2. Mechanik starrer Körper

1. Kinematik

$1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$

konst. Geschw. $v = \frac{s}{t}$

konst. Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$; $s = \frac{1}{2}at^2$; Freier Fall $v = \sqrt{2gh}$

Schiefer Wurf: Steighöhe $s = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}$; Reichweite $R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$

Kreisbewegung

gleichförmig: Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$; $[\omega] = \frac{1}{s}$; $f = \frac{1}{T}$

$v = \omega R$; $s = vt$

Zentripetalbeschleunigung $a_z = \omega^2 R$, $[a_z] = \frac{m}{s^2}$

allgemein: Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \omega'(t)$, $[\alpha] = \frac{1}{s^2}$

Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$; $\alpha_T = \alpha \cdot R$, $[a_T] = \frac{m}{s^2}$

2. Kräfte $[F] = N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$ / 5. Rotation ausgedehnte Körper

Translation	Rotation
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
Geschwindigkeit $\vec{v}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Masse m	Trägheitsmoment $J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2$
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ (Impulserhaltungssatz)	Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ (Drehimpulserhaltungssatz)
Grundgleichung der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehimpulssatz $\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$
kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

Federkraft

Hookesches Gesetz $\vec{F} = -D \cdot \vec{x}$

Kombination von Federn: parallel: $D_{ges} = D_1 + \dots + D_n$; seriell: $\frac{1}{D_{ges}} = \frac{1}{D_1} + \dots + \frac{1}{D_n}$

Scheinkräfte

Trägheitskraft $\vec{F}_T = -m \cdot \vec{a}$

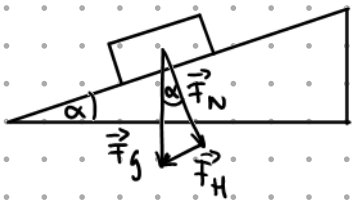
Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$

Coriolis-Kraft $\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \omega^2$; Rechte-Hand-Regel: $\vec{v}$ Daumen, $\vec{\omega}$ Zeigefinger, $\vec{F}_C$ Mittelfinger

Reibungskräfte

Haftreibung, Gleitreibung, Rollreibung $F_{HR,GR,RR}^{max} = \mu_{H,G,R} \cdot F_N$; typischerweise $\mu_H > \mu_G >> \mu_R$

Schiefe Ebene:



Normalkraft $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Hangabtriebskraft $F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

3. Erhaltungsgrößen der Mechanik

Energie E; $[E] = J = Nm$; Energieerhaltungssatz

Arbeit $W = \Delta E$

Energiearten: $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$; $E_{elast} = \frac{1}{2} D x^2$; $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

Leistung $P = \frac{W}{t}$; $[P] = W = \frac{J}{s}$

Potential $U(\vec{r}) = \frac{1}{m} W(\vec{r}_0 - \vec{r})$

4. Statik starrer Körper

Hebelgesetz: $F_1 = \frac{l_2}{l_1} F_2$

Gleichgewicht ausgedehnter Körper: $\vec{M} = \vec{r}_{SP} \times m \cdot \vec{g}$

Gleichgewichtsarten: Stabiles GG: ◡ $\alpha = 0°$

Labiles GG: ◠ $\alpha = 180°$

Indifferentes GG: — $|\vec{r}_{SP}| = 0$

Zentrale Stöße

Elastischer Stoß: Impuls- & Energieerhaltung

Geschw. nach Stoß: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$; $v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$

Inelastischer Stoß (Stoßpartner „kleben" nach Stoß zsm): Impulserhaltung; E_{kin} nicht erhalten

Geschw. nach Stoß: $v_1' = v_2' = v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

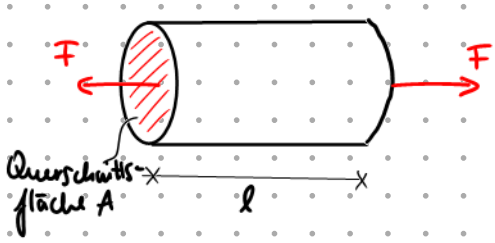
3. Kontinuumsmechanik

1. Elastische Verformung fester Körper

Dichte $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_A}{V_A}$; $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

Bindungspotential $U(r) \approx \frac{1}{2} D (R - R_0)^2$

Dehnung / Stauchung

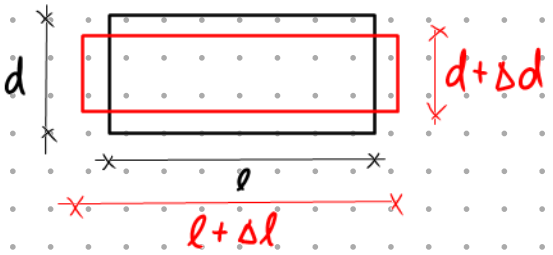


mechanische Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$; $[\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa$

relative Längenänderung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$\sigma = E \cdot \varepsilon \iff \Delta l = l \frac{F}{E \cdot A}$ mit Elastizitätsmodul E; $[E] = Pa$

Querkontraktion



$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$ mit Poissionszahl μ; $[\mu] = 1$

typischerweise $0 < \mu < 0{,}5$ (Gummi: $\mu = 0{,}5 \Rightarrow V = 0$)

Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \cdot \frac{\Delta l}{l}$

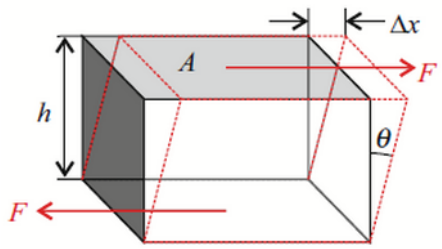
Verbiegung (rechteckiges Profil)

einseitig eingespanntes Brett $\Delta = \frac{1}{E} \cdot \frac{4 l^3}{d^3 \cdot b} \cdot F$

beidseitiges Aufliegen: $\Delta = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4 d^3 b} \cdot F$

mit Durchbiegung Δ

Scherung



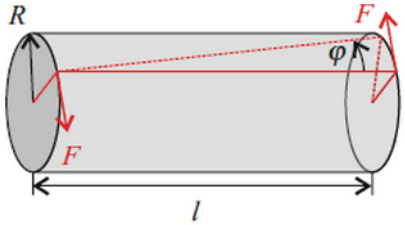
Scherspannung $\tau = \frac{F}{A}$; Scherwinkel θ;

Scherung $\gamma = \frac{\Delta x}{h} = \tan\theta$

Hooke'sches Gesetz: $\tau = G \cdot \gamma \iff \Delta x = \frac{1}{G} \frac{F \cdot l}{A}$

mit Schermodul G; $[G] = Pa$

Torsion (Verdrillung)



Drehmoment $M = R \cdot F$

Hooke'sches Gesetz: $M = D \cdot \varphi$

mit Winkelrichtgröße $D = G \cdot \frac{\pi \cdot R^4}{2l}$; $[G] = \frac{Nm}{rad}$

$\varphi = \frac{2l}{G \pi R^3} \cdot F$

2. Hydrostatik

Druck $p = \frac{F}{A}$; $[p] = Pa$; $1\,bar \approx 10^5\,Pa$

Schweredruck $p_S = \frac{F_g}{A} = \rho g h$

Stempeldruck $p_0 = \frac{F}{A}$

} Gesamtdruck $p_{ges} = p_S + p_0$

hydraulische Presse $F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$

Auftriebskraft $F_A = \rho_{Fl} V_K g$

schwimmender Körper: $V = V_u + V_0$; $V_u = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}} V$; $V_0 = (1 - \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}}) V$

Grenzflächen von Flüssigkeiten

Oberflächenspannung $\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}$

Kraft auf Randlinie $F = 2\sigma \cdot l$ mit Umfang l

Überdruck in Luftballons / Seifenblasen: $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{4\sigma}{R}$



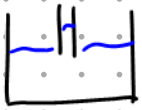
Adhäsion / Kohäsion

Adhäsion: Anziehungskräfte Teilchen Flüssigkeit - Teilchen Wand

Kohäsion: Anziehungskräfte Teilchen Flüssigkeit

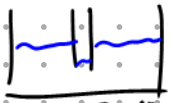
Adhäsion > Kohäsion: Tropfen zerfließen u. benetzen Oberfläche, hydrophile Oberfläche

Kapillarkompression



Kohäsion > Adhäsion: Tröpfchenbildung, hydrophobe Oberfläche

Kapillardepression



Kapillarkompression / -depression: $\Delta h = \frac{2\sigma}{r \rho g}$ mit Radius r der Kapillare

Aerostatik

Gesetz von Boyle-Mariotte: $p \cdot V = konst.$ $\Rightarrow$ $\rho \propto p$

Barometrische Höhenformel: $p(z) = p_0 \cdot e^{-(\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0}) z}$

3. Hydrodynamik

Strömungen: laminar <-> turbulent; inkompressibel <-> kompressibel, ideale Fl. <-> reale Fl.

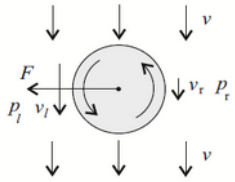
Kontinuitätsgleichung: $\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$ (laminar)

Volumenstromstärke $I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v$; $[I] = \frac{m^3}{s}$

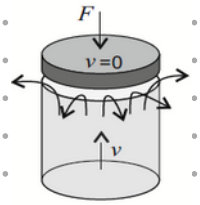
Bernoulli-Gleichung: $\frac{1}{2}\rho_1 \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho_2 \cdot v_2^2 + p_2$ (ideal u. inkompressibel)

mit Höhenänderung ($h_2 > h_1$): $\frac{1}{2}\rho_1 \cdot v_1^2 + p_1 + \frac{1}{2}\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho_2 \cdot v_2^2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho g h_2$

- Pitot-Rohr $v_2 = \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}}$
- Auftrieb Flugzeugtragfläche $F = \frac{\Delta p}{A}$
- Magnuseffekt



- Hydrodynamisches Paradoxon



- Gesetz von Torcelli: $v_2 = \sqrt{2gh}$

Reale Strömungen

Viskosität $\eta = \frac{\frac{F}{A}}{v'(x)}$ <=> $F = \eta \cdot A \cdot v'(x)$; $[\eta] = Pa \cdot s$ (laminar)

Newton'sche Flüssigkeit: η = konst. => $F = \eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D}$

Stokes'sches Reibungsgesetz: $\vec{F}_R = -6\pi\eta R\vec{v}$ (laminar umströmte Kugel)

Sinkgeschwindigkeit Kugel $v = \frac{2g(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta} \cdot R^2$

Gesetz von Hagn-Poiseuille $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$ <=> $I = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta l} \cdot R^4$ (Rohr)

Turbulenzen

Reynolds: $Re = \frac{\rho \cdot l \cdot v}{\eta} \gtrsim 1000$

Turbulente Reibungskraft $F_R = \frac{\rho \cdot c_w \cdot A}{2} \cdot v^2$

4. Schwingungen und Wellen

1. Harmonische Schwingung

DGL $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$

$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Federpendel: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

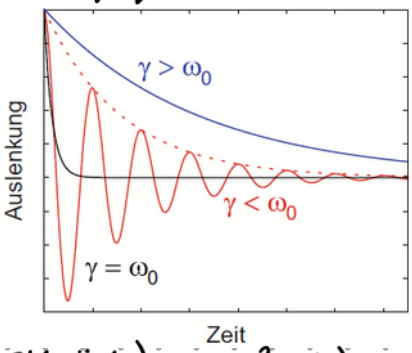
Fadenpendel (kleine Auslenkung): $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Oszillator

gedämpft: DGL $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) - \gamma \dot{x}(t)$

Dämpfungskonstante β: $F_R = -\beta \cdot v$; $[\beta] = \frac{N}{\frac{m}{s}} = kg \cdot s$

Dämpfungsrate $\gamma = \frac{\beta}{m}$; $[\gamma] = \frac{1}{s}$



- Schwache Dämpfung ($\gamma < \omega_0$):
  $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot e^{-\gamma t}$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
- Aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$): $x(t) = e^{-\gamma t}$
- Starke Dämpfung ($\gamma > \omega_0$)

gehieben: DGL $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) - \gamma \dot{x}(t) + \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\omega_{ext} \cdot t)$

$F_{ext} = F_0 \cdot \sin(\omega_{ext} \cdot t)$ mit Anregungsfrequenz ω_{ext}

statische Anregung $\omega_{ext} = 0$: $x_0^{stat} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$; $\varphi = 0°$

resonante Anregung $\omega_{ext} = \omega_0$: $x_0^{res} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}$; $\varphi = 90°$

schnelle Anregung $\omega_{ext} \to \infty$: $x_0 \to 0$; $\varphi = 180°$

} mit Amplitude x_0, Phasenversatz φ

Resonanzkatastrophe: Ohne Dämpfung $\gamma = 0 \Rightarrow x_0^{res} \to \infty$

2. Harmonische Welle

$\vec{x}(\vec{r},t) = \vec{x}_0 \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

Wellenvektor $\vec{k}$, Wellenzahl $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $[k] = \frac{1}{m}$; Wellenlänge λ, $[\lambda] = m$

Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$; $[c] = \frac{m}{s}$; Schallwelle $c \approx 340 \frac{m}{s}$

Geschwindigkeitsamplitude $v_0 = \omega \cdot \vec{x}_0$

Transversalwellen: $\vec{x} \perp \vec{k}$ ∿∿

Longitudinalwellen: $\vec{x} \parallel \vec{k}$))))

Interferenz (Wellenüberlagerung)

destruktiv: Auslöschung <-> konstruktiv: Verstärkung

Stehende Welle (gleiche Frequenz): $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$; Bäuche u. Knoten immer am selben Ort

$\vec{x}(\vec{r},t) = \underbrace{2\vec{x}_0 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r})}_{\text{ortsab. Amplitude } A(\vec{r})} \cdot \underbrace{\sin(-\omega t)}_{\text{Schwingung}}$

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ mit Knotenabstand L, Bäuchezahl n

$f_n = f_1 \cdot n$ mit $f_1 = \frac{c}{2L}$

Schwebungen: ähnliche Frequenz

$T_{Schwebung} = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$

Schallwellen

$c_s = \frac{1}{\sqrt{\kappa \cdot \rho}}$ mit Kompressibilität des Gases $\kappa = \frac{1}{K}$

Schallschnelle $u_0 = x_0 \cdot \omega$; $[u_0] = \frac{m}{s}$; $p_0 = u_0 \cdot \rho \cdot c_s$

Schallintensität $I = \frac{E}{At} = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho \cdot c_s} = \frac{1}{2}\rho c_s u_0^2$; $[I] = \frac{W}{m^2}$

Lautstärke $L = 10 \cdot \lg_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB$ mit $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ <=> $I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10dB}}$; $[L] = dB$

Dopplereffekt: bewegte Quelle: $f' = \frac{f}{1 - \frac{v_Q}{c}}$

bewegte Empfänger: $f' = f\left(1 + \frac{v_E}{c}\right)$

bewegte Q & E: $f' = f\frac{1 + \frac{v_E}{c}}{1 - \frac{v_Q}{c}}$

} gemessene Frequenz f'

Machkegel: $v_Q > c$ Überschallgeschwindigkeit => Machkegel

Machzahl $Ma = \frac{v_Q}{c} = \frac{1}{\sin\alpha}$

5. Thermodynamik

Temperatur T; $[T] = K$; $0°C \approx 273\,K$

Wärmemenge $\Delta Q = C \cdot \Delta T$; $[\Delta Q] = J$

Wärmekapazität Objekt C, $[C] = \frac{J}{K}$

Spezifische Wärmekapazität $c = \frac{C}{m}$; $[c] = \frac{J}{kg \cdot K}$ $\Rightarrow$ $\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$

molare Wärmekapazität $c_{mol} = \frac{C}{n_{mol}}$ $\Rightarrow$ $\Delta Q = c_{mol} \cdot n_{mol} \cdot \Delta T$

Atomanzahl $N = \frac{m}{m_{atom}}$; Molanzahl $n_{mol} = \frac{N}{N_A}$ mit Advogadro konstante $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{N}{mol}$

Termisches Gleichgewicht: $T_1' = T_2'$ (0. Hauptsatz der TD)

Mischtemperatur (im therm. GG): $T_m = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$

Thermische Ausdehnung

Längenausdehnung: $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$ mit $\Delta T = T - T_0$

$l(T) = l_0 + \Delta l = l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$

lineare Ausdehnungskoeffizient α; $[\alpha] = \frac{1}{K}$

Volumenausdehnung: $\Delta V = \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta T$

$V(T) = V_0 + \Delta V = V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta T)$

Volumenausdehnungskoeffizient γ; $[\gamma] = \frac{1}{K}$

2. Ideales Gas (Teilchen kein Volumen, nur elastische Stöße, keine langreichweitende Kräfte)

Ideale Gasgleichung: $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$ mit Boltzmannkonstante $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$p \cdot V = n_{mol} \cdot R \cdot T$ mit allgemeiner Gaskonstante $R = N_A \cdot k_B = 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}$

mittlere kinetische Energie pro Teilchen $\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

Innere Energie

Freiheitsgrade f: Anzahl Möglichkeiten thermodyn. Energie zu verteilen

(Ideales Gas: $E_{kin} = N \cdot \langle E_{kin} \rangle$, Rotationsenergie, Vibrationsenergie)

Jeder Freiheitsgrad jedes Teilchen hat $\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$

Innere Energie $U = \frac{f}{2} N k_B T$

1. Hauptsatz der Thermodynamik: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$; $\Delta W = -p \cdot \Delta V$

Zustandsänderungen idealer Gas

Isochor (V=konst.): $\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$; $\Delta Q = C_v \cdot \Delta T$ mit Wärmekapazität $C_v = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, $[C_v] = \frac{J}{K}$

Isobar (p=konst.): $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_1}{V_2}$; $\Delta Q = C_p \cdot \Delta T$ mit Wärmekapazität $C_p = C_v + N \cdot k_B$; $[C_p] = \frac{J}{K}$

Isotherm (T=konst.): $p_1 V_1 = p_2 V_2$; $\Delta Q = -\Delta W = N k_B \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Adiabatisch ($\Delta Q = 0$): $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ mit Isentropenexponent $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$

3. Entropie und Reversibilität

Entropie eines Zustands Z: $S(Z) = k_B \cdot \ln(w)$; $[S] = \frac{J}{K}$

Entropieänderung (reversibler Prozess): $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$

2. Hauptsatz der TD: $\Delta S \geq 0$ in abgeschlossenem System

$\Delta S = 0$ reversibler Prozess; $\Delta S > 0$ irreversibler Prozess

3. Hauptsatz der TD: $\lim_{T \to 0} S(T) = 0$ ($T=0$ kann nie erreicht werden)

Wärmekraftmaschine (WKM) verwandelt Wärme ΔQ in Arbeit ΔW

Wirkungsgrad $\eta = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_{in}}$

reversible WKM (Wärmepumpe): bestmöglicher Wirkungsgrad η_{rev}

Carnot-Kreisprozess (reversibel): $\eta = 1 - \frac{T_K}{T_H}$

Wärmetransport

Wärmeänderung pro Zeit $P = Q'(t) = \lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{d}$

Wärmeleitfähigkeit λ; $[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$