Grundzüge der Maschinenkonstruktion

- Kochrezepte -

Version: 1.0

Timo Wingender

timo.wingender@gmx.de

Markus Kohlhase

mail@markus-kohlhase.de

Andreas Lörcher

andreasloercher@web.de

9. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Festigkeitsberechnung **2**

2 Schweißnahtberechnung **7**

3 Schraubenberechnung **12**

4 Achsen und Wellen Berechnung **17**

5 Lagerberechnung **28**

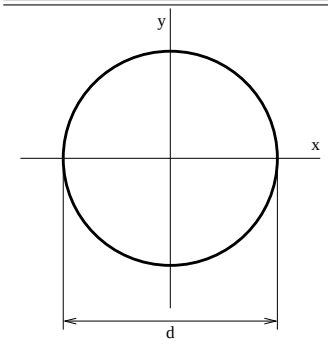
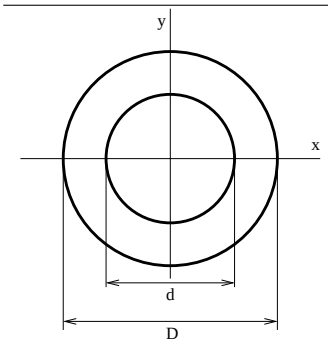
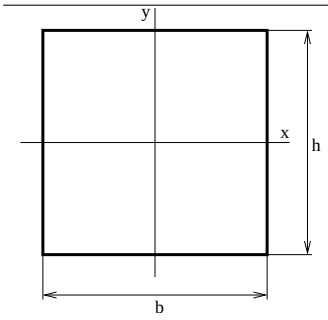
6 Klebeverdindungen **30**

1 Festigkeitsberechnung

1. Wirkende Kräfte bestimmen
   - F_L
   - F_Q
   - M_b
   - M_t
2. Belastungsarten bestimmen
   - Zug/Druck
   - Biegung
   - Torsion
3. Abmaße und Querschnittsflächen bestimmen
4. Werkstoffkennwerte
   - R_e
   - $R_{p_{0,2}}$
   - R_m
5. Normalspannungen
   a) $\sigma = \frac{F}{A}$
   b) Biegespannungen:
      i. Flächenträgheitsmoment/ Widerstandsmoment gegen Biegung

$$W_b = \frac{I}{e} \tag{1}$$

- I:Flächenträgheitsmoment
- e: Maximaler Randfaserabstsnd

Querschnitt	Flächenträgheitsmomente	Widerstnadsmomente
	$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{4}r^4$	$W_{b_x} = W_{b_y} = \frac{\pi}{32}d^3 = \frac{\pi}{4}r^3$
	$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4}R^4 - r^4$	$W_{bx} = W_{by} = \frac{\pi}{32}\frac{(D^4-d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4}\frac{R^4-r^4}{R}$
	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$	$Wbx = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $Wbx = \frac{b^2 \cdot h}{6}$

ii. Steiner'sche Satz

$$I_{x/y} = I_S + y_s^2 \cdot A$$

$$\sigma_b = \frac{M_B}{W_b}$$

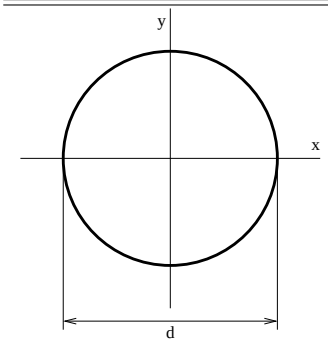
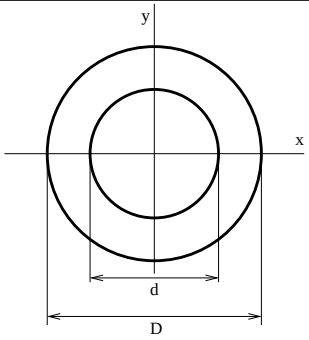
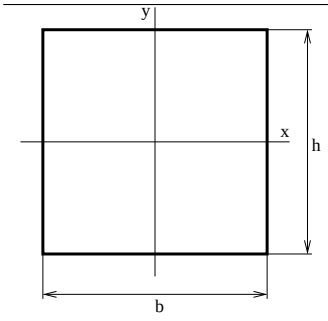
6. Schubspannungen

   a) $\tau = \frac{F}{A}$

   b) Schubspannung infolge von Torsion

i. polares Flächenträgheitsmoment/ Widerstandsmoment

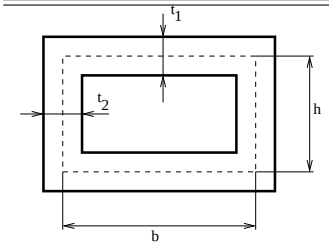
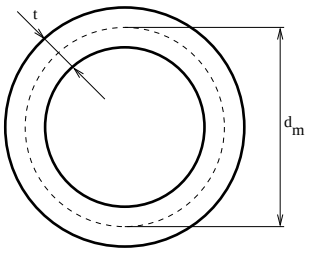
$$W_t = \frac{I_t}{r} \tag{2}$$

Querschnitt	Flächenträgheitsmomente	Widerstnadsmomente
	$I_t = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{2} R^4 - r^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \frac{(D^4 - d^4}{D}$
	$I_t = \eta_3 \cdot b^3 \cdot h$	$Wt = \eta_2 \cdot b^3 \cdot h$

ii. Beiwerte für Rechteckquerschnitte

d	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
η_2	0,208	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
η_3	0,140	0,196	0,229	0,263	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333

iii. Bredtsche Formel (dünnwandige Querschnitte)

Querschnitt	$\frac{I_p}{I_t}$	W_t	Bemerkung
	$\frac{4(b\cdot h)^3}{2\left(\frac{b}{t_1}+\frac{h}{t_2}\right)}$	$2 \cdot b \cdot h \cdot t_m in$	
			

iv. Zusammengesetzte Querschnitte

$$I_t = \eta_{3_1} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + \eta_{3_2} \cdot b_2^3 \cdot h_2 + \ldots \approx \frac{1}{3}\left(b_1^3 h_1 + b_2^3 h_2\right)$$

$$W_t = \frac{I_t}{b_{max}}$$

v. $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$

7. Vergleichsspannung

- $\sigma_{res} = \sigma_x + \sigma_{by} + \sigma_{bz}$
- $\tau_{res} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$
- GEH: $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

8. Festigkeitsnachweis

- Bedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$

$$S = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_v} \tag{3}$$

Bruch:

$$S_b = \frac{R_m}{\sigma_v} \tag{4}$$

Fließen:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} \tag{5}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \tag{6}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \tag{7}$$

- S_F: 1,2-3
- S_B: 2-3
- $S_{B_{sproed}}$: 4-9

9. Knickfälle
   a) $F_K = \frac{\pi^2}{4} \frac{E \cdot I}{l^2}$
   b) $F_K = \pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$
   c) $F_K = 2\pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$
   d) $F_K = 4\pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$
10. Flächenpressung

$$\sigma_d = p = \frac{F}{A} \tag{8}$$

Lochleibungsdruck:

$$p = \frac{F}{D - l} \tag{9}$$

11. Hertzsche Pressung

2 Schweißnahtberechnung

1. Belsatungsarten bestimmen
   - Zug/Druck
   - Biegung
   - Schub
   - Torsion
2. Belsatungsfall prüfen
   - statisch
   - dynamisch
3. Nahtverlauf bestimmen
   - Nahtart bestimmen
     - Stumpfnaht
     - Kehlnaht
   - Umlaufende Naht?
   - Schubrichtung einzeichnen
   - Endkraterabzüge bestimmen
   - Eckpunkte abziehen
4. Wirkende Kräfte bestimmen
   Schnittgrößen
   - F_L
   - F_Q
   - M_b
   - M_t
5. Kenngrößen der Schweißnaht
   a) Nahtdicke
      i. Stumpfnaht: $a = t_1$

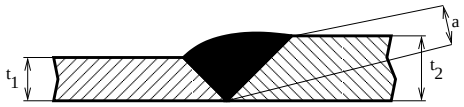


Abbildung 1: Maße einer Stumpfnaht

ii. Kehlnaht:

$$\begin{aligned} a_{min} &\geq \left(\sqrt{t_{max}} - 0,5\right) \geq 3mm \\ a_{max} &\leq 0,7 \cdot t_{max} \end{aligned}$$

b) Nahtlänge

i. Umlaufende Naht/ mit Auslaufblechen geschweißt:

$$l = L$$

(ohne Endkraterabzug) Eckpunkte werden nicht beachtet

ii. sonst mit Endkraterabzug:

$$l = L - 2 \cdot a$$

iii. bei Kehlnaht: Endkraterabzug insbesondere bei $l \leq 15 \cdot a$

$$l_{min} \geq 6 \cdot a \geq 30mm \tag{10}$$

Nähte unter 30mm werden nicht berücksichtigt

c) Nahtflächen

i. Fläche für Schubspannung

- Rechteckrohr Nur Nähte in Kraftrichtung werden berücksichtigt

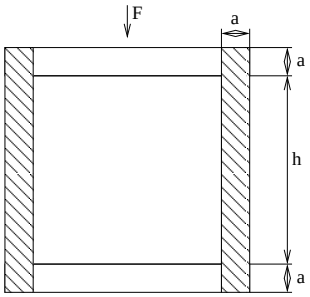


Abbildung 2: Flächen für Schubspannung am Rechteckrohr

$$A = 2 \cdot a \cdot (h + 2 \cdot 1) \tag{11}$$

Bei nicht Rundum geschweißter Naht mit Endkraterabzug:

$$A = 2 \cdot a \cdot h \tag{12}$$

- Rundprofile

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot a(d_a + a) \tag{13}$$

d_a : Rohraußendurchmesser

ii. Fläche für Biegespannung (z.B für Steiner'schen Satz)
- Gesamt Schweißnahtfläche verwenden (ohne Endkraterabzug)
- Für Flächenträgheitsmoment/ Widerstandsmoment alle Flächen berücksichtigen

6. Werkstoffkennwerte
- R_e
- $\sigma_a = f(\sigma_m)$
  aus Dauerfestigkeitsschaubild

7. Normalspannungen

a) $\sigma_w = \frac{F_L}{A}$
A: Fläche mit/ohne Endkraterabzug

b) Biegespannungen

i. Nahtschwerpunkt
$$y_s = \frac{\sum_i^n y_i \cdot A_i}{\sum_i^n Ai} \tag{14}$$

ii. Flächenträgheitsmomente/Widerstandsmoment
$$W_b = \frac{I_b}{e} \tag{15}$$
siehe: Festigkeitsberechnung

iii. Steiner'sche Satz
$$I = \sum_i^n I_i + y_s^2 \cdot A_i \tag{16}$$
- I_i $[mm^4]$: Einzelträgheitsmoment
- A_i $[mm^2]$: Einzelfläche
- y_s [mm]: Abstand des Flächenschwerpunktes

Für Flächen bei denen der Flächenmittelpunkt mit dem Nahtschwerpunkt übereinstimmt entfällt der hintere Teil.

iv.
$$\sigma_{bw} = \frac{M_b}{W_b} \tag{17}$$

c) dynamische Belastung

$$\sigma_o = \frac{F_{L_{max}}}{A}\ ,\ \sigma_u = \frac{F_{L_{min}}}{A} \Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}\ ,\ \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$$
$$\sigma_{bow} = \frac{M_{b_o}}{W_B}\ ,\ \sigma_{buw} = \frac{M_{b_u}}{W_b} \Rightarrow \sigma_{bmw} = \frac{\sigma_{bow} + \sigma_{buw}}{2}\ ,\ \sigma_{baw} = \frac{\sigma_{bow} - \sigma_{buw}}{2}$$

8. Schubspannungen

a) $\tau_{yw} = \frac{F_Q}{A_y}$ A: Fläche aus: 5(c)i

b) Schubspannungen infolge von Torsion: (Flächen ohne Endkraterabzug)

i. Polares Flächenträgheitsmoment/ Widerstandsmoment

$$W_t = \frac{I_t}{r} \tag{18}$$

siehe Festigkeitsberechnung

ii. Beiwerte:
siehe Festigkeitsberechnung

$$\eta_3 = \frac{1}{3} \tag{19}$$

iii. Bredt'sche Formel (dünnwandige Querschnitte)
- siehe Festigkeitsberechnung
- bei Kreisrohr: $d_i < 10 \cdot a$

iv. Zusammengesetze Querschnitte

v. $\tau_{tw} = \frac{M_t}{W_t}$

c) dynamische Belastung

$$\tau_{oyw} = \frac{F_{Q_{max}}}{A_y} \ , \ \tau_{uyw} = \frac{F_{Q_{min}}}{A_y} \Rightarrow \tau_{myw} = \frac{\tau_{oyw} + \tau_{uyw}}{2} \ , \ \tau_{ayw} = \frac{\tau_{oyw} - \tau_{uyw}}{2}$$

$$\tau_{tow} = \frac{M_{t_o}}{W_t} \ , \ \tau_{tuw} = \frac{M_{t_u}}{W_t} \Rightarrow \tau_{tmw} = \frac{\tau_{tow} + \tau_{tuw}}{2} \ , \ \tau_{taw} = \frac{\tau_{tow} - \tau_{tuw}}{2}$$

9. Vergleichsspannung

a)

$$\sigma_{w_{res}} = \sigma_w + \sigma_{bwx} + \sigma_{bwy}$$
$$\tau_{w_{res}} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

b) GEH:

$$\sigma_{vw} = \sqrt{\sigma_w^2 + 1.8\tau_y^2}$$
$$\sigma_{vw} = \sqrt{\left(\sigma_{bw} \cdot \frac{V_{x1}}{V_{b1}} + \sigma_{zw} \cdot \frac{V_{x1}}{V_{z1}}\right)^2 + 1,8\left(\tau_w \cdot \frac{V_{x1}}{V_{s1}}\right)^2}$$

Normalspannungshypothese: (bei Eigenspannungen, spröde Werkstoffe)

$$\sigma_{vw} = \frac{1}{2}\left(\sigma_w + \sqrt{\sigma_w^2 + 4\tau_w^2}\right) \tag{20}$$

mit $\tau_w \leq 0,58 \cdot R_m$

c) für dynamische Belastung:
σ_{vm} und σ_{va} berechnen

10. Zulässige Spannung

a) Statisch: (auch für $\sigma_{vm} beidynamischer Belastung$)

$$\sigma_{vm} = v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{R_e}{S} \tag{21}$$

i. Beiwert v_1

Nahtform	Belastungsart		Beiwert v_1
Stumpfnaht	Zug/Druck/Biegung	1,0	
	Schub	0,8	
Kehlnaht	Zug/ Druck/ Biegung/ Schub		0,8

ii. Beiwert v_2

Nahtgüte	Beiwert v_2
nachgewiesen	0,8-1,0
nicht nachgewiesen	0,5

b) Dynamisch

$$\sigma_{vaw_{zul}} = v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{\sigma_A}{S} \tag{22}$$

11. Festigkeitsnachweis
Bedingung

$$\sigma_{vw} \leq \sigma_{vw_{zul}} \; (\sigma_w \leq \sigma_{w_{zul}}, \tau_w \leq \tau_{w_{zul}})$$
$$\sigma_{vaw} \leq \sigma_{vaw_{zul}} \; (\sigma_{aw} \leq \sigma_{aw_{zul}}, \tau_{aw} \leq \tau_{aw_{zul}})$$

3 Schraubenberechnung

1. Berechung äußerer Kräfte und Momente ($F_B, F_A, F_Q, F_{kl}, F_u, M_B, M_T$)

   a) Umfangkraft

   $$F_u = \frac{2 \cdot M_t}{D} \tag{23}$$

   D: Lochkreisdurchmesser

   b) Druck

   $$p = \frac{F}{A} \tag{24}$$

   $1\,bar = 10\frac{N}{cm^2} = 0,1\frac{N}{mm^2}; 1Pa = 1\frac{N}{m^2}$

   c) Betriebskraft

   $$F_{B_{max}} = \frac{F_{max}}{z} \tag{25}$$

   z = Anzahl der Schrauben

   d) Klemmkraft

   $$F_{kl} = \frac{F_u}{\mu \cdot z} \tag{26}$$

   μ = Reibkoeffizient

   e) Leistung

   $$M = \frac{P}{\omega} \tag{27}$$

   $\omega = 2\,\pi\,\frac{n}{t}$

2. Abmessungen / Werkstoffkennwerte der zu verspannenden Teile ($d, E_T,$)

3. Abschätzen der Schraubenquerschnitte aufgrund max. Betriebskraft → Tabelle [TB 8-13] (oder S. 221 Tabellenbuch Metall, Europa)

4. Abmessungen der Schraube / Festigkeitsklasse festlegen / TB [8-13] (Schaftschraube, Dehnschraube)

5. Abmessungen / Werkstoffelemente der Schraube / [TB 8-1], [TB 8-8]

   $$\tan\varphi = \frac{P}{2\pi\frac{d_2}{2}} = \frac{P}{\pi d_2} \tag{28}$$

   d =Nenndurchmesser
   d_3 =Kerndurchmesser
   d_2 =Schaftdurchmesser
   β =Flankenwinkel
   P =Gewindesteigung
   φ =Steigungswinkel
   d_w =Kerndurchmesser
   E_S =Elastizitätsmodul der Schraube

6. Nachgibigkeit der Schraube

$$\delta_S = \frac{1}{E_s} \cdot 0,4 \cdot \frac{d}{A_N} + \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \ldots + 0,5\frac{d}{A_3} + 0,4\frac{d}{A_N} \tag{29}$$

$A_N = \frac{\pi d^2}{4}$
$A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4}$

7. Nachgibigkeit der verspannten Teile

$$A_{ers} = \frac{\pi}{4}(d_w^2 - d_n^2) + \frac{\pi}{8} d_w (D_A - d_w) \left[(x+1)^2 - 1\right] \tag{30}$$

$x = \sqrt[3]{\frac{l_k \cdot d_w}{D_A^2}}$

Sonderfall:$D_A < d_w$ [TB 12-13]

$$\delta_T = \frac{f_T}{F_V} = \frac{l_k}{A_{ers} \cdot E_T} \tag{31}$$

8. Schraubenzusatzkraft / Entlastung der Teile

$$F_{B_S} = F_B \cdot \phi = F_B \cdot \frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T} \tag{32}$$

$\phi = \frac{F_{B_S}}{F_B}$

$$F_{B_T} = F_B - F_{B_S} = F_B(1 - \phi) = F_B \frac{\delta_S}{\delta_S + \delta_T} \tag{33}$$

9. Kraftverhältnis

$$\phi = n\,\phi_k = n\,\frac{\delta_T}{\delta_S + \delta_T} \tag{34}$$

$n = 1$: vereinfachter Fall $n = 0,5$: normaler Fall $n = 0,3$: günstiger Falss

10. Setzverhalten

    a) Setzbeträge

        i. massive Verbindung (DIN EN ISO 4014)

$$f_Z = 3,29 \left(\frac{l_K}{d}\right)^{0,34} 10^{-3} \tag{35}$$

        ii. Dehnschaft, Hohl-, etc. Schrauben

$$f_Z = 3,16 \left(l_K \cdot \delta_S \cdot E_S\right)^{0,17} 10^{-3} \tag{36}$$

b) Setzkraft

$$F_Z = \frac{f_Z}{\delta_S + \delta_T} = \frac{f_Z}{\delta_T}\phi_k = \frac{f_Z}{\delta_S}(1 - \phi_k) \tag{37}$$

c) Achtung!

$F_{kl} \leq 0 \rightarrow$ möglich
$F_Z \geq F_{kl} \rightarrow$ überprüfen

11. Montagevorspannkraft

a) Anziehfaktor

$$K_A = \frac{F_{V_M}}{F_{V_{min}}} > 1 \tag{38}$$

Verfahren	Anziehfaktor
Streckgrenzen- /drehwinkelgesteuert	1,2 - 1,4
Hydraulisch	1,2 - 1,6
Drehmomentgesetzt	1,4 - 1,6
Schlag/Impuls von Hand	2,5 - 4,0

b) Vorspannkraft F_V / minimale Vorspannkraft $F_{v_{min}}$

$$F_V = P_{DV}\,\pi\,d\,b \tag{39}$$

c) Montagevorspannkraft / Max. Vorspannkraft

$$F_{V_M} = k_A\,(F_{kl} + F_B\,(1 - \phi) + F_Z) \tag{40}$$

$F_{Kl} = \frac{F_Q}{\mu\,z}$

12. Festigkeitsberechnug

a) zul. Spannungskräfte aus Werkstoffkennwert $R_{P\,0,2}/R_e$

i. Spannungsquerschnitt

$$A_S = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d_2 + d_3}{2}\right)^2 \tag{41}$$

Teilquerschnitt:
bei Dehnschrauben gilt: $A_S = A_T = \frac{\pi}{4}d_T^2$
$d_T = 0,9 \cdot d_3$

ii. zul. Spannkraft:

$$F_{SP} = 0,9 \cdot R_{P\,0,2} \cdot A_S \tag{42}$$

iii. max. Schraubenzusatzkraft

$$F_{BS_{max}} = 0,9 \cdot R_{p\,0,2} \cdot A_S \tag{43}$$

b) zul. Spannkraft aus Tabelle [TB 8-14]

i.
$$F_{SP_{x.y}} = \frac{F_{SP_{8.8}}}{R_{e_{8.8}}} R_{e_{x.y}} \tag{44}$$

ii. Festigkeitsklasse $x.y$
$R_m = x \cdot 100$
$R_e = 0,y * R_m$

c) Festigkeitsnachweis
$$F_{VM} \leq F_{SP} = F_{SP_{x.y}} \tag{45}$$

13. Erforderliches Anziehdrehmoment

a) Gewindemoment

i. modifizierter Reibwert μ'_G
$$\mu'_G = \frac{\mu_G}{\cos(\frac{\beta}{2})} \tag{46}$$
β : Flankenwinkel

ii. Gewindereibungswinkel
$$\varphi' = \arctan \mu'_G \tag{47}$$

iii. Gewindeart (+ für Last heben / − für Last senken)
$$\mu_G = F_u \frac{d_2}{2} = F_{VM} \frac{d_2}{2} \tan(\varphi + \varphi') \tag{48}$$
φ: Steigungswinkel

iv. Umfangkaft am Gewinde der Schraube
$$F_u = F_{VM} \cdot \tan(\varphi + \varphi') \tag{49}$$

b) Auflagereibungsmoment

i. wirksamer Reibungsdurchmesser (d_k) der Kopfauflage
$$\frac{d_k}{2} \approx \frac{d_W + d_h}{4} \tag{50}$$
überschlagen: $\frac{d_k}{2} \approx 0,65 \cdot d$

ii. Reibmoment
$$M_{RA} = F_{VM} \frac{d_k}{2} \mu_k \tag{51}$$
$\mu_k = 0,08 - 0,20$

c) Anziehdrehmoment / Losdrehmoment

$$M_A = M_G + M_{RA} \tag{52}$$

$$M_L = -\left(M_G + M_{RA}\right) \tag{53}$$

d) Schnellformeln für DIN 13, $\beta = 60°$
$\mu_G \neq \mu_k$:

$$M_A = F_{VM}\left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot d_2 \cdot \mu_G + \frac{d_k}{2}\mu_k\right) \tag{54}$$

$\mu_G = \mu_k$:

$$M_A = F_{VM}\left(0,159 \cdot P + \mu_{ges}\left(0,577 \cdot d_2\frac{d_k}{2}\right)\right) \tag{55}$$

14. Festigkeitsberechung (Teil 2)

a) zulässiges Spannmoment aus Tabelle [TB 8-14]

$$M_{SP_{x.y}} = \frac{M_{SP_{8.8}}}{R_{e_{8.8}}} R_{e_{x.y}} \tag{56}$$

b) Festigkeitsnachweis

$$M_A \leq M_{SP_{x.y}} \tag{57}$$

Torsionsschubspannung M_A: $\tau_t = \frac{M_A}{W_t}$
$W_t = \frac{\pi(d_S)^3}{16}$
$d_S = \frac{d_2+d_3}{2}$

15. Flächenpressung

a)

$$P = \frac{F_{SP} + F_{BS}}{A_P} = \frac{F_{SP} + \phi F_B}{A_P} = \frac{\frac{F_{SP}}{0,9}}{A_P} \leq P_G \tag{58}$$

P_G:Grenzflächenpressung

b) streckgrenz- und drehwinkelgesteuerte Anziehverfahren

$$P = 1,2\frac{\frac{F_{SP}}{0,9}}{A_P} \leq P_G \tag{59}$$

c) Fläche der Schrauben- / Mutterkopfauflage

$$A_P \approx \frac{\pi}{4}\left(d_w^2 - d_n^2\right) \tag{60}$$

16. Verspannungsschaubild

a) Längenänderungen

i. Montage

$$f_{S_m} = \delta_S \cdot F_V = \delta_S \left(F_{Kl} + F_{BT}\right) \tag{61}$$

$$f_{T_m} = \delta_T \cdot F_V = \delta_T \left(F_{Kl} + F_{BT}\right) \tag{62}$$

F_V ersetzbar durch z.B. F_{VM}, je nach ????

ii. Betriebszustand

$$f_{S_B} = F_V \left[\delta_S + (1-n) \cdot \delta_T\right] \tag{63}$$

$$f_{T_B} = n \cdot \delta_T \cdot F_V \tag{64}$$

b) Schaubild

17. Versgleichsschraubenspannung

a) Montagezugspannung

$$\sigma_M = \frac{F_{VM}}{A_{min}} \tag{65}$$

b) Torsionspannung durch Verdrehung $\tau_t = \frac{M_G}{W_t}$
$W_t = \frac{\pi d_s^3}{16}$
$d_s = \frac{d_2 + d_3}{2}$

c) GEH:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9 \cdot R_{P\,0,2} \tag{66}$$

18. allgemeine Formeln

a) elastische Langenänderung $f = \epsilon \cdot l = \frac{l \cdot \sigma}{E} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \Delta\, l$
$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

b) elastische Nachgibigkeit $\delta = \frac{1}{c} = \frac{f}{F} = \frac{l}{E \cdot A}$
$f = \delta \cdot F$ c: Federfestigkeit

c) Leistund und Drehmoment $P = T \cdot \omega$
$F_K = \frac{T}{r}$

4 Achsen und Wellen Berechnung

1. Belastungsart festlegen
   - Torsion
   - Biegung
   - Zug/Druck
   - Schub
2. Äußere Kräfte bestimmen
   - Torsionsmoment ⇒ Torsion
   - Axiale Kräfte ⇒ Zug/Druck
   - Radiale Kräfte ⇒ Biegekräfte, Schub

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} \tag{67}$$

mit
p: Leistung
ω:Winkelgeschwindigkeit
n:Umdrehungen in $\frac{1}{s}$

3. Vordimensionierung
   a) Welle/Achse auf Torsion belastset

$$d = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{t_{zul}}}} \tag{68}$$

   b) Welle/Achse auf Biegung belastset

$$d = 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_b}{\sigma_{b_{zul}}}} \tag{69}$$

   c) Welle/Achse auf Torsion und Biegung belastset

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 3\left(\frac{M_t}{2}\right)^2} \tag{70}$$

$$d = 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_v}{\sigma_{b_{zul}}}} \tag{71}$$

⇒ Nächst sinnvollen Durchmesser wählen
⇒ Lagersitze: 5mm schritte

4. Werkstoffkennwerte ermitteln
    - Werkstoff
    - $R_{p0,2}$/ R_e
    - R_m
    - τ_F : Dauerfestigkeitseignung
    - σ_w : Schwingfestigkeit
    - S : Sicherheitsbeiwert

    $\tau_{zul} = \frac{\tau_F}{S}$
    $\sigma_{b_{zul}} = \frac{\sigma_w / R_{p0,2}}{S}$
5. Konstruktion
    - Lagerart
    - Lagerposition
    - Lagerbefestigung (Kerben!)
    - Lagerdurchmesser : D (5mm Schritte)
6. Abmessungen
    - Lagerabstand
    - Antriebsabstand
    - Gesamtlänge
    - Antriebsdurchmesser
    - Kerbradius : ρ
    - Durchmesser an der Kerbe : d_2
7. Mechanisches ersatzschaltbild
    - Längen
    - Äußere Kräfte/Momente
    - Reaktionskräfte/-momente
8. Lagerkräfte
    - $F_{z/d\,o}$, $F_{z/d\,u}$
    - F_{Qo} , F_{Qu}
    - $M_{b\,o}$, $M_{b\,u}$
    - $M_{t\,o}$, $M_{t\,u}$

Lagerresultierende:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \tag{72}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} \tag{73}$$

$F_{A/B\,x}$, $F_{A/B\,y}$: Radiale Lagerkräfte
Statische Kräfte werden durch die Drehung der Welle/Achse zu dynamischen Kräften!

9. Schnittgrößenverläufe
   - F_L
   - F_Q
   - M_b
   - M_t
10. Beanspruchungsanalyse dynamische Belastung: ??? statische Bealstung: ???
11. Bestimmen der höchstbelasteten Stelle (Lager A oder Lager B)
12. Nennspannungen
    a) Aus Zug/Druck (Längstkräften):
       i. Querschnitt

$$A = \frac{\pi\, D^2}{4} \tag{74}$$

       ii. statische Zug/Druckbeanspruchung

$$\begin{array}{lll} \sigma_{z/d\,o} = \sigma_{z/d} & \sigma_{z/d} = \frac{F_{z/d}}{A} & \sigma_{z/d\,m} = \frac{\sigma_{z/d\,o} + \sigma_{z/d\,u}}{2} = \sigma_{z/d} \\ \sigma_{z/d\,u} = \sigma_{z/d} & & \sigma_{z/d\,a} = \frac{\sigma_{z/d\,o} - \sigma_{z/d\,u}}{2} = 0\frac{N}{mm^2} \end{array} \tag{75}$$

       iii. dynamische Zug/Druckbeanspruchung

$$\begin{array}{lll} \sigma_{z/d\,o} = \sigma_{z/d} & \sigma_{z/d} = \frac{F_{z/d}}{A} & \sigma_{z/d\,m} = \frac{\sigma_{z/d\,o} + \sigma_{z/d\,u}}{2} = 0\frac{N}{mm^2} \\ \sigma_{z/d\,u} = -\sigma_{z/d} & & \sigma_{z/d\,a} = \frac{\sigma_{z/d\,o} - \sigma_{z/d\,u}}{2} = \sigma_{z/d} \end{array} \tag{76}$$

       iv. generell

$$\begin{array}{ll} \sigma_{z/d\,o} = \frac{F_{z/d\,o}}{A} & \sigma_{z/d\,m} = \frac{\sigma_{z/d\,o} + \sigma_{z/d\,u}}{2} \\ \sigma_{z/d\,u} = \frac{F_{z/d\,u}}{A} & \sigma_{z/d\,a} = \frac{\sigma_{z/d\,o} - \sigma_{z/d\,u}}{2} \end{array} \tag{77}$$

    b) Aus Biegung:
       - Widerstandsmoment gegen Biegung

$$W_b = \frac{\pi * D^3}{32} \tag{78}$$

- statische Biegespannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} \tag{79}$$

  σ_{bo}, σ_{bu}, σ_{bm}, σ_{ba} analog zu 12(a)ii
- dynamische Biegespannung analog zu 12(a)iii
- generell

$$\sigma_{bo} = \frac{M_{bo}}{W_b} \tag{80}$$

$$\sigma_{bu} = \frac{M_{bu}}{W_b} \tag{81}$$

  σ_{bm}, σ_{ba} analog zu 12(a)iv

c) Aus Querkraft:

- τ_{Qo}
- τ_{Qu}
- τ_{Qm}
- τ_{Qa}

$$\tau_Q = \frac{F_Q}{A} \tag{82}$$

analog zu 12a

d) Aus Torsion:

i. Widerstandsmoment gegen Torsion

$$W_t = \frac{\pi\, D^3}{16} \tag{83}$$

ii. statische Torsionsbelastung

$$\begin{array}{llll} \tau_{t\,o} = \tau_t & \tau_t = \frac{M_t}{W_t} & \tau_{t\,m} = \frac{\tau_{t\,o}+\tau_{t\,u}}{2} = \tau_t \\ \tau_{t\,u} = \tau_t & & \tau_{t\,a} = \frac{\tau_{t\,o}-\tau_{t\,u}}{2} = 0\frac{N}{mm^2} \end{array} \tag{84}$$

iii. dynamische Torsionsbelstung

$$\begin{array}{llll} \tau_{t\,o} = \tau_t & \tau_t = \frac{M_t}{W_t} & \tau_{t\,m} = \frac{\tau_{t\,o}+\tau_{t\,u}}{2} = 0\frac{N}{mm^2} \\ \tau_{t\,u} = -\tau_t & & \tau_{t\,a} = \frac{\tau_{t\,o}-\tau_{t\,u}}{2} = \tau_t \end{array} \tag{85}$$

iv. generell

$$\begin{array}{ll} \tau_{t\,o} = \frac{M_{to}}{W_t} & \tau_{t\,m} = \frac{\tau_{t\,o}+\tau_{t\,u}}{2} \\ \tau_{t\,u} = \frac{M_{tu}}{W_t} & \tau_{t\,a} = \frac{\tau_{t\,o}-\tau_{t\,u}}{2} \end{array} \tag{86}$$

13. Spannungserhöhung durch Kerbwirkung

a) Formfaktor α_k: (für Ringnut oder abgesetzter Rundstab)
jeweils für:

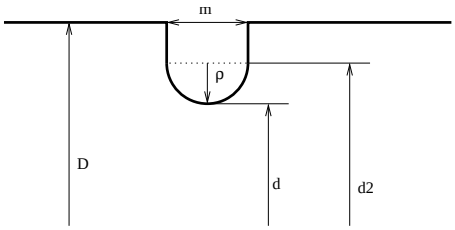


Abbildung 3: Durchmesser an Kerben

- Zug/Druck: $\alpha_{k_{z/d}}$
- Biegung: α_{k_b}
- Querkraft/Torsion: α_{k_t}

aus Tabelle [TB 9-6]

notwendig:

$$\frac{\rho}{d} = \frac{m}{2(d_2-2m)} \tag{87}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{D}{d_2-2\rho} \tag{88}$$

- ρ [mm] : Kerbradius
- m [mm] : Kerbnutbreite
- d [mm] : Innendurchmesser der Kerbe [TB 9-7]
- d_2 : Kerbnuttiefe
- D [mm] : Wellendurchmesser

b) Kerbwirkungszahl $\beta_k = \frac{\alpha_k}{1+\frac{55}{R_c}\sqrt{\frac{c}{\rho}}}$

- α_k [ ] : je nach Belastung : $\alpha_{k_{z/d}}$, α_{k_b}, α_{k_t}
- c=2 bei Zug/Druck, Biegung
- c=1 bei Torsion

14. Maximalspannungen

a) Oberspannungen

$$\sigma_{z/d\,o\,max} = \alpha_{k_{z/d}} \cdot \sigma_{z/d\,o} \tag{89}$$

$$\sigma_{b\,o\,max} = \alpha_{k_b} \cdot \sigma_{b\,o} \tag{90}$$

$$\tau_{q\,o\,max} = \alpha_{k_t} \cdot \tau_{q\,o} \tag{91}$$

$$\tau_{t\,o\,max} = \alpha_{k_t} \cdot \tau_{t\,o} \tag{92}$$

b) Mittelspannungen

$$\sigma_{z/d\,m\,max} = \alpha_{k_{z/d}} \cdot \sigma_{z/d\,m} \tag{93}$$

$$\sigma_{b\,m\,max} = \alpha_{k_b} \cdot \sigma_{b\,m} \tag{94}$$
$$\tau_{q\,m\,max} = \alpha_{k_t} \cdot \tau_{q\,m} \tag{95}$$
$$\tau_{t\,m\,max} = \alpha_{k_t} \cdot \tau_{t\,m} \tag{96}$$

c) Ausschlagspammnungen

$$\sigma_{z/d\,a\,max} = \beta_{k_{z/d}} \cdot \sigma_{z/d\,a} \tag{97}$$
$$\sigma_{b\,a\,max} = \beta_{k_b} \cdot \sigma_{b\,a} \tag{98}$$
$$\tau_{q\,a\,max} = \beta_{k_t} \cdot \tau_{q\,a} \tag{99}$$
$$\tau_{t\,a\,max} = \beta_{k_t} \cdot \tau_{t\,a} \tag{100}$$

15. Vergleichsspannungen

a) Vergleichsoberspannung

$$\sigma_{vo} = \sqrt{\sigma_{o_{max}}^2 + 3\tau_{o_{max}}^2} = \sqrt{\left(\sigma_{z/d\,o_{max}} + \sigma_{b\,o_{max}}\right)^2 + 3\left(\tau_{q_{max}} + \tau_{t_{max}}\right)^2} \tag{101}$$

b) Vergleichsmittelspannung

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{m_{max}}^2 + 3\tau_{m_{max}}^2} = \sqrt{\left(\sigma_{z/d\,m_{max}} + \sigma_{b\,m_{max}}\right)^2 + 3\left(\tau_{q_{max}} + \tau_{t_{max}}\right)^2} \tag{102}$$

c) Vergleichsunterspannung

$$\sigma_{vu} = \sqrt{\sigma_{u_{max}}^2 + 3\tau_{u_{max}}^2} = \sqrt{\left(\sigma_{z/d\,u_{max}} + \sigma_{b\,u_{max}}\right)^2 + 3\left(\tau_{q_{max}} + \tau_{t_{max}}\right)^2} \tag{103}$$

16. Festigkeitsnachweis

a) Dauerbruch

i. Ausschlagsfestigkeit/ ertragbare Spannungsamplitude

$$\sigma_A = \sigma_w \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_{v_m}}{R_m}} \tag{104}$$

σ_w $[\frac{N}{mm^2}]$: Schwingfestigkeit

ii. zulässige Ausschlagsspannung: (mit vorgegebenem Sicherheistsfaktor)

$$\sigma_{a_{zul}} = \frac{\sigma_A \cdot b_o \cdot b_s}{S_D} \tag{105}$$

Bedingung:
$\sigma_{va} \leq \sigma_{a_{zul}}$

- S_D [ ] : Sicherheitsfaktor $\approx$ 1,2-2,5
- Größenfaktor b_o

D[mm]	10	20	40	80	100	300	300
b_o	1,0	0,94	0,88	0,82	0,80	0,70	0,65

- latex aufzählung einstellen zahlen römisch a b cOberflächeneinflussfaktor b_s

poliert:	1,0-0,95
geschliffen:	0,99-0,85
geschlichtet:	0,96-0,83
feingeschliffen:	0,94-0,76
geschruppt:	0,9-0,63
grobgeschruppt:	0,86-0,45

iii. Sicherheitsfaktor gegen Dauerbruch: (Berechnung)

$$S_D = \frac{\tau_A \cdot b_o \cdot b_s}{\sigma_{va}} \tag{106}$$

b) Fließen in der Kerbe: (auf Bruch prüfen, wenn fließen zugelassen wird!)

i. Fließen

$$\sigma_{o_{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \tag{107}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{vo}} \tag{108}$$

S_F : Sicherheitsfaktor $\rightarrow$ 1,2-2

ii. Bruch

$$\sigma_{o_{zul}} = \frac{R_m}{S_B} \tag{109}$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{vo}} \tag{110}$$

S_B : Sicherheitsfaktor $\rightarrow$ 1,2-4

iii. Bedingung

$$\sigma_{vo} \leq \sigma_{o_{zul}} \tag{111}$$

17. Durchbiegung einer Welle

a) überkragendes Wellenende

$$f = \frac{F \cdot a^2 (l+a)}{3 \cdot E \cdot I} \tag{112}$$

$$\alpha = \frac{F \cdot a \cdot (2 \cdot l + 3a)}{6 \cdot E \cdot I} \tag{113}$$

$$\alpha_a = \frac{\alpha_B}{2} = \frac{F \cdot a \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \tag{114}$$

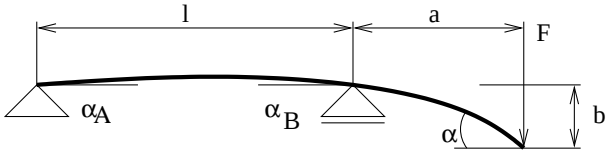


Abbildung 4: überkragendes Wellenende

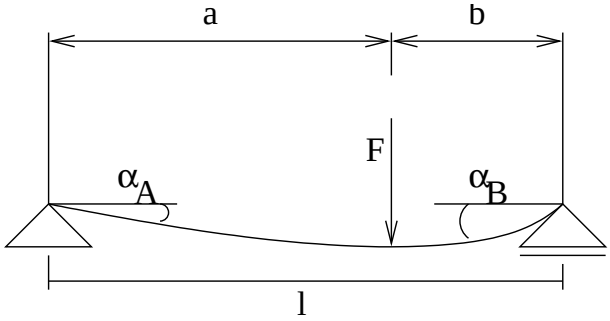


Abbildung 5: beidseitig gelagerte Welle

b) beidseitig gelagert

$$f = \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l} \tag{115}$$

$$\alpha_A = \frac{F \cdot a \cdot b \cdot (l+b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} \tag{116}$$

$$\alpha_B = \frac{F \cdot a \cdot b (l+a)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} \tag{117}$$

18. Verdrehwinkel

- Umrechnung Gradmaß/ Bogenmaß

$$\alpha_{grd} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha_{bog} \tag{118}$$

- Verdrehwinkel (in Bogenmaß):

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} = \frac{M_t}{G} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{I_i} \tag{119}$$

- Erforderlicher Wellendurchmesser für φ_{zul}:

$$d_{erf} = \sqrt[4]{\frac{5760 \cdot M_t \cdot l}{\pi^2 \cdot \varphi_{zul} \cdot G}} \tag{120}$$

φ_{zul} in Bogenmaß

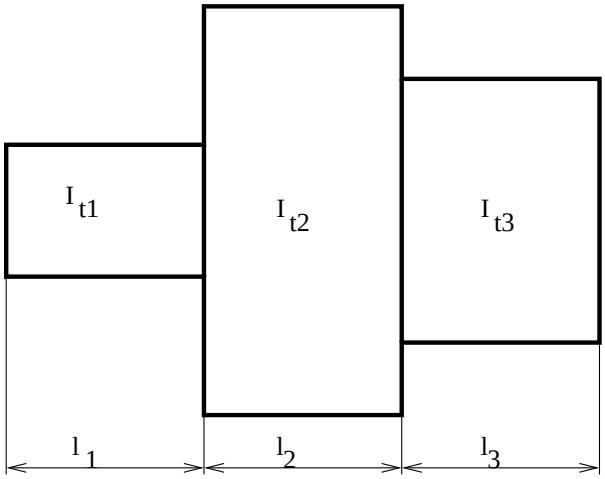


Abbildung 6: Welle

19. Biegeschwingung

a) Eigenfrequenz und Kritische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_K = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{121}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \tag{122}$$

$[\omega]=\frac{1}{s}$

- m [kg]: Masse
- c [?]: Federsteifigkeit
- g $[\frac{N}{mm^2}]$: Erdbeschleunigung($\approx 9,81 \frac{N}{mm^2}$)
- $f = \frac{G}{c}$ statische Durchbiegung

b) kritische Drehzahl

$$\begin{aligned} n_k &= \frac{30}{\pi} \cdot \omega_K && (123)\\ &= \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} && (124)\\ &= \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot g}{G}} && (125)\\ &= \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{f}} && (126) \end{aligned}$$

c) Fliehkraft

$$F_z = m \cdot r \cdot \omega^2 \tag{127}$$

r : Radius zum Schwerpunkt
r=(y+e)

d) Rückstellkraft

$$F_R = c \cdot y \tag{128}$$

e) Auslenkung

$$y = \frac{e \cdot \omega^2}{\frac{c}{m} - \omega^2} \tag{129}$$

für ω gegen kritische Winkelgeschwindigkeit geht y gegen unendlich

20. Torsionsschwingung

a) Torsionseigenfrequenz(allgemein)

$$\omega_0 = z \cdot \omega \tag{130}$$

z: Impulse pro Umdrehung // kritische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_K = \frac{\omega_0}{z} \tag{131}$$

b) Einseitig eingespannte Welle

i. Drehfeldkonstante

$$c = \frac{M_t}{\varphi} \tag{132}$$

$$= \frac{I_p \cdot G}{l} \tag{133}$$

mit

$$e = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G} \tag{134}$$

ii. Torsioneigenschwingfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{j}} = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{j \cdot l}} \tag{135}$$

iii. kritische Winkelgeschwindigkeit/Drehzahl

$$\omega_K = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{G \cdot I_p}{j \cdot l}} \tag{136}$$

$$n_k = \frac{30}{z \cdot \pi}\sqrt{\frac{G \cdot I_p}{j \cdot l}} \tag{137}$$

j: Massenträgheitsmoment $[kgm^2]$

c) Welle mit zwei Massen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G \cdot I_p (j_1 + j_2)}{j_1 \cdot j_2 \cdot l}} \tag{138}$$

$$\omega_K = \frac{\omega_0}{z} \tag{139}$$

$$n_K = \frac{30}{z \cdot \pi} \omega_0 \tag{140}$$

5 Lagerberechnung

1. Belastungsfall
   - Radial
   - Axial
2. Äußere Kräfte
   - F_{r_n} : Radialkräfte
   - F_{a_n} : Axialkräfte
   - Drehzahl
3. Äquivalente dynamische Lagerbelastung

   a)
   $$P = X \cdot F_r \cdot Y \cdot Fa \tag{141}$$

   b) Faktoren X/Y

      i. Lagerdaten
      - Faktor f_0 (Lagerkatalog)
      - Faktor e
      - statische Tragzahl C_{0r}
      - dynamischr Tragzahl C_r

      ii.
      $$\frac{f_0 \cdot F_a}{C_{0r}} \tag{142}$$

      iii.
      $$\frac{F_a}{F_r} \leq e \Rightarrow P = F_r \tag{143}$$
      $$\frac{F_a}{F_r} > e \Rightarrow P = X \cdot F_r \cdot Y \cdot Fa \tag{144}$$

      iv. Faktoren X/Y aus Tabelle $\Rightarrow$ Lagerkatalog
4. Erforderliche dynamische Tragzahl

   a) Art des Lagers
   - $p = 3$: Kugellager, Punktberührung
   - $p = \frac{10}{3}$: Rollenlager, Linienberührung

   b) erforderlicher dynamische Tragzahl
   $$C_erf = \sqrt[p]{\frac{L_{10h} \cdot 60 \cdot n}{10^6}} \ [N] \tag{145}$$

   L_{10h}: nominelle Lebensdauer (10.000h)

c) Bedingung

$$C_{erf} < C_r$$

d) ??? Formeln

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^p = \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow \left(\frac{C_{erf}}{P}\right)^p = \frac{L_{10}}{10^6} \tag{146}$$

$$c = \frac{f_l}{f_n} P \tag{147}$$

$L_{10} : L_{10h} \cdot 60 \cdot n$

5. Lebensdauer

a) Nominelle Lebensdauer in Stunden

$$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n} \left(\frac{C}{P}\right)^p \tag{148}$$

Bedingung: $L_h > L_{erf}$

b) Lebensdauer in Millionen Umdrehungen

$$L_10 = \left(\frac{C}{P}\right)^p \tag{149}$$

6. Zeitlich veränderliche Belastung und Drehzahl

$$P_m = \sqrt[3]{P_1^3 \cdot \frac{n_1}{n_m} \cdot \frac{q_1}{100} + P_2^3 \cdot \frac{n_2}{n_m} \cdot \frac{q_2}{100} + \dots} \tag{150}$$

- n_m: mittlere Drehzahl $= n_1 \frac{q_1}{100} + n_2 \frac{q_2}{100} + \cdots \left[\frac{1}{min}\right]$
- n_1, n_2: einzel Drehzahl
- q_1, 1_2: Wirkungsdauern in %
- p_1, p_2: einzel Belastungen

7. Erforderliche statische Tragzahl C_0

$$f_s = \frac{C_0}{p_0} \tag{151}$$

$$P_0 = X_0 \cdot F_r + Y_0 \cdot F_a \tag{152}$$

fs: statische Kennzahl

fs	Ansprüche
0,7-1	geringe Ansprüche
1,01-1,5	normale Ansprüche
1,5-2,5	hohe Ansprüche

8. Minimale Axialkraft bei Axiallagern

$$F_{A_{min}} \leq K \cdot \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \cdot \left(\frac{C_0}{1000}\right)^2 \tag{153}$$

   - K=0,08: Axialrillenkugellager
   - K=0,04: Axialpendelrollenlager

6 Klebeverdindungen

1. Beanspruchungsart festlegen
   - Zugbeanspruchung
   - Schälbeanspruchung
   - Scherbeanspruchung
2. Zulässige spannung

$$\tau_K = \frac{F}{A}$$