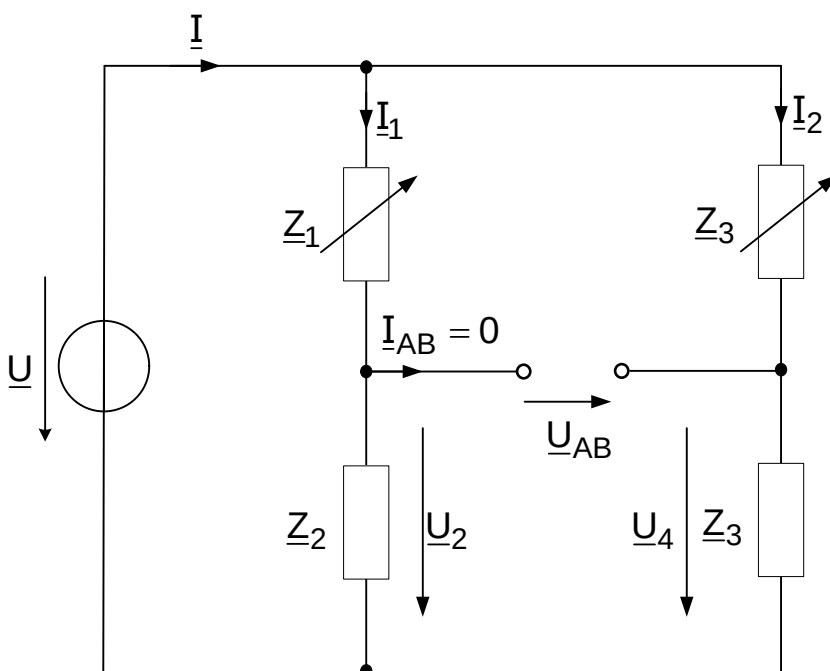


Bild 1 Brückenschaltung für Messzwecke

Durch Verändern der in Bild 1 allgemein dargestellten Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_3$ kann die unbekannte Impedanz $\underline{Z}_4$ bestimmt werden, indem die Spannung $\underline{U}_{AB}$ im Brückenzweig A-B zu Null gebracht wird.

In einem ersten Schritt soll die Bedingung für $\underline{U}_{AB} = 0 \text{ V}$ (Abgleichbedingung) anhand der Schaltung in Bild 1 hergeleitet werden. In einem zweiten Schritt soll anhand der Schaltung in Bild 2 die Messung eines unbekannten realen (verlustbehafteten) Kondensators (im elektrischen Ersatzschaltbild in Bild 2 als Reihenschaltung des Widerstandes R_x und der Kapazität C_x dargestellt) untersucht werden.

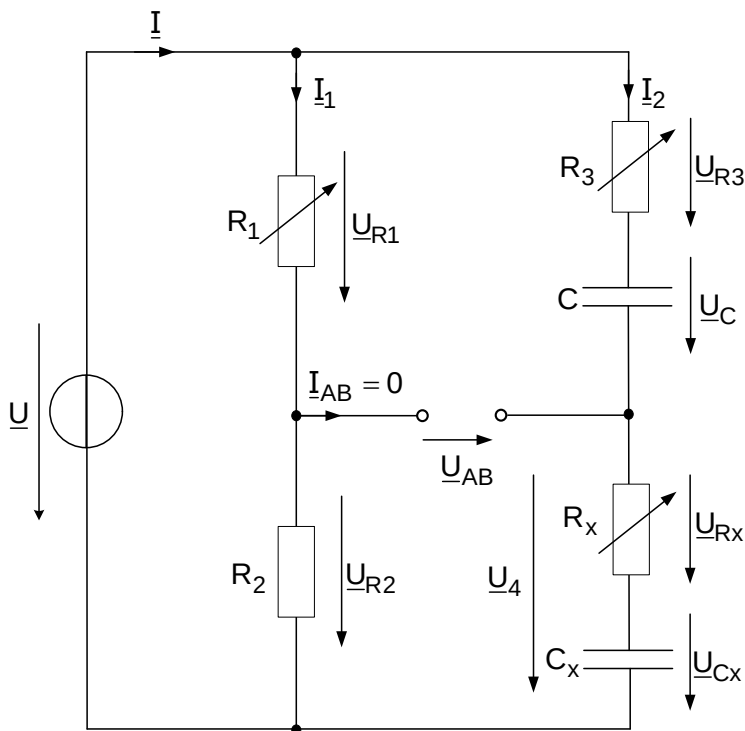


Bild 2

Brückenschaltung zur Messung der unbekannten Kapazität C_x und des unbekannten Widerstandes R_x eines realen Kondensators

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

Eingangsspannung: $\underline{U} = 25 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$

Frequenz: $f = 50 \text{ Hz}$

Widerstand: $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$

Kapazität: $C = 1 \mu\text{F}$

Im Brückenweig A-B fließt kein Strom, d.h. es gilt stets $I_{AB} = 0 \text{ A}$.

Fragen:

Zunächst wird die Schaltung in Bild 1 betrachtet.

1. Ströme, Spannungen, Abgleichbedingung

Berechnen Sie die beiden Zweigströme I_1 und I_2 , sowie die Spannungen $\underline{U}_2$, $\underline{U}_4$ und $\underline{U}_{AB}$ jeweils allgemein in Abhängigkeit von $\underline{U}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$.

Geben Sie in Abhängigkeit von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ die Bedingung an, unter der die Spannung $\underline{U}_{AB}$ im Brückenweig gleich Null wird (Abgleichbedingung).

Im Folgenden wird die Schaltung in Bild 2 betrachtet.

2. Zeigerdiagramm

Zeichnen Sie ein qualitatives Zeigerdiagramm für den Fall der nicht abgeglichenen Brücke, d.h. für $\underline{U}_{AB} \neq 0 \text{ V}$, welches alle in Bild 2 durch Zählpfeile und Bezeichner eingetragene Ströme und Spannungen enthält.

3. Bestimmung der Ersatzschaltbildgrößen des unbekannten Kondensators (R_x und C_x)

Bestimmen Sie die beiden Beziehungen, mit welchen der unbekannte Widerstand R_x und die unbekannte Kapazität C_x aus den gegebenen Größen R_1 , R_2 , R_3 und C berechnet werden können.

Wie groß sind R_x und C_x , wenn die Brücke bei $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ und $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ abgeglichen ist, d.h. $\underline{U}_{AB} = 0 \text{ V}$?

4. Spannung $\underline{U}_{AB}$ im Brückenweig

Bei den Werten $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_x = 1,5 \text{ k}\Omega$ und $C_x = 0,5 \mu\text{F}$ betragen die Ströme $\underline{I}_1 = 5 \text{ mA} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$ und $\underline{I}_2 = 2,37 \text{ mA} \cdot e^{j \cdot 64,77^\circ}$.

Zeigen Sie, dass die Brücke bei diesen Einstellungen von R_1 und R_3 nicht abgeglichen ist.

Übung 5

Wechselstrom, Komplexe Rechnung

Aufgabe 1 (Grundgesetze, Netzwerkanalyse, Wechselstrom)

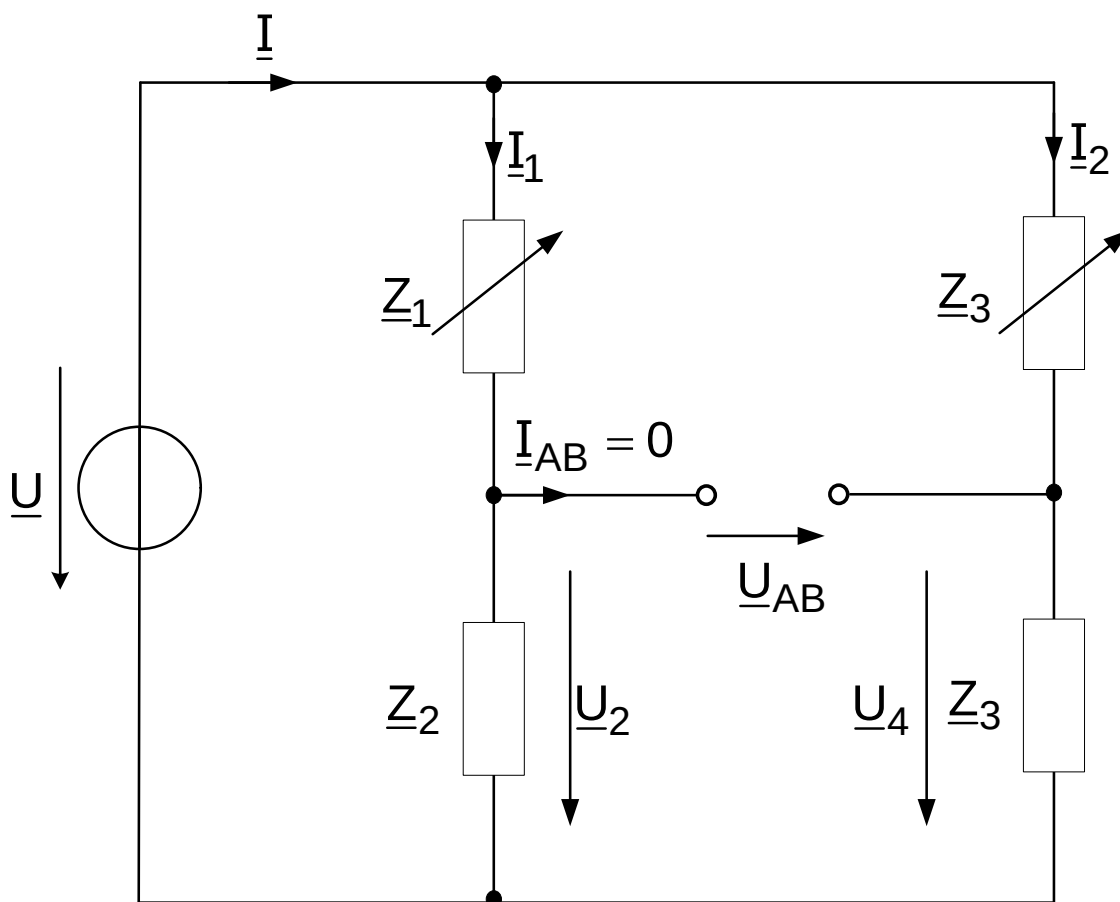


Bild 1 Brückenschaltung für Messzwecke

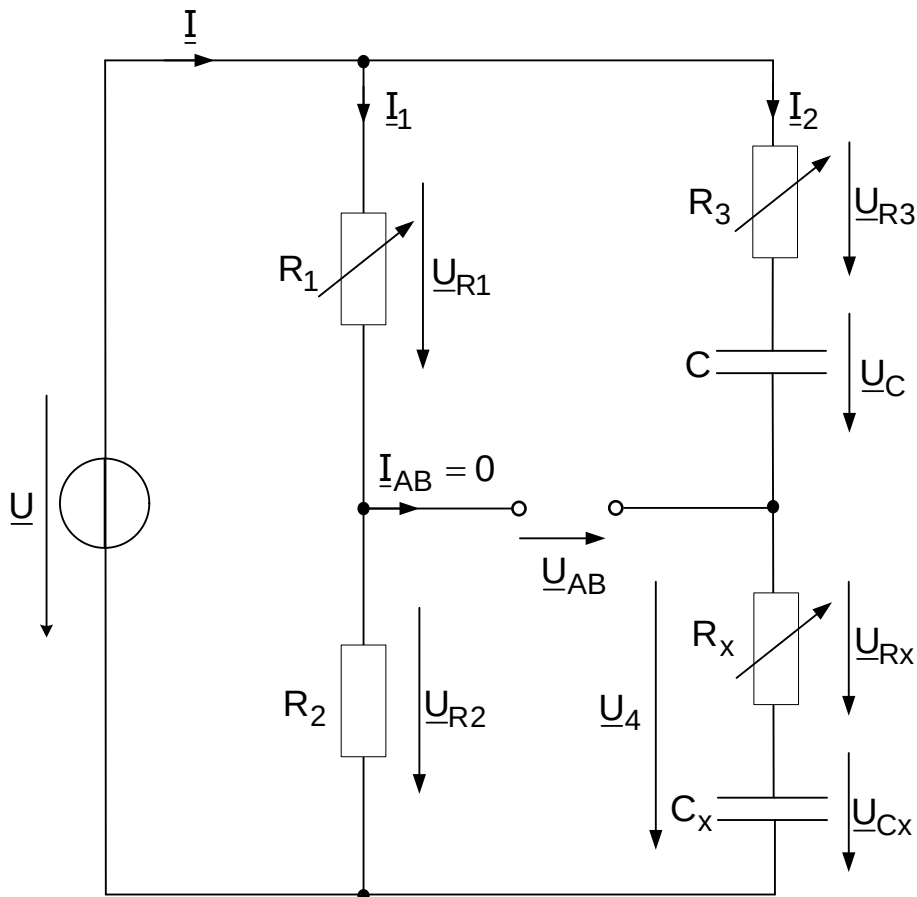


Bild 2 Brückenschaltung zur Messung der unbekannten Kapazität C_x und des unbekannten Widerstandes R_x eines realen Kondensators

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

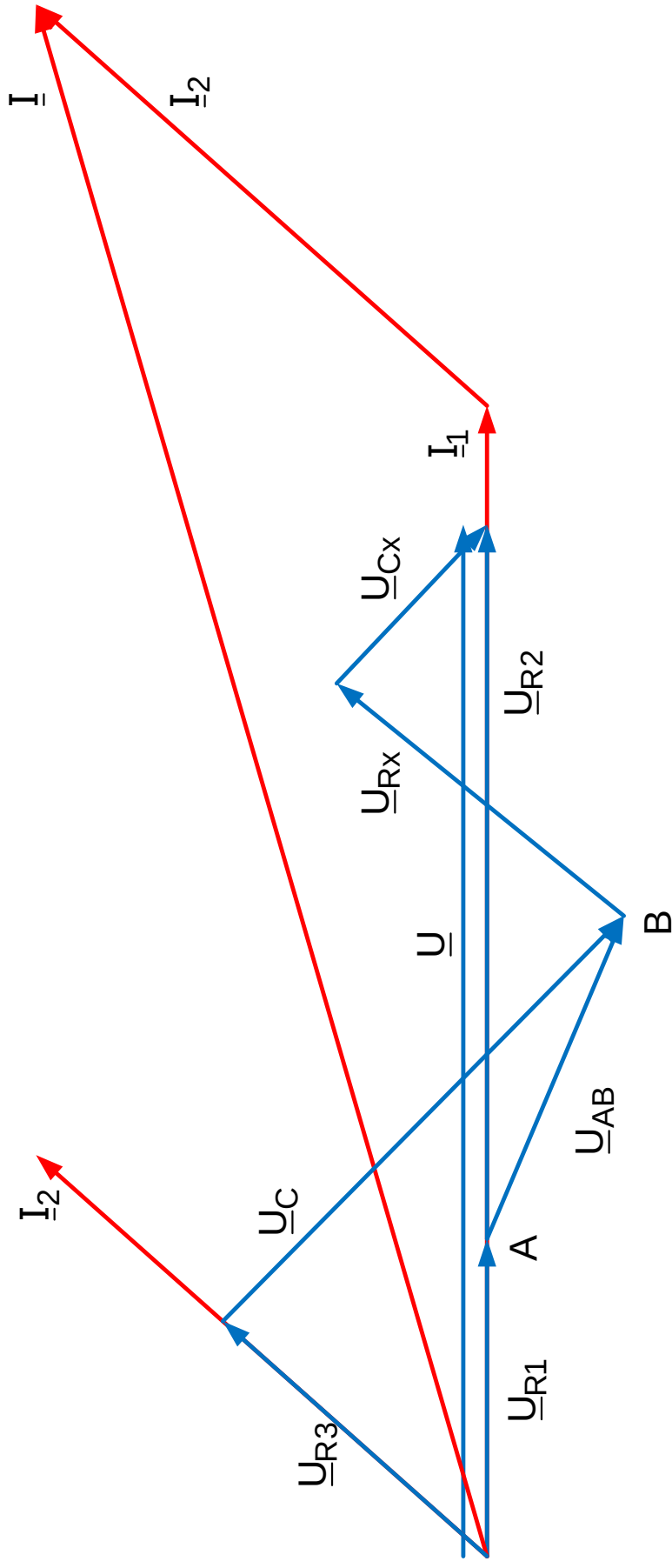
Eingangsspannung: $\underline{U} = 25 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$

Frequenz: $f = 50 \text{ Hz}$

Widerstand: $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$

Kapazität: $C = 1 \mu\text{F}$

Im Brückenzweig A-B fließt kein Strom, d.h. es gilt stets $\underline{I}_{AB} = 0 \text{ A}$.



Mögliches Zeigerdiagramm für nicht abgegliche Brücke

Kurzlösung zur Übung 5

Wechselstrom, Komplexe Rechnung

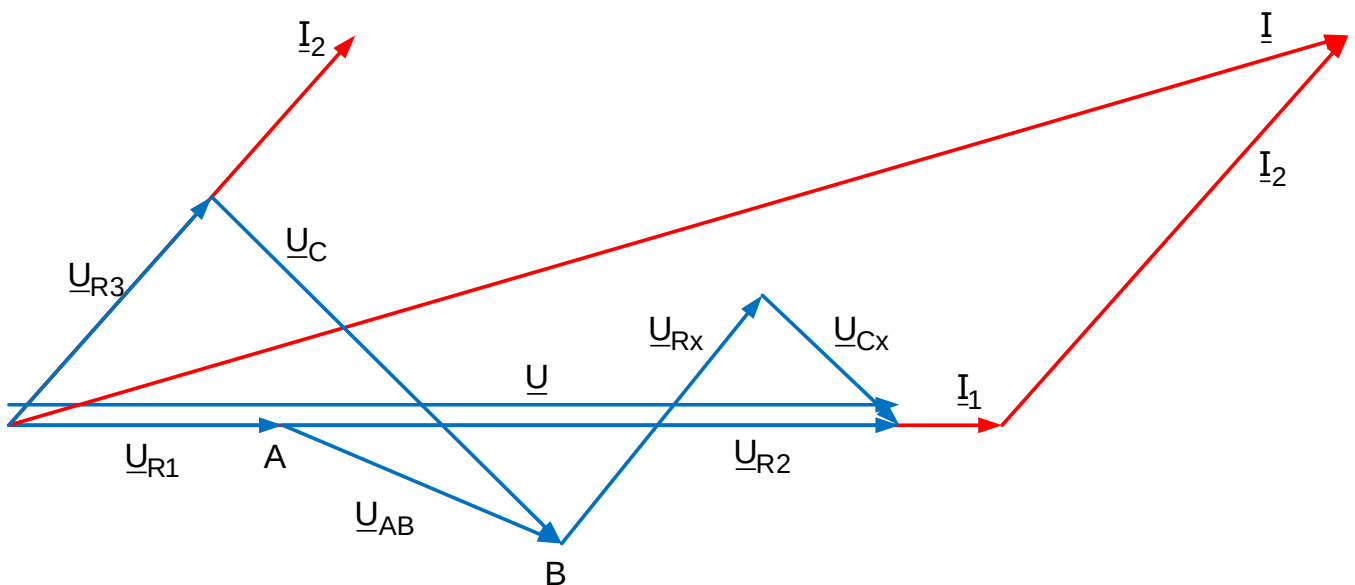
Aufgabe 1 (Grundgesetze, Netzwerkanalyse, Wechselstrom)

1. Ströme, Spannungen, Abgleichbedingung

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \quad \underline{U}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \underline{U}_4 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U} \cdot \left[\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right] \quad \underline{U}_{AB} = 0 \Leftrightarrow \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

2. Zeigerdiagramm



Mögliches Zeigerdiagramm für die nicht abgegliche Brücke

3. Bestimmung der Ersatzschaltbildgrößen des unbekannten Kondensators (R_x und C_x)

$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = 1,5 \text{ k}\Omega \quad C_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot C = \frac{2}{3} \mu\text{F}$$

4. Spannung $\underline{U}_{AB}$ im Brückenweig

$$\underline{U}_{AB} \approx (-0,164 + j \cdot 3,215) \text{ V} \neq 0 \text{ V}$$

Da $\underline{U}_{AB}$ nicht Null ist, ist die Brücke nicht abgeglichen.

Schneller direkt durch Vergleich mit Ergebnis aus 3.

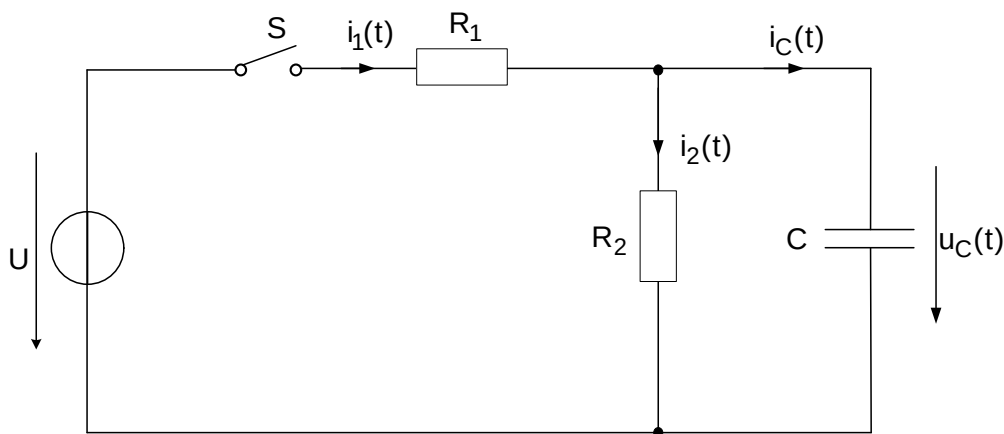
$$C_x = 0,5 \mu\text{F} \neq \frac{R_1}{R_2} \cdot C \approx 0,667 \mu\text{F}.$$

Übung 6

Einschwingvorgänge

Aufgabe 1 (Einschwingvorgänge bei einem Kondensator)

Im nachfolgenden Bild 1 ist eine Schaltung gegeben, in welcher ein Kondensator C mit dem Ladewiderstand R_1 und dem Entladewiderstand R_2 über einen idealen Schalter S an eine ideale Gleichspannungsquelle U angeschlossen ist.



Gegebene Werte:

$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 90 \, \Omega$$

$$U = 5 \, \text{V}$$

$$C = 1 \, \text{mF}$$

Bild 1 Schaltung zum Laden und Entladen eines Kondensators

Aufgabe 1.1: Einschaltvorgang

Der Kondensator war vor dem Einschaltzeitpunkt vollständig entladen und der Schalter S geöffnet. Zum Zeitpunkt $t = 0 \, \text{s}$ wird nun der Schalter S geschlossen.

Fragen:

1. Welche Größe im System ist energie kennzeichnend und kann bzw. darf daher nicht springen?
2. Geben Sie die Grundgesetze für die Bauelemente R_1 , R_2 und C im Zeitbereich an.
3. Geben Sie die für den Einschwingvorgang geltende Differentialgleichung (DGL) für $u_C(t)$ an.

4. Lösen Sie die DGL und geben Sie die Funktion der Spannung $u_c(t)$ sowie die der Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ an.
5. Welchen Wert erreicht $u_c(t)$ für $t \rightarrow \infty$?
Nach welcher Zeit werden 99,9% dieses Wertes erreicht?
6. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von $u_c(t)$, $i_1(t)$ und $i_2(t)$ im Bereich $0 \leq t \leq 100 \text{ ms}$.

Aufgabe 1.2: Ausschaltvorgang

Der in der vorigen Teilaufgabe behandelte Einschaltvorgang kann als abgeschlossen und das System folglich als vollständig eingeschwungen betrachtet werden.

Nun wird zu einem Zeitpunkt $t_1 = 100 \text{ ms}$ der Schalter S geöffnet.

Fragen:

7. Welche Bauelemente sind für den Ausschaltvorgang nach dem Öffnen des Schalters S relevant?
Welche Spannung liegt am Kondensator unmittelbar vor dem Öffnen des Schalters an?
8. Geben Sie die Grundgesetze für die Bauelemente R_2 und C im Zeitbereich an.
9. Geben Sie die für den Ausschaltvorgang geltende DGL für $u_c(t)$ an.
10. Nehmen Sie $u_{C,\text{hom}}(t) = k \cdot e^{\frac{(t-t_1)}{\tau_2}}$ als allgemeinen Lösungsansatz für die homogene Lösung der DGL an und lösen Sie die DGL.
Wie groß ist die Zeitkonstante τ_2 ?
Wie groß wird die Spannung am Kondensator für $t \rightarrow \infty$?
11. Geben Sie die Funktionen der Spannung $u_c(t)$ und des Strom $i_2(t)$ an und ergänzen Sie das Schaubild aus Frage 6 für den Bereich $100 \text{ ms} \leq t \leq 1 \text{ s}$.

Aufgabe 2 (Einschaltvorgang an einem R-L-Glied)

Im nachfolgenden Bild 2 ist ein einfaches Gleichstromnetzwerk gegeben, an dessen zugänglichen Klemmen A-B zum Zeitpunkt $t = 0$ über den Schalter S ein R-L-Glied zugeschaltet wird.

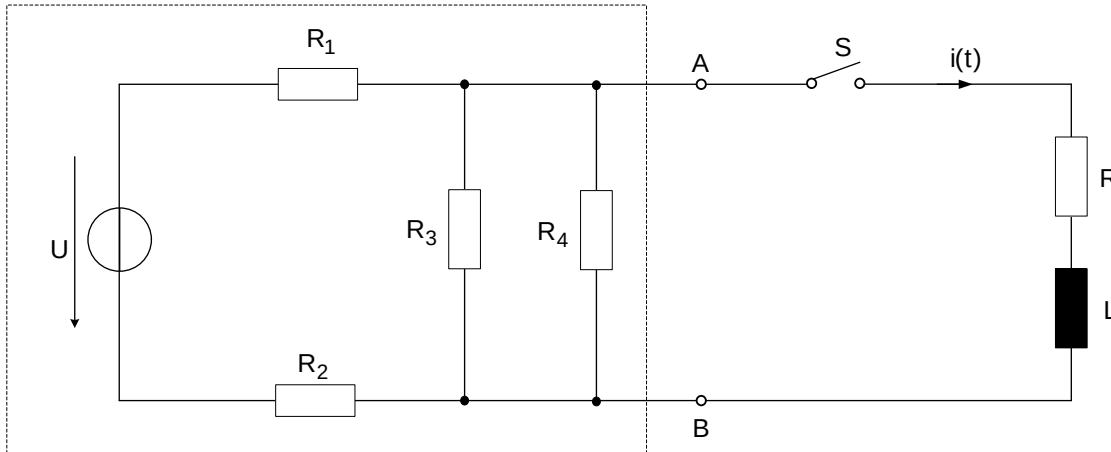


Bild 2 Gleichstromnetzwerk mit Zuschaltung eines R-L-Gliedes

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

$$U = 48 \text{ V}$$

$$R_1 = 3 \, \Omega$$

$$R_2 = 9 \, \Omega$$

$$R_3 = 15 \, \Omega$$

$$R_4 = 10 \, \Omega$$

$$R = 1 \, \Omega$$

$$L = 25 \text{ mH}$$

$$i(t \leq 0) = i(t = 0_-) = i(t = 0_+) = 0 \text{ A}$$

Fragen:

1. Geben Sie für den linken Teil der in Bild 2 dargestellten Schaltung bezüglich der Klemmen A-B das Ersatzschaltbild mit einer Ersatzspannungsquelle an.
2. Bestimmen Sie die Quellspannung U_q und den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle.
3. Zeichnen Sie die in Bild 2 dargestellte Schaltung erneut, indem Sie den links der Klemmen A-B liegenden Teil durch die Ersatzspannungsquelle ersetzen und tragen Sie Zählpfeile für den Strom und die Spannungen ein.
Welche Größe ist beim Einschwingvorgang, der nach Schließen des Schalters S ablaufen wird, für die Energie kennzeichnend und kann bzw. darf daher nicht springen (Begründung)?

4. Geben Sie die Grundgleichungen für die Elemente R_i , R und L an und stellen Sie die Maschengleichung auf.
Geben Sie die Differentialgleichung (DGL) für den Strom $i(t)$ zur Berechnung des Einschwingvorganges an.
5. Lösen Sie die DGL und geben Sie die Funktion von $i(t)$ an.
Welchen Wert hat die Zeitkonstante τ ?
Welcher Strom stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein?
6. Geben Sie die Funktionen der Spannungen $u_{Ri}(t)$, $u_R(t)$ und $u_L(t)$ an.
7. Stellen Sie sowohl $i(t)$ als auch $u_{Ri}(t)$, $u_R(t)$ und $u_L(t)$ für $0 \leq t \leq 25 \text{ ms}$ grafisch dar.

Übung 6

Einschwingvorgänge

Aufgabe 1 (Einschwingvorgänge bei einem Kondensator)

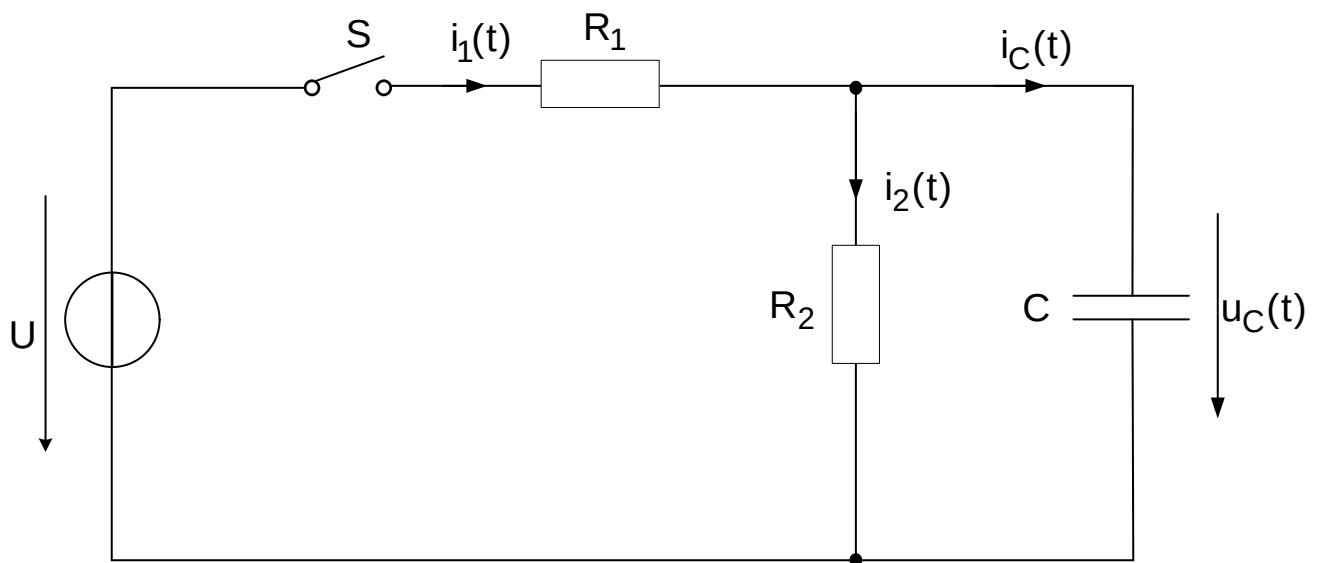


Bild 1 Schaltung zum Laden und Entladen eines Kondensators

Gegebene Werte:

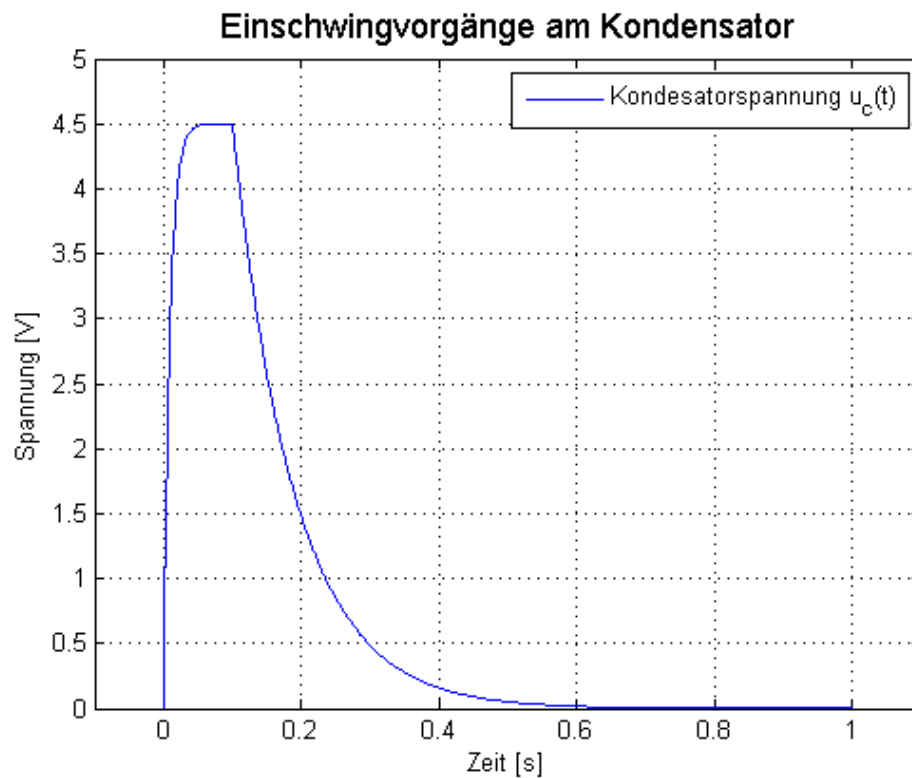
$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 90 \, \Omega$$

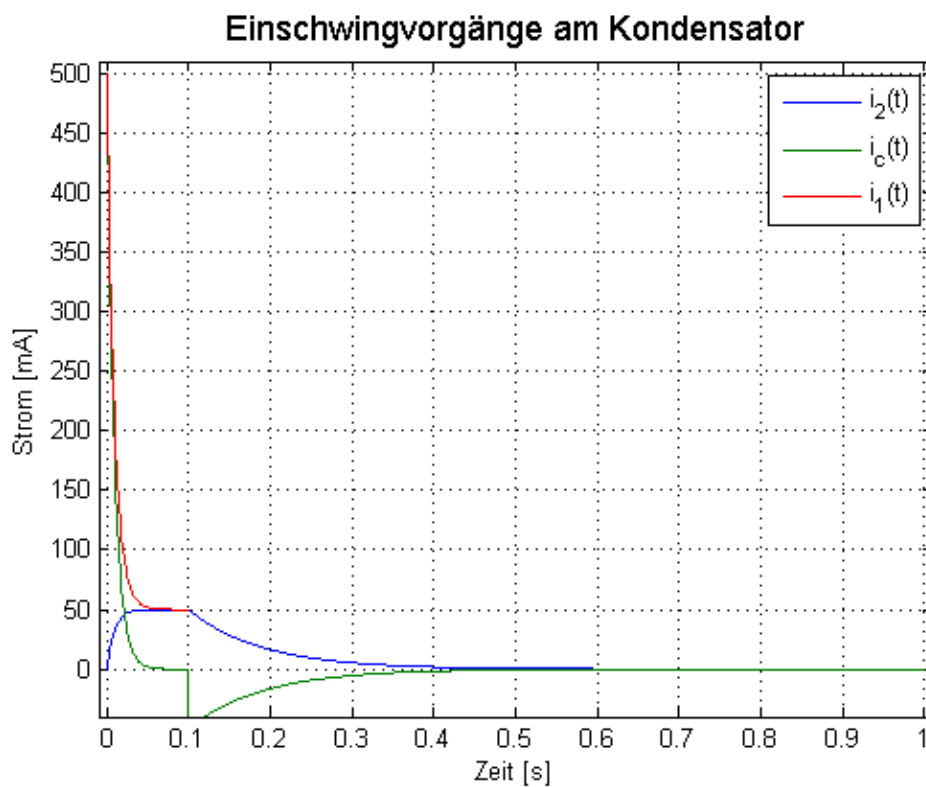
$$U = 5 \, \text{V}$$

$$C = 1 \, \text{mF}$$

Zu Frage 6



a) Spannung



b) Ströme

Aufgabe 2 (Einschaltvorgang an einem R-L-Glied)

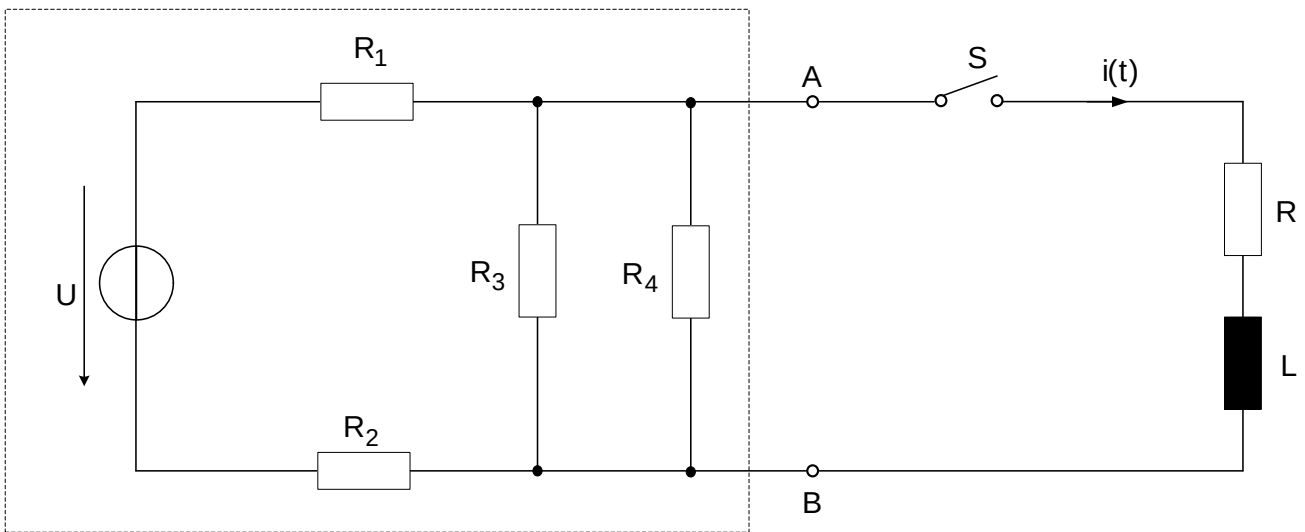


Bild 2 Gleichstromnetzwerk mit Zuschaltung eines R-L-Gliedes

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

$$U = 48 \text{ V}$$

$$R_1 = 3 \, \Omega$$

$$R_2 = 9 \, \Omega$$

$$R_3 = 15 \, \Omega$$

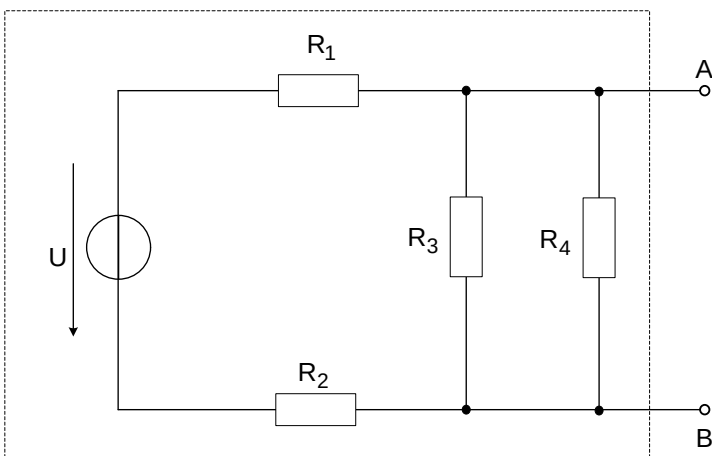
$$R_4 = 10 \, \Omega$$

$$R = 1 \, \Omega$$

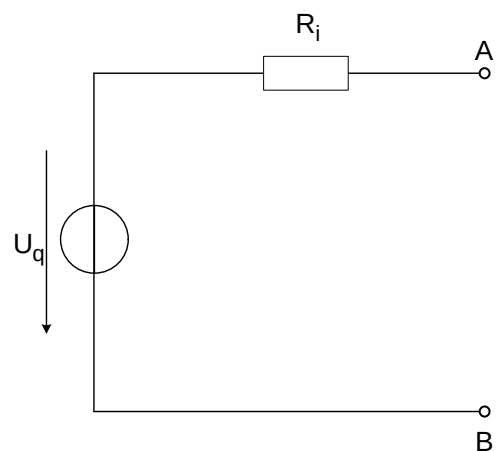
$$L = 25 \text{ mH}$$

$$i(t \leq 0) = i(t = 0^-) = i(t = 0^+) = 0 \text{ A}$$

Zu Frage 1

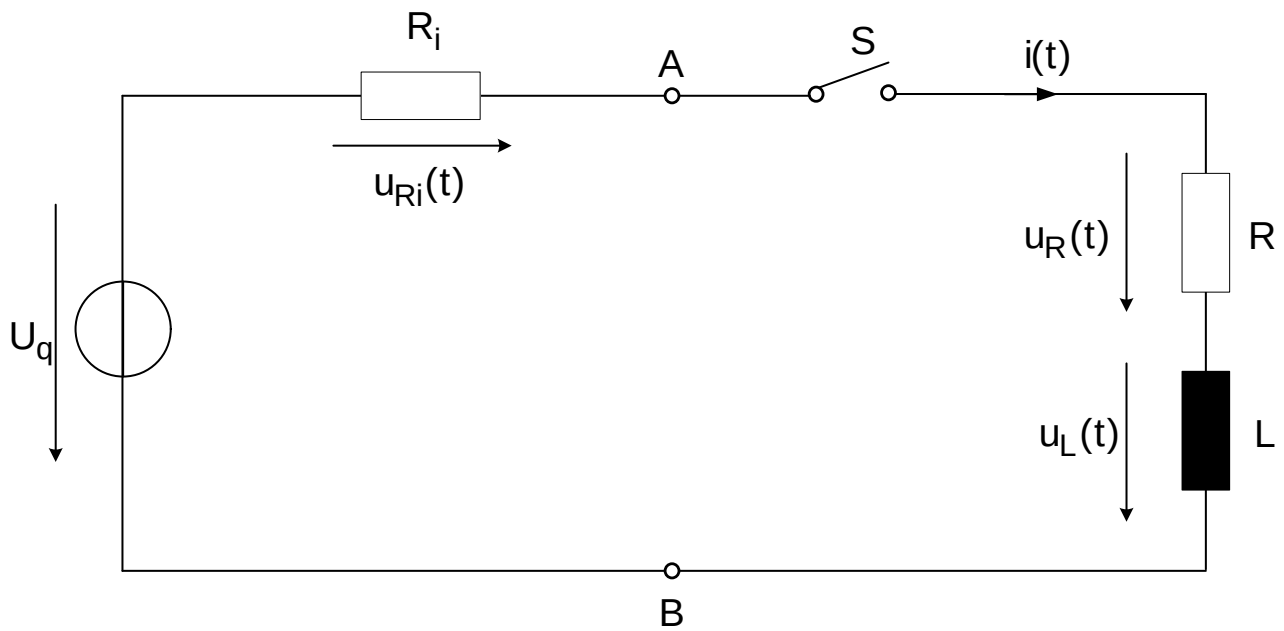


Linker Schaltungsteil



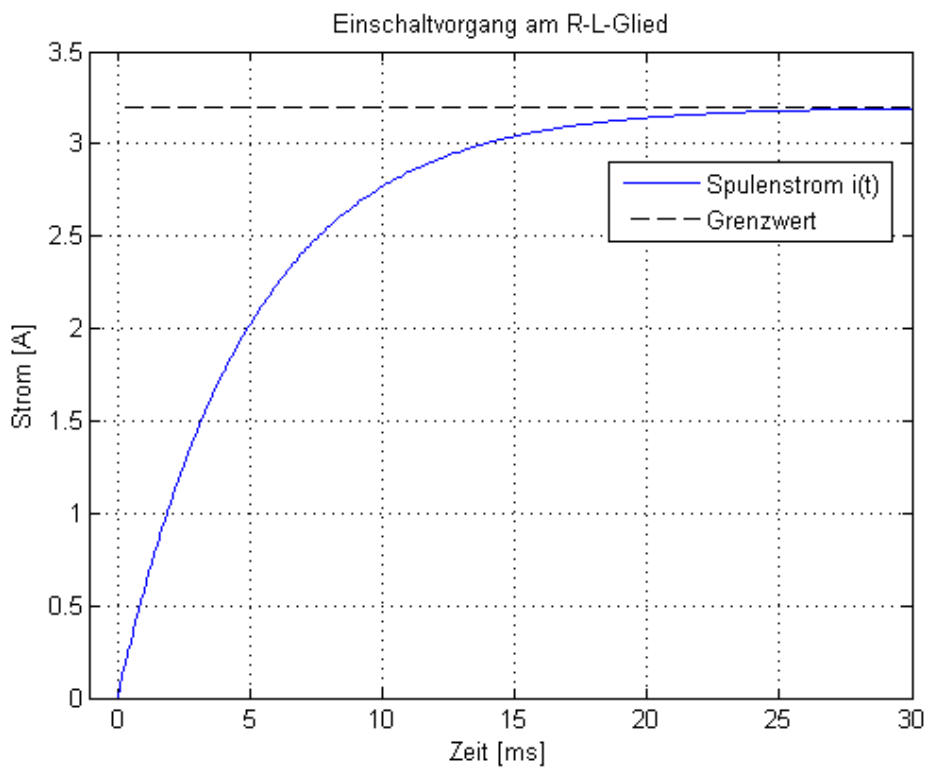
Ersatzspannungsquelle für den linken Teil

Zu Frage 3

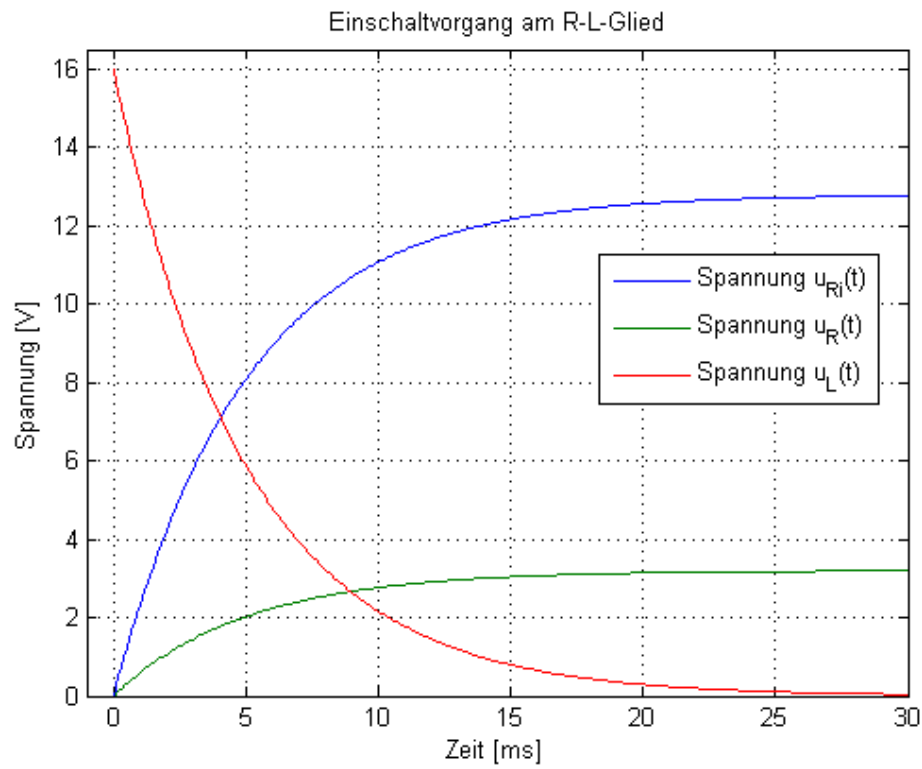


Schaltung mit Ersatzspannungsquelle und Zählpfeilen

Zu Frage 7



a) Strom



b) Spannungen



Kurzlösung zur Übung 6

Einschwingvorgänge

Aufgabe 1 (Einschwingvorgänge bei einem Kondensator)

1. Die Energie ist im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert, d.h. die Spannung am Kondensator ist die energietragende Größe ($W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$) und kann / darf somit nicht springen (vergleiche auch Grundgesetz: $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$)

$$2. \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad u_{R1}(t) = R_1 \cdot i_1(t) \quad u_{R2}(t) = R_2 \cdot i_2(t)$$

$$3. \quad \text{DGL: } U = R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \quad \text{Lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung}$$

$$4. \quad u_C(t) = u_{C,s} + u_{C,hom}(t) = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 4,5 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{9 \text{ ms}}}\right)$$

$$i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \dots = 50 \text{ mA} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{9 \text{ ms}}}\right)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot \frac{u_{C,s}}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = C \cdot \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 500 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{9 \text{ ms}}}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) = \dots = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \dots = 50 \text{ mA} + 450 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{9 \text{ ms}}}$$

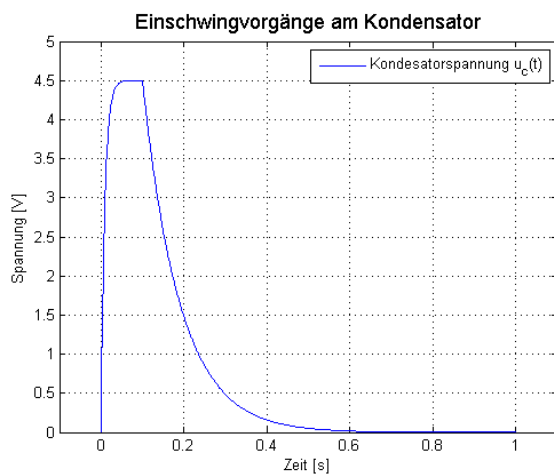
$$5. \quad u_C(t) = u_{CS} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u_{CS} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U = \dots = 4,5 \text{ V}$$

$$u_C(t_X) = u_{CS} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_X}{\tau}} \right) = 0,999 \cdot u_{CS}$$

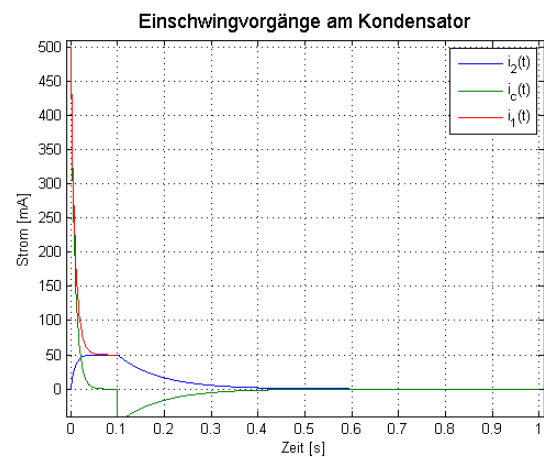
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t_X}{\tau}} = 0,999 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t_X}{\tau}} = 0,001 \quad \Leftrightarrow \quad e^{+\frac{t_X}{\tau}} = 1.000$$

$$99,9\% \text{ erreicht bei: } t_X = \tau \cdot \ln(1.000) = 9 \text{ ms} \cdot \ln(1.000) \approx 62,17 \text{ ms}$$

6. Diagramme mit den zeitlichen Verläufen



a) Spannung



b) Ströme

7. Nur noch R_2 parallel zu C: $t_1 = 100 \text{ ms} > t_X \approx 62,17 \text{ ms}$

$$u_C(t_1) = u_C(100 \text{ ms}) \approx u_{C,S} = 4,5 \text{ V}$$

$$8. \quad u_{R2}(t) = R_2 \cdot i_2(t) \quad \text{mit} \quad i_2(t) = -i_C(t) = -C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\text{Maschengleichung:} \quad 0 = u_C(t) - u_{R2}(t) = u_C(t) - R_2 \cdot i_2(t)$$

$$9. \quad 0 = u_C(t) + R_2 \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad \text{Das ist eine homogene DGL 1. Ordnung.}$$

10. Allgemeine Lösung: $u_C(t) = k \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} = 4,5 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t-100 \text{ ms}}{90 \text{ ms}}}$

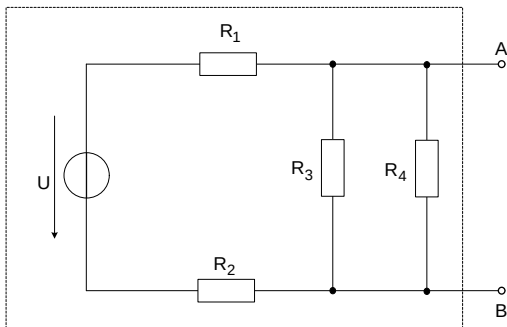
$$u_C(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

11. Siehe Frage 6 mit: $u_C(t) = 4,5 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t-100 \text{ ms}}{90 \text{ ms}}}$ und

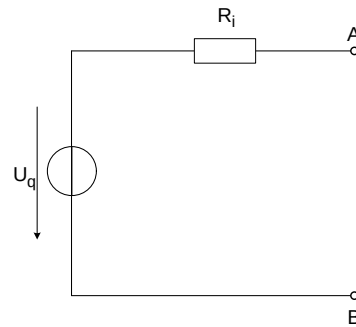
$$i_2(t) = 50 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t-100 \text{ ms}}{90 \text{ ms}}}$$

Aufgabe 2 (Einschaltvorgang an einem R-L-Glied)

1. Ersatzspannungsquelle



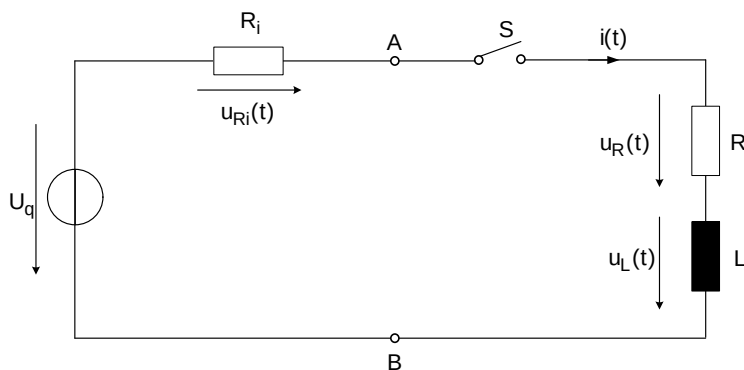
Linker Schaltungsteil



Ersatzspannungsquelle für den linken Teil

2. $U_q = 16 \text{ V}$ $I_{KS} = 4 \text{ A}$ $R_i = 4 \Omega$

3. Schaltung mit Ersatzspannungsquelle und Zählpfeilen



Schaltung mit Ersatzspannungsquelle und Zählpfeilen

Die Energie ist im Magnetfeld der Spule gespeichert, d.h. die energietragende Größe ist der Spulenstrom. Außerdem gilt:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) \text{ darf / kann nicht springen, sonst wird } \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \infty$$

4. Grundgleichungen

$$u_{Ri}(t) = R_i \cdot i(t) \quad u_R(t) = R \cdot i(t) \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Maschengleichung: $U = u_{Ri}(t) + u_R(t) + u_L(t)$

Differentialgleichung: $\frac{U}{(R_i + R)} = \frac{L}{(R_i + R)} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t)$

5. $\tau = 5 \text{ ms}$ $i_{\text{stat}} = 3,2 \text{ A}$ $k = -i_{\text{stat}} = -3,2 \text{ A}$

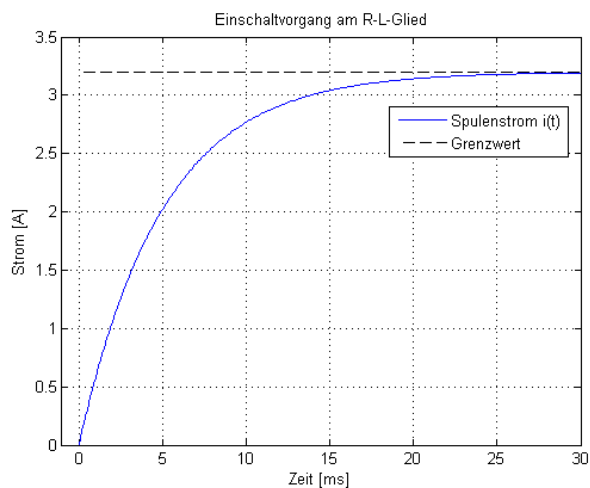
Strom $i(t)$:
$$i(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{\text{stat}} = 3,2 \text{ A} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}} \right)$$

6. Spannung $u_{R_i}(t)$:
$$u_{R_i}(t) = R_i \cdot i(t) = 12,8 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}} \right)$$

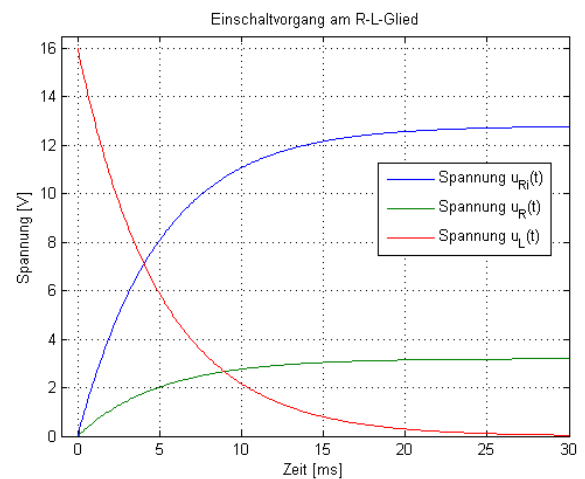
Spannung $u_R(t)$:
$$u_R(t) = R \cdot i(t) = 3,2 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}} \right)$$

Spannung $u_L(t)$:
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = U_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 16 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{5 \text{ ms}}}$$

7.



a) Strom



b) Spannungen

Übung 7

Ehemalige Prüfungsaufgaben

Aufgabe 1: Gleichstrom, Netzwerkanalyse, Einschwingvorgang
(Ehemalige Prüfungsaufgabe EET für Kybernetiker vom 27.09.2010)

Im Bild 1 ist das Ersatzschaltbild eines elektrischen Netzwerks mit einer Gleichstromquelle dargestellt. Über einen Schalter S wird zur Zeit $t = 0$ ein R-L-Glied zugeschaltet. In einem ersten Schritt soll der Schaltungsteil links der Klemmen A-B in eine Ersatzspannungsquelle umgewandelt werden. Anschließend soll der Einschwingvorgang, der nach Zuschalten des R-L-Gliedes abläuft, untersucht werden.

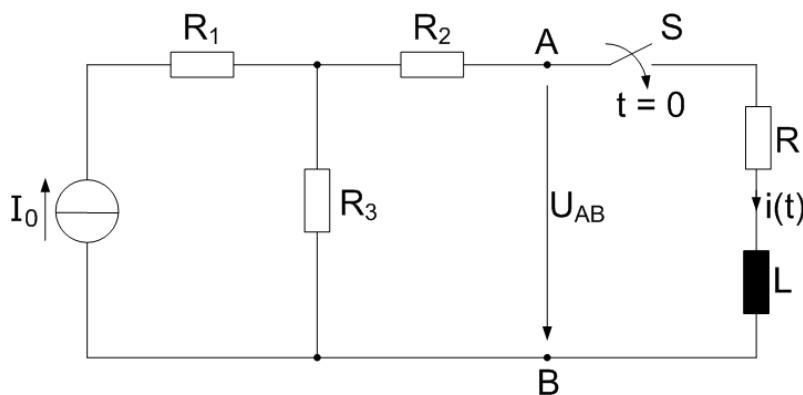


Bild 1 Elektrisches Ersatzschaltbild der zu untersuchenden Schaltung

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

Eingeprägter Strom der Stromquelle	$I_0 = 2 \text{ A}$
Widerstände	$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ } \Omega$
Widerstand	$R = 20 \text{ } \Omega$
Induktivität	$L = 40 \text{ mH}$
Anfangsbedingung	$i(t = 0+) = i(t = 0-) = 0 \text{ A}$

Fragen

1.1 Umwandlung des linken Schaltungsteils in eine Ersatzspannungs-quelle

Zeichnen Sie für den Schaltungsteil links des Klemmenpaares A-B das elektrische Ersatzschaltbild der Ersatzspannungsquelle, bestehend aus der Quellenspannung U_q und dem Innenwiderstand R_i . Berechnen Sie die Spannung U_q und den Innenwiderstand R_i .

Hinweis: Bestimmen Sie den Innenwiderstand als Ersatzwiderstand bezüglich der Klemmen A-B. Überlegen Sie vorher, wie Sie die Stromquelle wirkungslos machen!

Hinweis: Wenn Sie Frage 1.1 nicht lösen konnten, dann rechnen Sie im Folgenden mit $U_q = 20 \text{ V}$ und $R_i = 20 \text{ } \Omega$ weiter.

1.2 Vereinfachtes Ersatzschaltbild

Zeichnen Sie die Schaltung aus Bild 1 erneut auf und ersetzen Sie den Schaltungsteil links der Klemmen A-B durch die Ersatzspannungsquelle. Tragen Sie Zählpfeile für sämtliche elektrischen Spannungen ein und versehen Sie diese mit den Bezeichnungen $u_{Ri}(t)$, $u_R(t)$ und $u_L(t)$.

1.3 Grundgesetze, Maschengleichung, Differentialgleichung

Geben Sie die Grundgesetze (im Zeitbereich) für die Zweipole R_i , R und L an. Stellen Sie die Maschengleichung auf und geben Sie die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ an.

Die Lösung der Differentialgleichung ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$i(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_q}{R_i + R} \quad \text{mit der Zeitkonstanten} \quad \tau = \frac{L}{R_i + R}.$$

1.4 Einschwingvorgang, Zeitverläufe der Ströme und Spannungen

Berechnen Sie die Zeitkonstante τ in ms mit der der Einschwingvorgang abläuft. Bestimmen Sie mit Hilfe der Anfangsbedingung für den Strom $i(t)$ die noch unbekannte Konstante k in Ampere und geben Sie die vollständige Lösung für den Strom $i(t)$ an (Zahlenwerte einsetzen). Geben Sie die Gleichungen für die Spannungen $u_{Ri}(t)$, $u_R(t)$ und $u_L(t)$ an (Zahlenwerte einsetzen). Berechnen Sie die Werte aller Spannungen und des Stromes für die beiden Zeitpunkte $t = 0+$ (also kurz nach dem Schließen des Schalters S) und für $t \rightarrow \infty$ (d. h. am Ende des Einschwingvorganges).

Aufgabe 2: Komplexe Wechselstromrechnung

(Ehemalige Prüfungsaufgabe EET für Kybernetiker vom 02.04.2012)

Die in Abbildung 2-1 dargestellte Schaltung wird an einer sinusförmigen Wechselspannung $\underline{U}$ mit dem Effektivwert U und der Frequenz f betrieben.

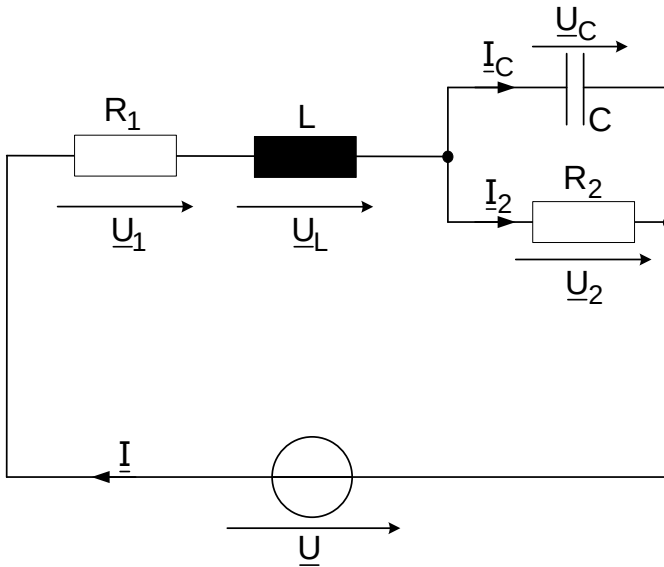


Abbildung 2-1: Wechselstromschaltung

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

Spannung am Widerstand R_2

$$\underline{U}_2 = U_2 = 48 \text{ V}$$

Widerstände

$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 16 \, \Omega$$

Kapazität des Kondensators C

$$C = \frac{25}{6 \cdot \pi} \, \mu\text{F}$$

Blindwiderstand des Kondensators C

$$X_C = 12 \, \Omega$$

Blindwiderstand der Induktivität L

$$X_L = 8 \, \Omega$$

Fragen:

2.1 Zeigerdiagramm, Frequenz f und Induktivität L

Zeichnen Sie ein qualitatives Zeigerdiagramm für sämtliche Spannungen und Ströme, die in Abbildung 2-1 eingetragen sind. (Hinweis: Beginnen Sie mit dem Spannungszeiger $\underline{U}_2$ in der horizontalen Lage und setzen Sie die Konstruktion mit den Stromzeigern fort).

Berechnen Sie die Frequenz f in kHz und die Induktivität L in μH .

Hinweis: Wenn Sie Frage 2.1 nicht lösen konnten, dann rechnen Sie im Folgenden mit $f = 10 \text{ kHz}$ und $L = 127 \mu\text{H}$ weiter.

2.2 Ströme

Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_2$, $\underline{I}_C$ sowie den Gesamtstrom $\underline{I}$ und geben Sie sie sowohl in der Exponentialform als auch in kartesischer Form an.

Geben Sie die Effektivwerte I_2 , I_C und I der Ströme $\underline{I}_2$, $\underline{I}_C$ und $\underline{I}$ an.

Hinweis: Wenn Sie Frage 2.2 nicht lösen konnten, dann rechnen Sie im Folgenden mit $\underline{I}_2 = 3 \text{ A}$, $\underline{I}_C = j4 \text{ A}$, $\underline{I} = 3 \text{ A} + j4 \text{ A}$ weiter.

2.3 Spannungen

Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_1$ am ohmschen Widerstand R_1 , die Spannung $\underline{U}_L$ an der Induktivität L sowie die Gesamtspannung $\underline{U}$.

Geben Sie die Spannungen sowohl in der Exponentialform als auch in kartesischer Form an.

Um welchen Winkel eilt die Spannung $\underline{U}$ der Spannung $\underline{U}_2$ vor?

Hinweis: Wenn Sie Frage 2.3 nicht lösen konnten, dann rechnen Sie im Folgenden mit $\underline{U} = (46 + j 64) \text{ V}$ weiter.

2.4 Schein-, Wirk- und Blindleistung

Berechnen Sie die von der Schaltung aufgenommene Scheinleistung $\underline{S}$ und geben Sie sie in exponentieller und kartesischer Schreibweise an. Bestimmen Sie daraus die Wirkleistung P sowie die Blindleistung Q .

Wirkt die Schaltung ohmsch-induktiv oder ohmsch-kapazitiv (kurze Begründung)?

Bestimmen Sie die in der Schaltung umgesetzte Wirkleistung P und die Blindleistung Q aus den Teilleistungen in R_1 und R_2 bzw. X_L und X_C und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie aus der Scheinleistung $\underline{S}$ erhalten hatten.

2.5 Impedanz und besondere Kreisfrequenzen

Bestimmen Sie zunächst die Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{\text{ges}}$ der Schaltung allgemein in Abhängigkeit von R_1 , R_2 , L , C und der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ und berechnen Sie daraus ebenfalls allgemein in Abhängigkeit von R_1 , R_2 , L und C die beiden Kreisfrequenzen ω_{01} und ω_{02} bei denen der Imaginärteil der Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{\text{ges}}$ gleich Null wird.

Prüfen Sie, ob die Einheiten der von Ihnen soeben berechneten Resonanzkreisfrequenzen stimmen.

Führen Sie den Grenzübergang für $R_2 \rightarrow \infty$ durch und berechnen Sie sowohl $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \underline{Z}_{\text{ges}}$ als auch $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \omega_0$ (ebenfalls in allgemeiner Form, keine Zahlenwerte erforderlich) und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Übung 7

Ehemalige Prüfungsaufgaben

Aufgabe 1: Gleichstrom, Netzwerkanalyse, Einschwingvorgang
(Ehemalige Prüfungsaufgabe EET für Kybernetiker vom 27.09.2010)

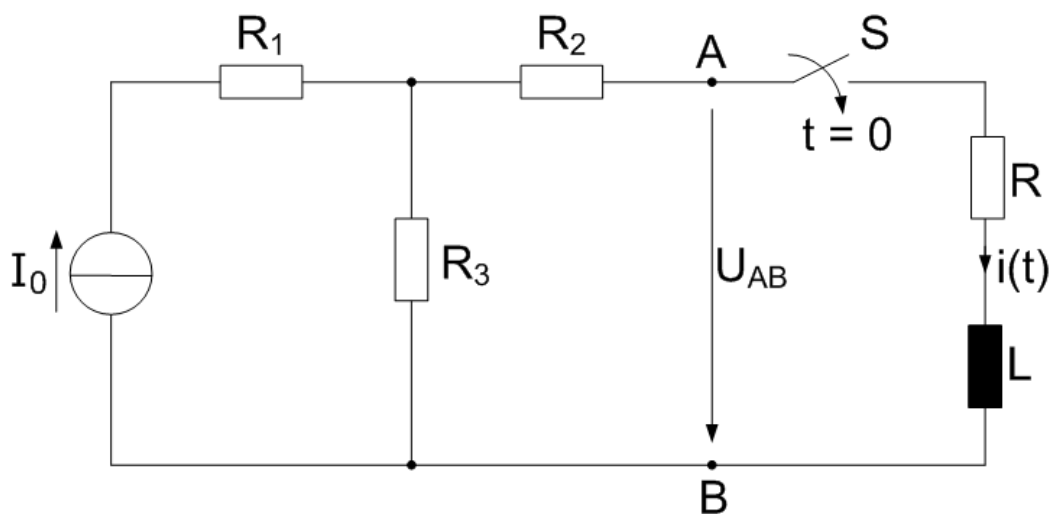


Bild 1 Elektrisches Ersatzschaltbild der zu untersuchenden Schaltung

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

Eingeprägter Strom der Stromquelle

$$I_0 = 2 \text{ A}$$

Widerstände

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ } \Omega$$

Widerstand

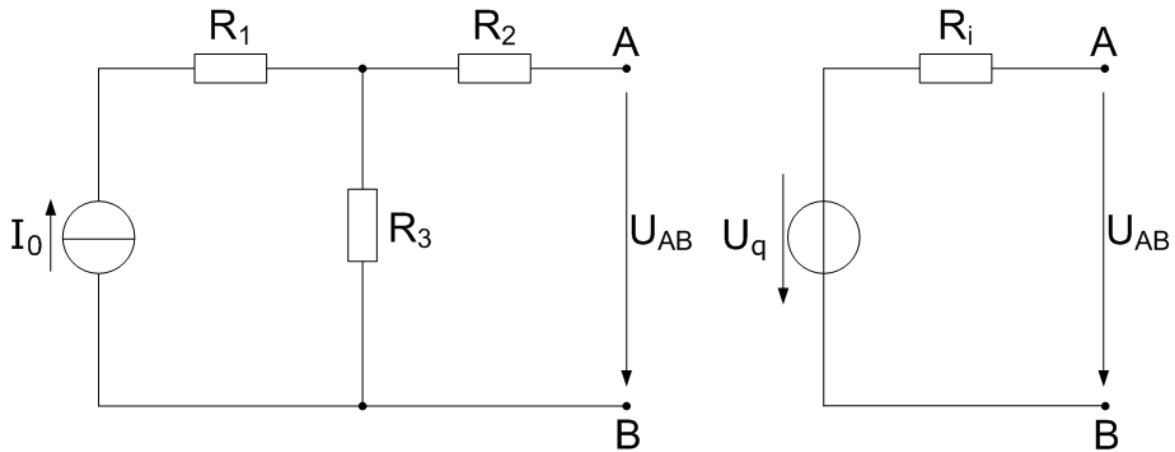
$$R = 20 \text{ } \Omega$$

Induktivität

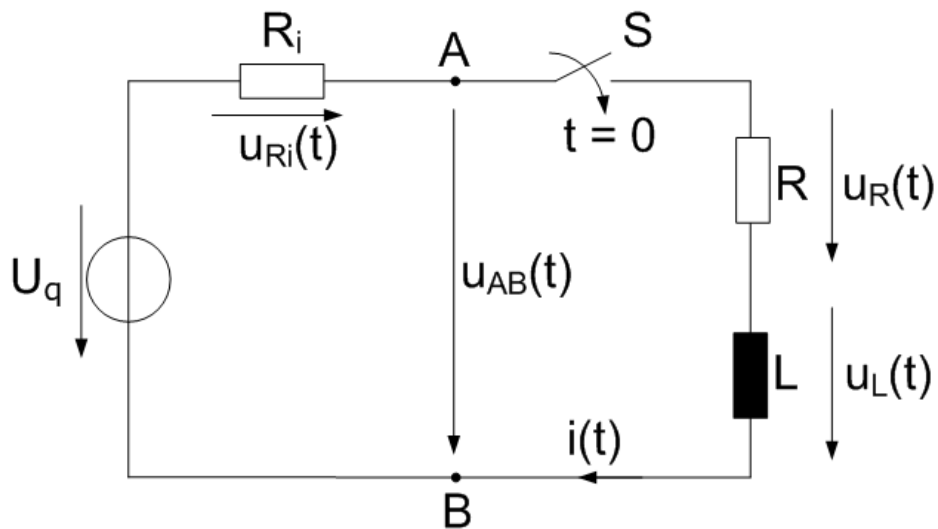
$$L = 40 \text{ mH}$$

Anfangsbedingung

$$i(t = 0+) = i(t = 0-) = 0 \text{ A}$$



Schaltungsteil links von A-B und Ersatzschaltbild der Ersatzspannungsquelle



Vereinfachtes Ersatzschaltbild mit Zählpfeilen

Aufgabe 2: Komplexe Wechselstromrechnung

(Ehemalige Prüfungsaufgabe EET für Kybernetiker vom 02.04.2012)

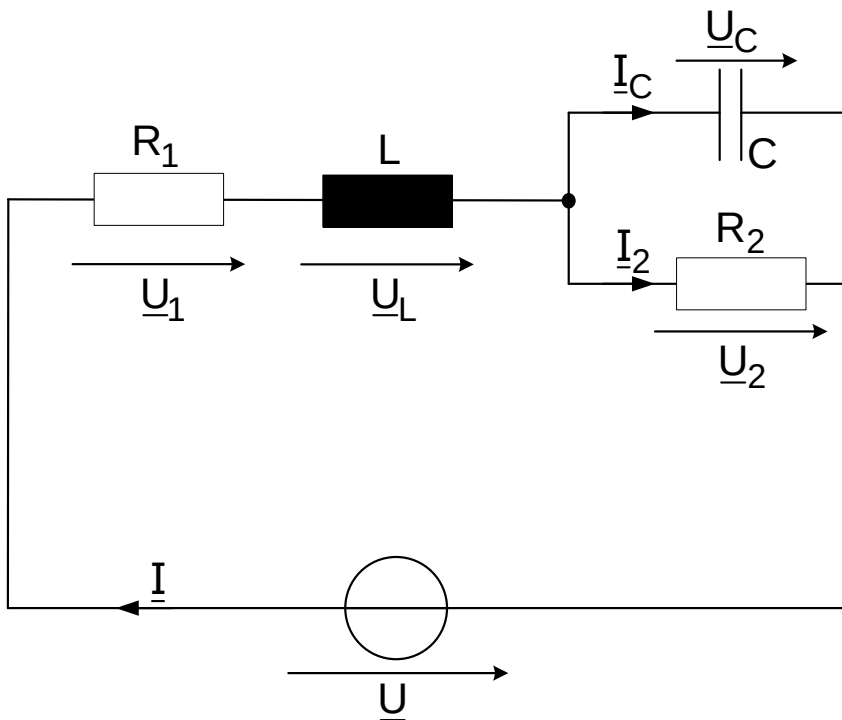
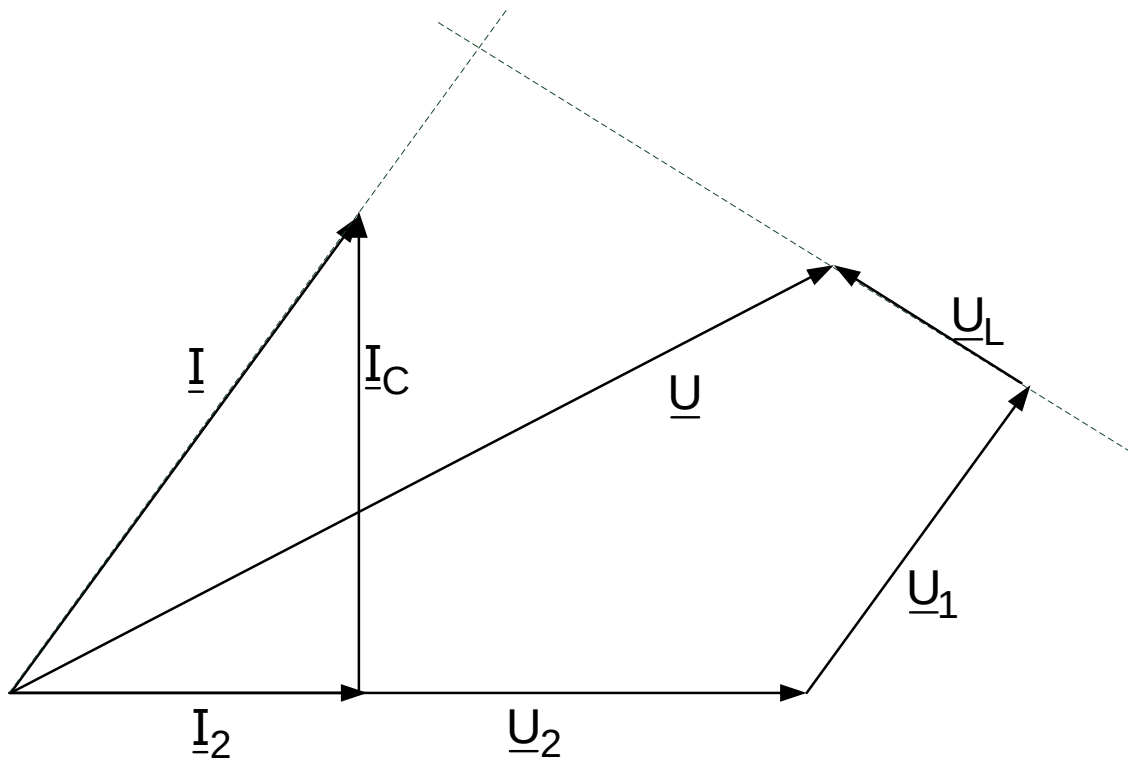


Abbildung 2-1: Wechselstromschaltung

Von der Schaltung sind folgende Daten bekannt:

Spannung am Widerstand R_2	$\underline{U}_2 = U_2 = 48 \text{ V}$
Widerstände	$R_1 = 10 \text{ } \Omega$
	$R_2 = 16 \text{ } \Omega$
Kapazität des Kondensators C	$C = \frac{25}{6 \cdot \pi} \text{ } \mu\text{F}$
Blindwiderstand des Kondensators C	$X_C = 12 \text{ } \Omega$
Blindwiderstand der Induktivität L	$X_L = 8 \text{ } \Omega$



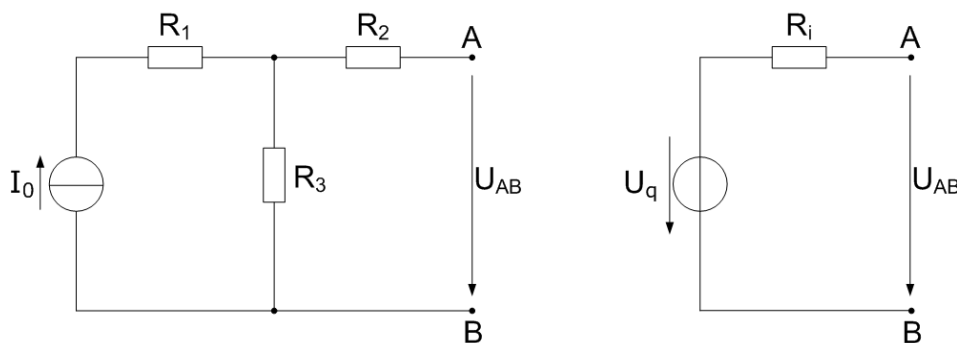
Zeigerdiagramm

Kurzlösung zur Übung 7

Ehemalige Prüfungsaufgaben

Aufgabe 1 (Gleichstrom, Netzwerkanalyse, Einschwingvorgang)

1.1 Umwandlung des linken Schaltungsteils in eine Ersatzspannungsquelle



Schaltungsteil links von A-B und Ersatzschaltbild der Ersatzspannungsquelle

Quellenspannung der Ersatzspannungsquelle aus dem Leerlauf:

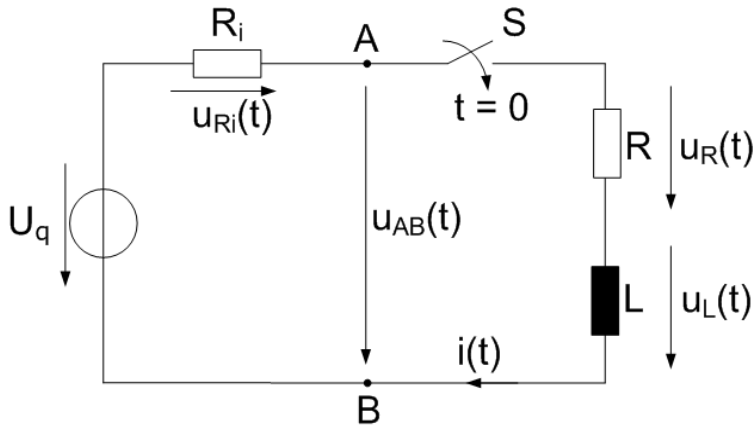
$$U_q = U_{AB|LL} = 20 \text{ V}$$

Innenwiderstand R_i aus Bestimmung des Ersatzwiderstandes bezüglich der Klemmen A-B:

Die Stromquelle muss dazu wirkungslos gemacht werden, dies geschieht, indem sie aus dem betreffenden Zweig herausgenommen wird, d. h. der Zweig wird unterbrochen und R_1 wird somit wirkungslos.

$$R_i = 20 \, \Omega$$

1.2 Vereinfachtes Ersatzschaltbild



Vereinfachtes Ersatzschaltbild mit Zählpfeilen

3. Grundgesetze, Maschengleichung, Differentialgleichung.

Grundgesetze: $u_{Ri}(t) = R_i \cdot i(t)$ $u_R(t) = R \cdot i(t)$ $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$

Maschengleichung: $U_q = u_{Ri}(t) + u_R(t) + u_L(t)$

Differentialgleichung: $\frac{U_q}{(R + R_i)} = \frac{L}{(R + R_i)} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t)$

4. Einschwingvorgang, Zeitverläufe der Ströme und Spannungen

Zeitkonstante: $\tau = 1 \text{ ms}$ Konstante k: $k = -0,5 \text{ A}$

Strom: $i(t) = 0,5 \text{ A} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}} \right)$

Spannung an R_i : $u_{Ri}(t) = 10 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}} \right)$

Spannung an R: $u_R(t) = 10 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1\text{ms}}} \right)$

Spannung an L: $u_L(t) = 20 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{1\text{ms}}}$

Werte für $t = 0$: $u_{Ri}(0) = 0 \text{ V}$

$$u_R(0) = 0 \text{ V}$$

$$u_L(0) = 20 \text{ V}$$

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

Werte für $t \rightarrow \infty$: $u_{Ri}(\infty) = 10 \text{ V}$

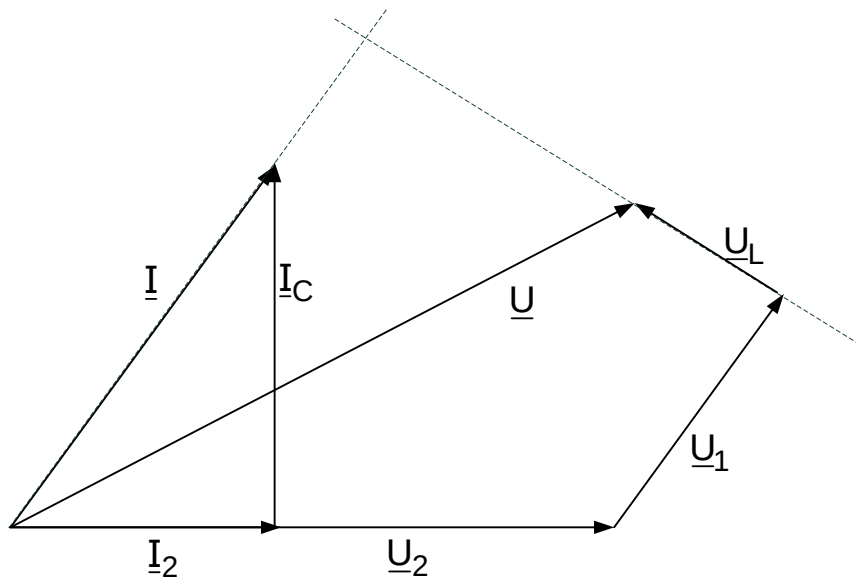
$$u_R(\infty) = 10 \text{ V}$$

$$u_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

$$i(\infty) = 0,5 \text{ A}$$

Aufgabe 2 (Komplexe Wechselstromrechnung)

1. Zeigerdiagramm, Frequenz f und Induktivität L



Zeigerdiagramm

Frequenz: $f = 10 \text{ kHz}$

Induktivität: $L = 127 \mu\text{H}$

2. Ströme

$$\underline{I}_2 = 3 \text{ A} \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_C = 4 \text{ A} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\underline{I} = 5 \text{ A} \cdot e^{j53,13^\circ}$$

$$|\underline{I}_2| = I_2 = 3 \text{ A}$$

$$|\underline{I}_C| = I_C = 4 \text{ A}$$

$$|\underline{I}| = I = 5 \text{ A}$$

3. Spannungen

$$\underline{U}_1 = 30 \text{ V} + j \cdot 40 \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = 50 \text{ V} \cdot e^{j53,13^\circ}$$

$$\underline{U}_L = -32 \text{ V} + j \cdot 24 \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = 40 \text{ V} \cdot e^{j143,13^\circ}$$

$$\underline{U} = 46 \text{ V} + j \cdot 64 \text{ V}$$

$$\underline{U} = 78,8 \text{ V} \cdot e^{j54,3^\circ}$$

Die Spannung $\underline{U}$ eilt der Spannung $\underline{U}_2$ um $54,3^\circ$ vor.

4. Schein-, Wirk- und Blindleistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 393,9 \text{ VA} + j \cdot 8,05 \text{ VA}$$

Die Schaltung wirkt ohmsch-induktiv.

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = 394,9 \text{ W} \qquad Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = 8 \text{ var}$$

$$P = R_1 \cdot I^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 394 \text{ W}$$

$$Q = X_L \cdot I^2 - X_C \cdot I_C^2 = 8 \text{ var}$$

5. Impedanz und besondere Kreisfrequenzen

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \left[R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega \cdot C \cdot R_2)^2} \right] + j \cdot \left[\omega \cdot L - \frac{\omega \cdot C \cdot R_2^2}{1 + (\omega \cdot C \cdot R_2)^2} \right]$$

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}_{\text{ges}}) = 0$$

$$\omega_0 \cdot L \cdot \left[1 + (\omega_0 \cdot C \cdot R_2)^2 \right] = \omega_0 \cdot C \cdot R_2^2 \Rightarrow \omega_{01} = 0$$

$$L \cdot \left[1 + (\omega_0 \cdot C \cdot R_2)^2 \right] = C \cdot R_2^2 \Rightarrow \omega_{02} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{1}{R_2^2 \cdot C^2}}$$

$$[\omega_{02}] = \sqrt{\frac{A \cdot V}{V_s \cdot A_s} - \frac{A^2 \cdot V^2}{V^2 \cdot A^2 \cdot s^2}} = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} Z_{\text{ges}} = [R_1 + 0] + j \cdot \left[\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right]$$

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \omega_{02} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Es ergeben sich die Gleichungen (Ergebnisse) für den RLC-Reihenschwingkreis.