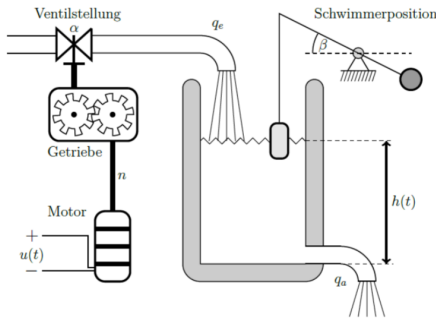


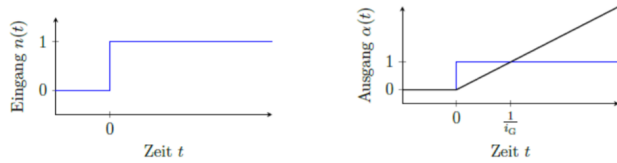
1. Einführung

Füllstand Wasserbehälter:

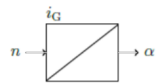


- Definition von Eingang (Zuflussstrom) $q_e(t)$, Ausgang (Füllstandhöhe) $h(t)$ und Störung (Abflussrate) $q_a(t)$

Spindel-Getriebe: konstante Drehzahl am Getriebe führt zu kontinuierlicher Veränderung der Ventilstellung (integraler Zusammenhang)



Symbolische Darstellung:

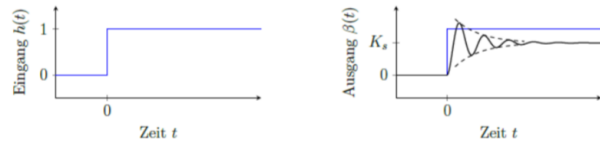


Differentialgleichung:

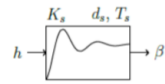
$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= i_G n \\ \alpha &= \int i_G n dt \\ \text{Integrator, I-Glied} \\ \text{Ein Parameter: Verstärkung } (\frac{1}{i_G}) \end{aligned}$$

Gerade, die auf Sprung eine Gerade folgt

Schwimmer zur Füllstandsmessung: auf sprunghafte Erhöhung des Füllstands reagiert der Schwimmer mit einer Auslenkung bei gleichzeitigen leicht gedämpften Schwingungen.



Symbolische Darstellung:



Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} T_s^2 \ddot{\beta} + 2 d_s T_s \dot{\beta} + \beta &= K_s h \\ \text{Verzögerungsglied 2. Ordnung, PT2-Glied} \\ \text{Drei Parameter: Zeitkonstante, Verstärkung, Dämpfung } (T_s, K_s, d_s) \end{aligned}$$

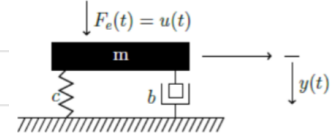
Das PT2-Modell für den Schwimmer ergibt sich aus einer Momentenbilanz:

$$J \ddot{\beta} = \underbrace{l \cos(\beta) m_G g - l \cos(\beta) m_S g + l \cos(\beta) F_A}_{\text{Momente der Gewichtskräfte}} + \underbrace{l \cos(\beta) F_A}_{\text{Auftriebskräfte}} - \underbrace{M_R}_{\text{Reibverluste}}$$

mit:

$$\begin{aligned} M_R &= -r \cdot \dot{\beta}, & (\text{viskose Reibung}) \\ F_A &= \rho g V_{\text{verdrängt}} = \rho g A_{\text{Schwimmer}} h_{\text{Eintauchtiefe}} \\ &= \rho g A_{\text{Schwimmer}} (h - l \sin \beta). & (\text{Auftriebskraft}) \end{aligned}$$

Feder-Masse-Dämpfer System:



F_e : erregende Kraft

Eingang: $u = F_e$, Ausgang: Massenposition $y = \varphi(t)$
Ordnung der DGL = doppelte Anzahl der Freiheitsgrade

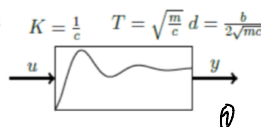
Newton: $m \cdot \ddot{y} = F_e - b \cdot \dot{y} - c \cdot y$

Struktur wie PT2-Glied: $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = F_e$

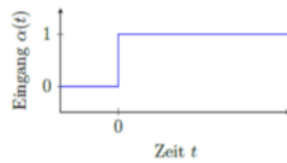
standardisierte Darstellung: $T^2 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot d \cdot T \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$

hier: $\frac{m}{c} \cdot \ddot{y} + \frac{b}{c} \cdot \dot{y} + y = \frac{1}{c} \cdot F_e$

Die Dynamik wird durch lineare gewöhnliche DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.



Ventil: Ventilstellung α wirkt sich unmittelbar auf den Durchfluss q_e aus (proportionaler Zusammenhang).



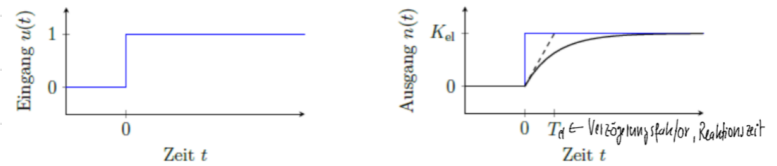
Symbolische Darstellung:



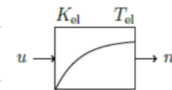
Gleichung:

$$\begin{aligned} q_e &= K_{\text{Ventil}} \alpha \\ \text{Verstärkungsglied, P-Glied} \\ \text{Ein Parameter: Verstärkung } (K_{\text{Ventil}}) \end{aligned}$$

Motor: reagiert auf Veränderung der Eingangsspannung leicht verzögert mit Drehzahländerung.



Symbolische Darstellung:



Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} T_{el} \dot{n} + n &= K_{el} u \\ \text{Verzögerungsglied 1. Ordnung, PT1-Glied} \\ \text{Zwei Parameter: Zeitkonstante, Verstärkung } (T_{el}, K) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Linearisieren ($\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$) ergibt sich:

$$J \ddot{\beta} = l g (m_G - m_S) + l p g A_{\text{Schwimmer}} (h - l \beta) - r \dot{\beta}$$

Vernachlässigt man den stationären Anteil $l g (m_G - m_S)$, so ergibt sich als Schwimmerdynamik:

$$J \ddot{\beta} + r \dot{\beta} + l^2 p g A_{\text{Schwimmer}} \beta = l p g A_{\text{Schwimmer}} h$$

Diese entspricht der allgemeinen PT2-Form mit den Parametern:

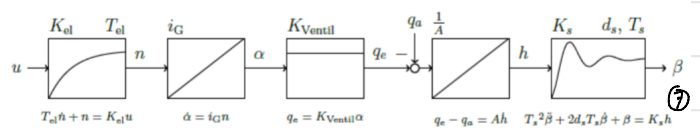
Stationärverstärkung: $K_S = \frac{1}{l}$

Zeitkonstante: $T_S = \sqrt{\frac{J}{l^2 p g A_{\text{Schwimmer}}}}$

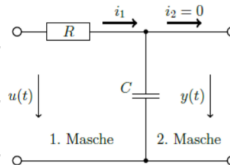
Dämpfung: $d_S = \frac{r}{2 \sqrt{J l^2 p g A_{\text{Schwimmer}}}}$

$$\ddot{\beta} + 2 d_S T_S \dot{\beta} + \beta = K_S h$$

- Es resultiert insgesamt folgendes Modell:



RC-Tiefpass



Ausgang hochohmig

Ordnung der DGL = Anzahl der Energiespeicher (hier Kondensator)

Kirchhoffsche Regel:

$$u = R \cdot i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt$$

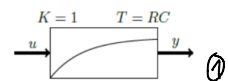
$$y = \frac{1}{C} \int i_1 dt \Rightarrow C \cdot \dot{y} = i_1$$

Struktur wie PT1 - Glied

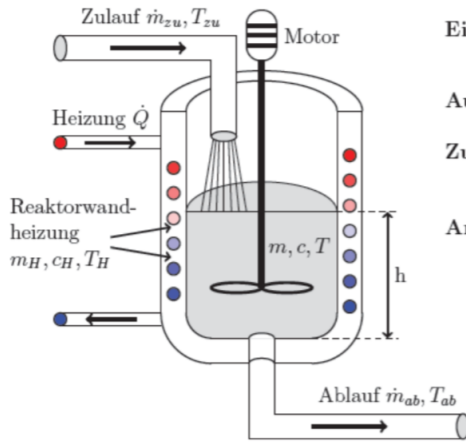
$$R \cdot C \cdot \dot{y} + y = u \quad \text{mit } T = R \cdot C$$

standardisierte Darstellung: $T \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$

Die Dynamik wird durch lineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung beschrieben.



Temperatur im Rührkessel:



Eingang: Heizung $\dot{Q}$, Zulufttemperatur T_{zu} ,
Zulaufstrom $\dot{m}_{zu}$

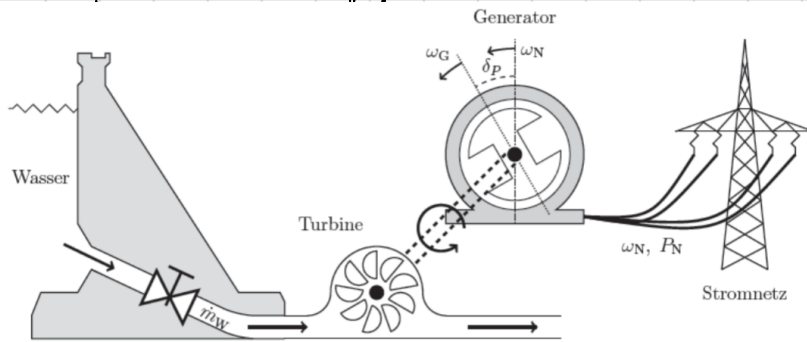
Ausgang: Reaktortemperatur T

Zustand: Füllstand h , Ablauf,
Wandtemperatur T_H

Annahmen: Füllstand h konstant
 $\dot{m}_{zu} = \dot{m}_{ab} = \text{const.}$

①

Wasserkraftwerk mit Polradschwungung



Eingang: Wasserdurchfluss $\dot{m}_W$, Netzdrehzahl ω_N

Zustände: Generator-drehzahl ω_G , Polradwinkel δ_P

Ausgang: Netzleistung P_N

①

2. Mathematische Modelle

Blockorientierte Modellbildung

- materielle Beschaffenheit Sys. für Behr. Dynamik & Analyse/Regelsynthese egal
- Modellbildung + Systemanalyse = Systemdynamik
- Modelle: Übertragsglieder aus DGLen konst. Koeff.
- Vorgehensweise: Systemzerlegung (Teilmodelle) → Komponentenmodelle → Kopplungsbeziehungen → Modellumformung

Eingänge

↓ Störungen

Ausgänge

- Analyse d. Lösung & Eigensch. (Stabilität)

$u(t)$

System $\Sigma(t)$

$y(t)$

- Reaktion System auf Anregungsskiz., Störung

Anfang DGL

interne Größen

Lösung DGL

- dynamisches System → Modellbildung

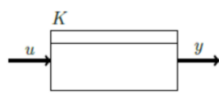
- wichtigste Blöcke / Übertragungsglieder

Proportionalglied

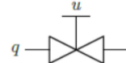
$$y = K \cdot u$$

$$Y(s) = K \cdot U(s)$$

Springung reinhen ~ Springung ausgehen



z.B. Ventil



Integrator

$$y = K \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

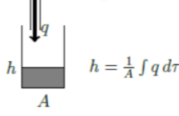
$$Y(s) = \frac{K}{s} \cdot U(s)$$

ein: konstant ~ aus: Gerade

ein: Gerade ~ aus: Parabel usw.



z.B. Speicher



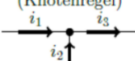
Summierglied

$$y = u_1 + u_2$$

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s)$$



z.B. elektrische Schaltung (Knotenregel)



Differenzierer

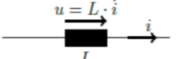
$$y = K \cdot \dot{u}$$

$$Y(s) = K \cdot s \cdot U(s)$$

Eingang wird abgeleitet



z.B. Induktivität



Totzeitglied (Delay) 0-Glied

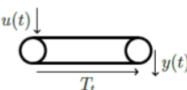
$$y = K \cdot u(t - T_t)$$

$$Y(s) = K \cdot e^{-T_t s}$$

Ausgang verzögert und mit Proportionalität behaftet



z.B. Förderband



PT1 -Glied

$$\dot{y} \cdot T + y = K \cdot u \quad (i)$$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot U(s)$$

Proportionalglied & Verzögerung 1. Ordnung

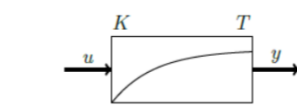
ein: u ~ aus: Lösung der DGL (i)

PT2 -Glied

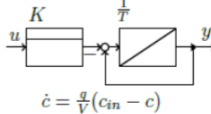
$$T^2 \cdot \ddot{y} + 2dT \cdot \dot{y} + y = K \cdot u \quad (1)$$

$$Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dT s + 1} \cdot U(s)$$

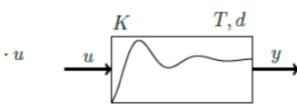
normieren um K, T & d zu bestimmen



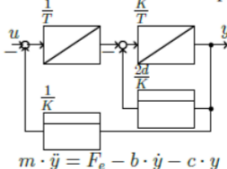
z.B. Reaktor-Verdünnung



$$\dot{c} = \frac{q}{V} (c_{in} - c)$$



z.B. Feder-Masse-Dämpfer



$$m \cdot \ddot{y} = F_e - b \cdot \dot{y} - c \cdot y$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Behr. Übertragungsglieder: DGLen, lineare ÜG: lineare, inhom DGL $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = \underbrace{b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)}_{u^*(t)}$
- Lösen DGL:

1. homogene DGL: $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$

Ansatz: $y(t) = C \cdot e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ Frequenz, C Amplitude → $a_n s^n + \dots + a_0 = 0$ (charakteristische Gl. des Systems)

$s_1, \dots, s_n$: Eigenwerte/Pole; $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, dann $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ oder komplex konj. → Lösung: $y_H(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t)$

einfache Pole EW/NS: $y_k(t) = C_k e^{s_k t}$; ϕ -fach: $y_{k+\phi-1}(t) = C_{k+\phi-1}(t) = C_{k+\phi-1} e^{s_k t}$

kompl. konj.: $y_k = C_k e^{(s_k + j\omega_k)t}$ und $y_{k+1} = C_{k+1} e^{(s_k - j\omega_k)t}$ oder $y_k = C_k e^{s_k t} \sin(\omega_k t)$ und $y_{k+1} = C_{k+1} e^{s_k t} \cos(\omega_k t)$

2. Anfangshed.en: $C_1, \dots, C_n$ so wählen, das (n-1) Zeitableitungen von $y_H(t)$ für $t=0$ zu Anfangshed.en passen

3. partikuläre (s.g.: Variation der Konstanten, inhom. DGL: $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = u^*(t)$

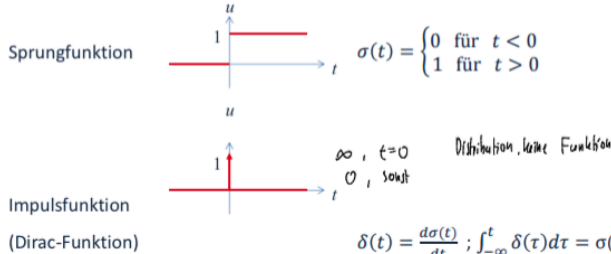
3.1: $y_k^*(t)$ so, das anstelle der AB aus 2. gilt: $y_k^*(0) = \dots = y_k^{*(n-1)}(0) = 0$ und $y_k^{*(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$

3.2: partikuläre (s.g.: $y_p(t) = \int_0^t y_k^*(t-\tau) u^*(\tau) d\tau$

3. Analyse linearer Übertragungsglieder im Zeitbereich

Beschreibung linearer Übertragungsglieder durch DGL

- Ziel Systemdynamik: Aussage Systemverhalten ohne Lösen der DGL
- part. Sys. linearer DGLs mit konst. Koeff.: Faltungsintegral $y_p(t) = \int_0^t \psi^*(t-\tau) u^*(\tau) d\tau$
 $\leadsto$ Ausgang $y(t)$ bei Eingang $u^*(t)$ ($u^*(t)=0$ für $t < 0$)
- kausales System: Impulsantwort verschwindet für $t < 0$
- es gilt: $y_p(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau = g(t) * u(t)$
- Impulsantwort $\psi^*(t) = g(t)$: Gewichtungs-fkt.; Ausgang, wenn am Eingang ein Impuls eingebracht wird
- Testsignale



- Linearität: $y(t) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $\mathcal{L}\{\cdot\}$ linear wenn: $\leadsto$ Superpositionsprinzip: $\mathcal{L}\{u_1(t) + u_2(t)\} = \mathcal{L}\{u_1(t)\} + \mathcal{L}\{u_2(t)\}$
 $\leadsto$ Homögenitätsprinzip: $\mathcal{L}\{\lambda \cdot u(t)\} = \lambda \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}$

ÜG schreibbar als $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t - T_e) + \dots + b_0 u(t - T_e)$, dann gilt

Linearitätshed: $\mathcal{L}\{\lambda_1 u(t) + \lambda_2 \hat{u}(t)\} = \lambda_1 \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} + \lambda_2 \cdot \mathcal{L}\{\hat{u}(t)\}$

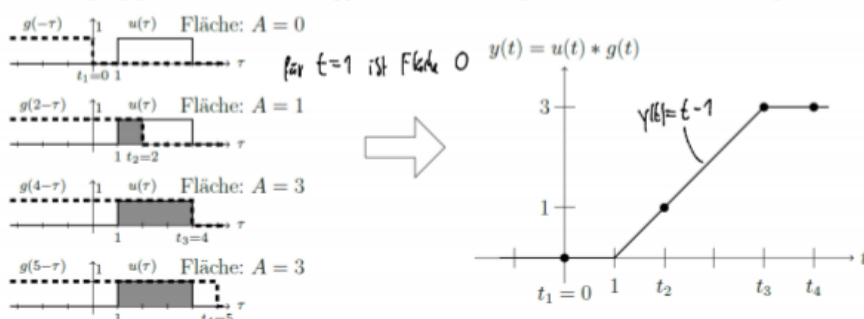
- Zeitinvarianz: $y(t) = \mathcal{L}\{u(t)\}$; $y(t - \tau) = \mathcal{L}\{u(t - \tau)\}$
- lin. DGL mit konst. Koeff.: lineare (Linear) zeitinvariante (Time Invariant) Systeme $\rightarrow$ LTI-(LTI-) Systeme
- Totzeitsystem: Bsp. Förderband: $y(t) = f(t - T_e)$

Übertragungsverhalten, Faltung und Linearität

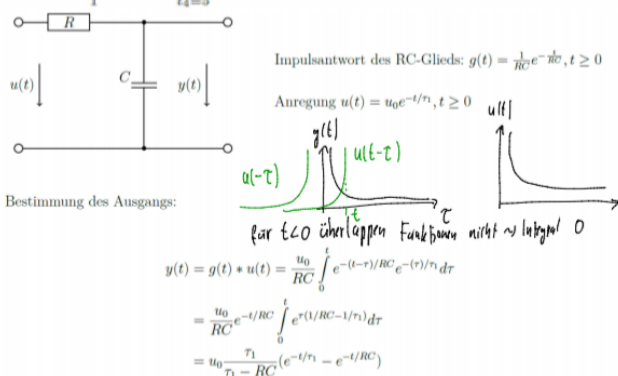
- Faltung ist kommutativ, assoziativ, distributiv
- neutrales Element: Dirac-Stoß (Impulsfunktion $\delta(t)$): $\int_{-\infty}^t g(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \delta(\tau) d\tau = g(t) \int_0^t \delta(\tau) d\tau = g(t)$
- Faltung: aus Anregung $u(t)$ Antwort $y(t)$ berechnen, Darstellung ÜG durch Impulsantwort $g(t)$
- Impulsantwort $g(t)$: $u(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = g(t)$
- Sprungantwort $h(t)$: $u(t) = \sigma(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau = h(t)$ $\left. \vphantom{\int_0^t g(\tau) d\tau} \right\} \frac{dh}{dt} = g(t)$

- Beispiel (Integration)

Da $u(t) \in \{0, 1\}$ ist, gilt entweder $u(\tau) \cdot g(t-\tau) = 0$ oder $u(\tau) \cdot g(t-\tau) = g(t-\tau)$. Dadurch kann die Faltung hier auch grafisch nachvollzogen werden. Dazu wird die Impulsantwort von links über die Anregung geschoben. Die überlappende Fläche stellt jeweils den Wert der Faltung dar:



- Beispiel RC-Glied



4. Analyse linearer Übertragungsglieder im Frequenzbereich

Laplace Transformation

- Eingang: komplexes Exponentialsignal $u(t) = e^{st}$; $s = \sigma + j\omega$, Ausgang: verdröhrt aber gleiche Frequenz, e^{st} Eigenfkt. der Sys .
- Ausgang: $y(t) = u(t) \cdot g(t) = G(s) \cdot e^{st}$ mit Übertragungsfunktion $G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt$
- $s = j\omega$: Fourier-Transform $G(s) = F\{e^{-st} g(t)\}$; FT nur berechenbar, wenn Imaginärachse im Konvergenzbereich
- Integral muss existieren, damit Laplace-Transform existiert
- umgeg. Laplace-Transformierte nicht ausreichend, um Ausgangsfkt. zu bestimmen

Eigenschaften der Laplace Transformation

- Linearität: $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$ $R_1 \cap R_2 \in ROC$; ROC: Region of Convergence
- Verschiebungssatz: $\sim$ Zeitbereich: $X(s) \rightarrow x(t)$, $ROC = R$; $x(t - t_0) \rightarrow e^{-st_0} X(s)$, $ROC = R$
 $\sim$ Bildbereich: $e^{st_0} x(t) \rightarrow X(s - s_0)$; $ROC = R + Re\{s_0\}$
- Differenzierungsregel: $\dot{f}(t) \rightarrow s F(s) - f(0^-)$; $\ddot{f}(t) \rightarrow s^2 F(s) - s f(0^-) - \dot{f}(0^-)$; $\ddot{\ddot{f}}(t) \rightarrow s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - s \dot{f}(0^-) - \ddot{f}(0^-)$
- Faltungsregel: $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$
 $x_1(t) * x_2(t) \rightarrow X_1(s) \cdot X_2(s)$: Laplace-Transform der Faltung zweier Fkt.en ist Produkt der einzelnen LTs

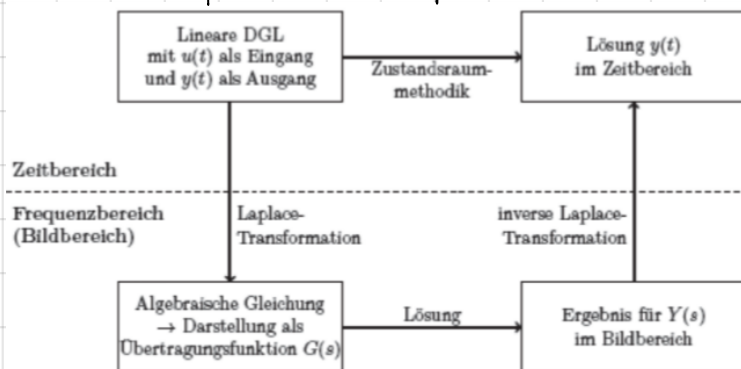
$u(t)$	$g(t)$	$u(t) * g(t)$
$U(s)$	$G(s)$	$U(s) \cdot G(s)$

- Grenzwertsätze: $\sim$ Anfangswertsatz: $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$
 $\sim$ Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$, falls Grenzwert von $x(t)$ existiert

Inverse LT: $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) ds$

Lösung der DGL mit Hilfe der Laplace Transformation

- Zeitbereich - Frequenzbereich (auch Laplace oder Bildbereich)



- lin. gewöhnliche DGL mit konst. Koeff.
 $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$

Transform mit Differenzierungsregel, Ausklammern $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}}_{\text{komplexe Übertragungsfunktion } G(s)} U(s) - \underbrace{\frac{b_m u(0) s^{m-1} + \dots + a_n y(0) s^{n-1}}{N(s)}}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

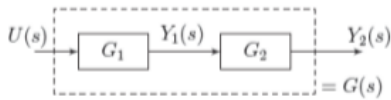
- $N(s)$: charakteristische Gl. der ursprüngl. DGL
- $G(s)$: komplexe Übertragungsfkt., LT der Gewichtsfkt.: $L\{g(t)\} = G(s)$
- $y_p(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau = g(t) * u(t) \rightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ ODE $\rightarrow$ gewöhnl. rat. Fkt. $F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$
 $\hookrightarrow$ wenn Anfangsbed. verschwinden
- Rücktransform: $G(s) = K \cdot \frac{Z(s)}{(s - d_1)(s - d_2) \dots (s - d_n)}$ $d_1, \dots, d_n$: Nullstellen von $N(s) \rightarrow$ Pole (reell oder konj. kompl.)

- Faktorierte Darstellung über PBT zur einfachen Rücktransform $F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$ $m < n$: echt gewöhnl. rat. Fkt. in s

- Lösung: DGL transformieren $\rightarrow$ nach $Y(s)$ umstellen $\rightarrow$ Anfangsbed. transformieren $\rightarrow$ einsetzen $\rightarrow$ Transform in Zeitbereich
- Verwendung Korrespondenztabelle & Verschiebungssatz

Übertragungsglieder und Grundschaltungen

Serienschaltung

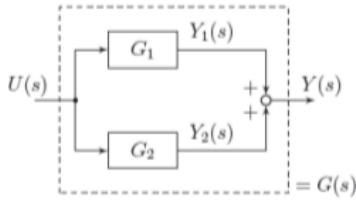


$$Y_1 = G_1 U, \quad Y_2 = G_2 Y_1, \\ Y_2 = \underbrace{G_2 G_1}_{G(s)} U. \\ G(s) = G_2(s) G_1(s)$$

o : addieren / subtrahieren

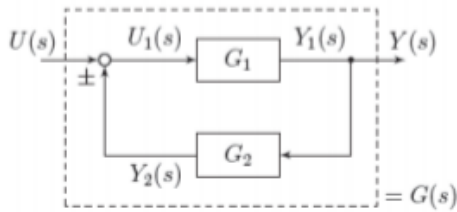
• : in allen Zweigen gleiche Größe

Parallelschaltung



$$Y_1 = G_1 U, \quad Y_2 = G_2 U, \\ Y = Y_1 + Y_2 = \underbrace{(G_1 + G_2)}_{G(s)} U. \\ G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Rückkopplung

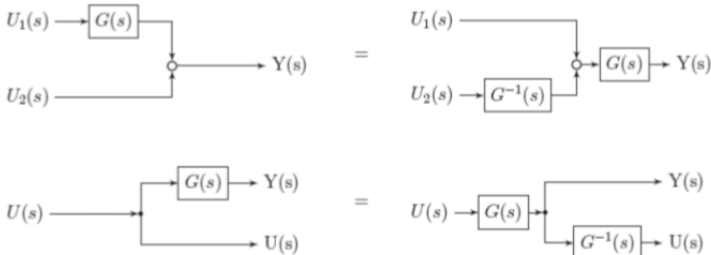


$$Y_1 = G_1 U_1, \quad U_1 = U \pm Y_2, \quad Y_2 = G_2 Y_1. \\ Y_1 = G_1 (U \pm G_2 Y_1), \quad Y_1 \mp G_1 G_2 Y_1 = G_1 U, \\ Y = Y_1 = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} U. \\ G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) G_2(s)}$$

Distributivgesetz / $Y = G(U_1 + U_2) = GU_1 + GU_2$



Einfügen von Inversen / $Y = GU_1 + U_2 = G(U_1 + G^{-1}U_2)$

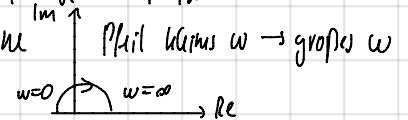


Frequenzdarstellung

- $G(s=j\omega)$: Frequenzgang = frequ.-abh. kompl. Verstärkung einer harmon. Anregungsfkt. $u(t) = A e^{j\omega t}$, am Ausgang Verschiebung in Amplitude & Phase: Sps. beschreiben mit lin. Dgl reagiert am Ausgang $y(t)$ auf eine harm. Anregung $u(t)$ der Frequenz ω mit einer harm. Fkt. gleicher Frequenz, die nur gemäß $G(s=j\omega)$ in Ampl. & Ph. verschoben ist

- Nyquist-Diagramm: Ortskurve Frequenzgang dynamischer Sps. in der komplexen Ebene

- schreiben als $G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))}$



$$\text{Amplitude } A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{G(j\omega)\} + \text{Im}^2\{G(j\omega)\}}$$

$$\text{Phase } \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}\right)$$

Ortskurve : Nyquist-Diagramm

logarithmisch $A(\omega)$ & $\varphi(\omega)$: Bode-Diagramm

- Nyquist-Diagramm Zeichnungsregeln

~ Schnittpt. Re- & Im-Achse : • $\text{Re}\{G(j\omega)\}|_{\omega=\omega_{n,i}} = 0 \rightarrow (\omega_{n,i}, 0)$ • $\text{Im}\{G(j\omega)\}|_{\omega=\omega_{n,i}} = 0 \rightarrow (\omega_{n,i}, 0)$

~ Koord., Ein- & Austrittsrichtung für $\omega=0$ & $\omega=\infty$ bestimmen

[oder einleiten, wenn $\arg(z) = n \cdot \frac{\pi}{2}$]

~ evtl. zusätzl. Pkt. für Kurvenverlauf

~ Kennz. in welche Richt. ω zunimmt

- allg. Ortskurven ggl. rat. Fkt.en $G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + \dots + a_n (j\omega)^n} \quad m \leq n$

1.) $\omega \rightarrow 0$: $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0}$ Startpunkt auf reeller Achse

integrierendes Verhalten mit Vielfachheit $p = n-1$: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_p} \cdot \frac{1}{\omega^p} e^{-j p \frac{\pi}{2}} \rightarrow$ Ortskurve aus ∞ mit Phasenwinkel $-p \frac{\pi}{2}$ bei integrierendem Verhalten

2.) $\omega \rightarrow \infty$: techn. Sup.: Verzögerungsverh. $m < n$ $A(\omega) \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$

i) $m=1, n>1$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_0}{a_n} \frac{1}{(j\omega)^n} = \frac{b_0}{a_n \omega^n} e^{-j n \frac{\pi}{2}} \rightarrow$ Ortskurve unter Winkel $-n \frac{\pi}{2}$ in den Ursprung

ii) $m < n, m > 1$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(j\omega)^m}{(j\omega)^n} = \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} = \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{\omega^{n-m}} e^{-j(n-m) \frac{\pi}{2}} \rightarrow$ Ortskurve unter Winkel $-(n-m) \frac{\pi}{2}$ in den Ursprung

Bodediagramm typischer Übertragungsglieder

- getrennt Darst. $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ über Frequenz ω $G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$
- Amplitudengang doppelt logarithmisch $A(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} A(\omega)$; $A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(G(j\omega)) + \operatorname{Im}^2(G(j\omega))}$
- Phasendiagramm in Grad mit logarithm. ω -Achse: $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(j\omega)}{\operatorname{Re}(j\omega)}\right)$

- Dezibel: $A(\omega)_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(\omega) = 10 \cdot \log_{10}(\omega^2)$ $\log_{10}(\omega) = 2 \sim \omega = 10^2 = 100$

$\sim$ 20dB: Zehnfachung, -20dB: Zehntel

$\sim \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

- P-Glied: $G(j\omega) = K$, $A(\omega)_{dB} = 20 \log K$ also waagrecht auf $20 \log K$ dB $\varphi = 0$ für $K > 0$ und $\varphi = -\pi$ für $K < 0$

Sprungantwort: $y(t) = K \cdot \delta(t)$

- I-Glied: $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$, $A(\omega)_{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow$ Schnittpunkt mit 0dB für $K = \omega$ und Abfall/Dekade von 20dB

Sprungantwort: $y(t) = \int_0^t K d\tau = K \cdot t$

- D-Glied: $G(j\omega) = K j\omega$, $A(\omega)_{dB} = 20 \log K + 20 \log \omega$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Sprungantwort: $y(t) = 2 \delta(t)$

- Totzeitglied: $G(s) = K_0 \cdot e^{-T_e s}$, $A(\omega)_{dB} = 20 \log |K_0|$, $\varphi(\omega) = -T_e \omega$ (Werte ausrechnen, dann zeichnen)

Sprungantwort: $y(t) = 2 G(t - 1s)$

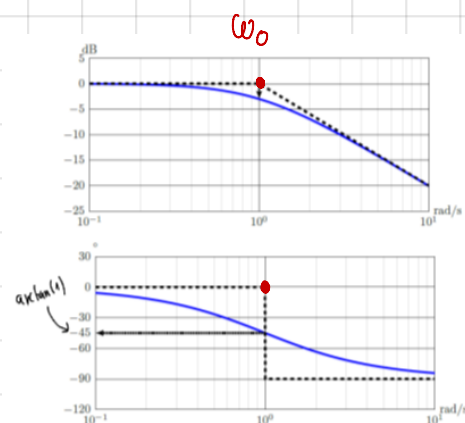
$\Rightarrow$ Berechnungen sind nur Approximationen!

- PT1-Glied: $G(j\omega) = \frac{K}{T_0 j\omega + 1} = \frac{K}{j \frac{\omega}{\omega_0} + 1}$ $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ (Eckfrequenz)

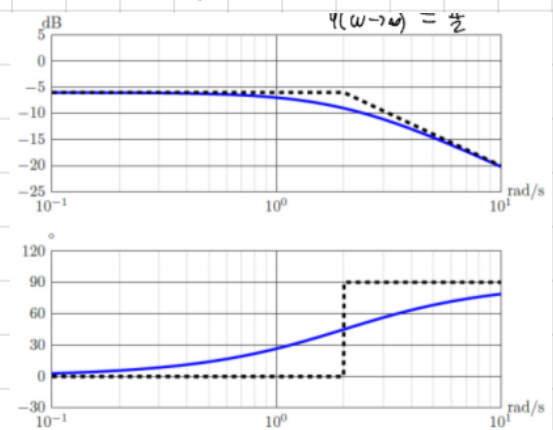
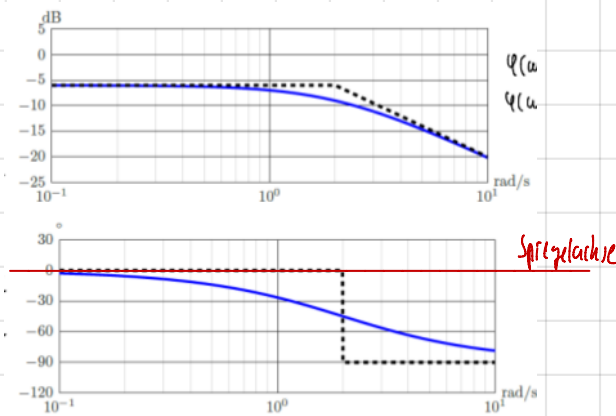
$G(j\omega) = \begin{cases} K & \text{für } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{K}{j \frac{\omega}{\omega_0}} & \text{für } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$

$A(\omega)_{dB} = \begin{cases} 20 \log K & \text{für } \omega \ll \omega_0 \sim \text{konst. Ampl. für kleine Frequ.} \\ 20 \log K - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} & \text{für } \omega \gg \omega_0 \sim \text{Gerade mit 20dB Abfall/Dekade} \end{cases}$
bzgl. Argument $\frac{\omega}{\omega_0}$

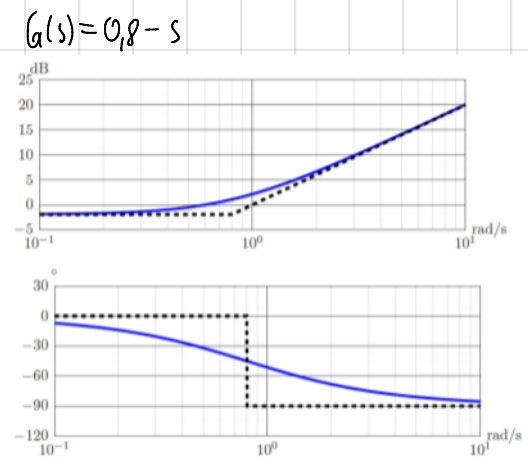
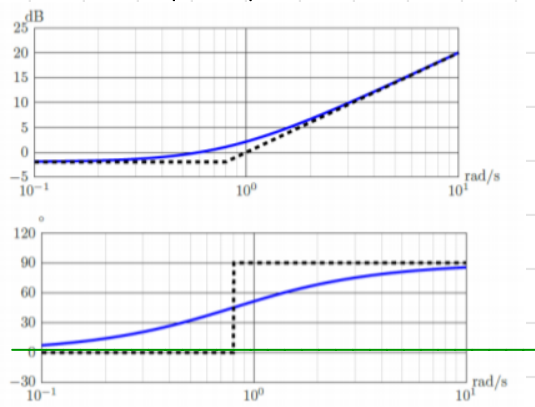
$\varphi(\omega) = -\arctan(T_0 \omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$; $\omega \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$; $\omega \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$



- Kombination mehrerer Übertragungsfunktionen: $G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$ mit $A_{dB} = 20 \log A_1 A_2 A_3 = A_{1dB} + A_{2dB} + A_{3dB}$
- Polstellen & Nullstellen vorzeichen haben keinen Einfluss auf Amplitude
- Vorzeicheneinfluss Polstelle: $G(s) = \frac{1}{2+s}$



- Vorzeicheneinfluss Nullstelle: $G(s) = 0,8+s$



- Allpass: Allpass mit Frequenzgang $G(j\omega) = 1(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ besitzt einen für alle Frequenzen ω konstanten Amplitudengang von $A(\omega)=1$ & einen frequenzabh. Phasengang $\varphi(\omega)$

~ $G(s)$ hat keine Nullstellen auf j -Achse

~ $G(s)$ besitzt symmetr. Pol-Nullstellen-Mengen: $\text{Re}(p_s) = -\text{Re}(n_s)$

~ Systeme mit Allpassanteil: unabh. Entwurf Amplituden- & Phasengang

~ Sys. mit Allpassanteil & reellen NS

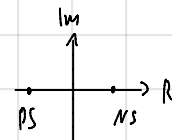
↳ inverse response behaviour: Differenzgrad $r = n - m \geq -1$ anfangs gg.läufiges Verhalten der Sprungantwort, $h(t)$:

$\text{sign} h^{(1)}(0) = -\text{sign} h(t \rightarrow \infty) \rightarrow$ Ausschlag in entgegengesetzte Richtung zum stationären Endwert

↳ kritisches Verhalten für Systeme mit Beschränkungen, z.B. mechanischen Antrieben

- Inner-Outer-Factorization: Zerlegung $G(s)$ in Minimalphasensystem $G_m(s)$ & Allpass $G_A(s)$

$$G(s) = G_m(s) \cdot G_A(s)$$



5. Stabilität und Zeitverhalten

Definition der Stabilität

- gilt jeweils für beliebige Anfangsbedingungen
- Asymptotische Stabilität: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$
- Instabilität: $|y(t)| \rightarrow \infty$
- Grenzstabilität (einfache Stabilität): $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq S$

Polkonfiguration und Zeitverhalten

- mit $s_k = \delta_k + i \cdot \omega_k \rightarrow$ nur Realteile relevant
- einfache Pole $\lim_{t \rightarrow \infty} y_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \delta_k < 0 \\ \text{beschränkt} & \text{für } \delta_k = 0 \\ \infty & \text{für } \delta_k > 0 \end{cases}$
- mehrfache Pole $\lim_{t \rightarrow \infty} y_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \delta_k < 0 \\ \infty & \text{für } \delta_k = 0 \text{ (da } y_k(t) = t^k \cdot e^{(\delta_k + i \omega_k)t} \text{)} \\ \infty & \text{für } \delta_k > 0 \end{cases}$

- konjugiert komplexe Polstellen gelten als einfache Pole

Kriterien zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität

- Hurwitzkriterium zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}, \quad N(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

$\sim$ Vorzeichenbed.: $a_i \in \mathbb{R}^+$, also alle > 0 ; wenn alle < 0 zuerst mit -1 durchmultiplizieren; falls $\text{sign}(a_i) \neq \text{sign}(a_j)$ ist das System nicht asympt. stabil

$\sim$ Hurwitzkrit.: $n \times n$ Hurwitzmatrix H mit $a_j = 0 \forall j > n \vee j < 0$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ & & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} n \text{ Zeilen}$$

n Spalten

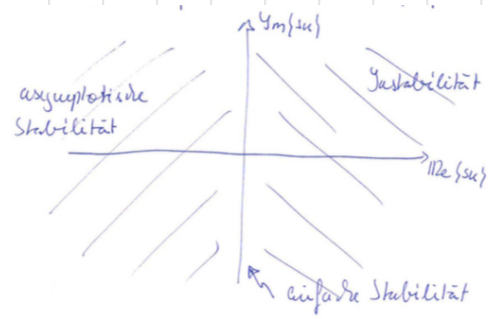
- System 3. Ordnung:

$$|H_1| = a_2 \rightarrow a_2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \rightarrow a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (1. \text{ BWS für } S_{\text{p.}} 3. \text{ Ord.})$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \rightarrow a_0 |H_2| > 0 \rightarrow a_0 > 0$$

$\rightarrow$ außer VZB muss für Systeme 3. Ordnung, nur Bedingung $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ erfüllt sein



2. Polkonfiguration und Zeitverhalten

sys

Pol-Nullstellen-Bild		Zeitverhalten
	Pole auf reeller Achse mit $\text{Re}\{s_k\} < 0$ asymptotisch stabil	
	einfacher Pol mit $\text{Re}\{s_k\} = 0$ grenzstabil	
	Pol mit $\text{Re}\{s_k\} > 0$ instabil	

2. Polkonfiguration und Zeitverhalten

sys

Pol-Nullstellen-Bild		Zeitverhalten
	konj. komplexes Polpaar mit $\text{Re}\{s_k\} < 0$ asymptotisch stabil	
	einfaches konj. komplexes Polpaar mit $\text{Re}\{s_k\} = 0$ grenzstabil	
	konj. komplexes Polpaar mit $\text{Re}\{s_k\} > 0$ instabil	

wenn VZ-Bed. erfüllt ist, ist System stabil, wenn alle Unterdeterminanten $|H_1| \dots |H_n| > 0$

- System 2. Ordnung:

$$|H_1| = a_1 \rightarrow a_1 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow a_0 a_1 > 0 \rightarrow a_0 > 0 \rightarrow \text{Vorzeichenüberprüfung reicht aus}$$

- System 4. Ordnung

$$|H_1| = a_3 \rightarrow a_3 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \rightarrow a_1 a_2 - a_1 a_4 > 0 \quad (1. \text{ BWS für } S_{\text{p.}} 4. \text{ Ord.})$$

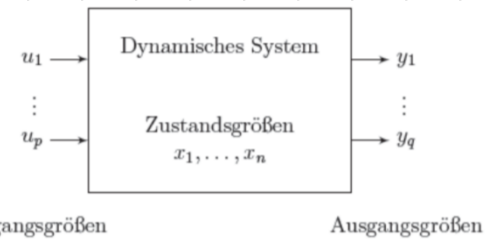
$$|H_3| = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \rightarrow a_1 |H_2| - a_0 a_3^2 > 0 \quad (2. \text{ BWS für } S_{\text{p.}} 4. \text{ Ord.})$$

$$|H_4| = \dots \rightarrow a_0 |H_3| > 0 \rightarrow a_0 > 0$$

6. Zustandsraummethodik

Einführung des Zustandsbegriffs

- eindeutige Best. Ausgangsgr. über Zustgr. & Eingangsgr.
- x heißt Zustand, wenn für $t_e \geq 0$ Elemente $x_i(0)$ von x zur Zeit $t=0$ zusammen mit Verlauf der Eingangsgrößen $u_i(\tau)$, $i=1, \dots, p$ für $0 \leq \tau \leq t_e$ den Wert $x(t_e)$ & den Wert der Ausgangsgr. $y_i(t_e)$, $i=1, \dots, q$ eindeutig bestimmen
- x : Zustandsvektor, x_i : Zustandsgrößen
- n DGLen 1. Ord., q algebraische Ausgangsgr. $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t)$ $t > 0$, $i=1, \dots, n$
 $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t)$ $t \geq 0$, $i=1, \dots, q$
- allg. nicht-lin. Zustandsraumdarstellung $\dot{x} = f(x, u, t)$, $t > 0$, $x(0) = x_0$ Zustandsgl.
 $y = g(x, u, t)$, $t \geq 0$, Ausgangsgr.
- CTI Systeme: $\dot{x} = A x + B u$ $t > 0$, $x(0) = x_0$ A : $n \times n$ -Systemmatrix B : $n \times p$ -Eingangsmatrix
 $y = C x + D u$ $t \geq 0$ C : $q \times n$ -Ausgangsmatrix D : $q \times p$ -Durchgangsmatrix
- CTI-Einzelgrößensysteme ($S(SO)$): $p=q=1$ b : Eingangs(spalten)vektor, c^T : Ausgangs(zeilen)vektor, d : Skalar
 $\dot{x} = A x + b u$ $t > 0$, $x(0) = x_0$
 $y = c^T x + d u$ $t \geq 0$



Aufstellen der Zustandsgleichungen

- aus Strukturbild: 1- p -Glieder: Ausgangs- sind Zustandsgrößen (x_1)
 $p+2$ -Glieder: Ausgangsgr. & innerer Zustand (x_1, x_2)
 kompliziert $\rightarrow$ Zerlegung
- direkt aus physikal. Gl.en: 1 Zust.gr. pro unabh. Energiespeicher (Kond., Spule, ...), mechan. Sys.: eine Zust.gr. pro Freiheitsgrad
- aus komplexer Übertragungsfunktion
- aus linearen Eingangs-Ausgangs-DGLen
- bei Ableitung aus Strukturbild: nur Differenzierer & Integrierer berücksichtigen & so verknüpfen
 Bsp. PT2: $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$
- Vorgehen aus Str.bild: $Y(s)$ & $G(s)$ auf eine Seite $\rightarrow$ Rücktrafo $\rightarrow$ Zustandsgr. einsetzen $\rightarrow$ Matrixschreiben für $\dot{x}$ & y
- aus kompl. ÜF: $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0}$, $m \leq n$ lin. Eingangsgrößenystem mit Polen $s_1, \dots, s_n$

I) alle Pole von $G(s)$ einfach:

PBZ: $Y(s) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-s_i} + r_0 \right) U(s)$ Wahl Zust.gr.: $x_i(s) = \frac{1}{s-s_i}$, $i=1, \dots, n$ $s x_i(s) = s_i x_i(s) + U(s)$

Rücktrafo: $\dot{x}_i(t) = s_i x_i(t) + u(t)$ $y(t) = \sum_{i=1}^n r_i x_i(t) + r_0 u(t)$

Zustandsdarstellung:
 in Diagonalfarm, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ $y(t) = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] x(t) + r_0 u(t)$
 x_i & Elemente von A
 und C evtl. komplexwertig

II) mehrfache Pole, hier s_1 mit Vielfachheit p_1

$$PBZ: Y(s) = \left(\frac{r_{p_1}}{s-s_1} + \frac{r_{p_1-1}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{r_1}{(s-s_1)^{p_1}} + \sum_{i=p_1+1}^n \frac{r_i}{s-s_i} + r_0 \right) U(s)$$

$$\text{Wahl Zust.-gr.: } x_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)^{p_1}} U(s) = \frac{1}{s-s_1} x_2(s) \quad x_{p_1}(s) = \frac{1}{s-s_1} U(s)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{(s-s_1)^{p_1-1}} U(s) = \frac{1}{s-s_1} x_3(s) \quad x_i(s) = \frac{1}{s-s_1} U(s) \quad i = (p_1+1), \dots, n$$

aus Rückf. folgt Zust. dant.:

Jordan-Block mit $\dim = p_1$ & 1

auf 1. Nebendiagonale

Pole mit Vielfachheit 1

=> JORDANsche Normalform

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{p_1+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{p_1} \ r_{p_1+1} \ \dots \ r_n] x(t) + r_0 u(t)$$

- DGL: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$ für $m < n$; $b_i = 0$ für $i = (m+1), \dots, n$

~> Regelung - Normalform:

$$\dot{x}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 - a_1 - a_2 \dots - a_{n-1} & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} x_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, b_2 - b_n a_2, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] x_R + b_n u$$

~> Beobachtung - Normalform

$$\dot{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ \dots \ 0 \ 1] x_B + b_n u$$

Linearisierung um den stationären Zustand

- Zust. gl.: $\dot{x} = f(x, u)$

Ausgangsgl.: $y = g(x, u)$

- stat. Zust. x_s mit $\dot{x}_s = 0$ (Ruhelage) für konst. $u_s = f(x_s, u_s) = 0 \rightarrow n$ nichtlin. alghv. Gl.en mit keiner/geraden einer/mehreren Lsg.en (jede Lsg. entspricht stat. Zust.); stat. Wert Ausgang: $y_s = g(x_s, u_s)$

- Abweichung von stat. Werten

- Jacobi-Matrizen

$$\Delta x_i = x_i - x_{s,i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Delta u_i = u_i - u_{s,i}, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{s,i}, \quad i = 1, \dots, q$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (\Delta x + x_s) = \Delta \dot{x} = f(\Delta x + x_s, \Delta u + u_s)$$

Die TAYLOR-Entwicklung um (x_s, u_s) (Existenz vorausgesetzt) lautet

$$\Delta \dot{x} = \underbrace{f(x_s, u_s)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{(x_s, u_s)} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{(x_s, u_s)} \Delta u + \dots$$

$$\Delta y + y_s = \underbrace{g(x_s, u_s)}_{=y_s} + \frac{\partial g}{\partial x} \bigg|_{(x_s, u_s)} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{(x_s, u_s)} \Delta u + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{(x_s, u_s)} = A$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{(x_s, u_s)} = B$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} \bigg|_{(x_s, u_s)} = C$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{(x_s, u_s)} = D$$

~> Zust.raumdarst. des linearisierten Systems

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

$$\Delta y = C \Delta x + D \Delta u$$

~> bei der Taylor-Entw. partiell nach allen verw. Variablen ableiten, also z.B. $\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} = \dot{x}$

Lösung der Zustandsgleichung

- Ausgangspunkt: Vektor-DGL lin. Sys.: $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), t > 0, x(t_0) = x_0$
- allg. Lösung der Zustandsgleichung: $x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{\text{hom. Lsg.}} x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{durch } u(t) \text{ determinierter Lsg.-teil}}, t \geq t_0$
mit Matrix-Exponentialfkt. e^{At}
- Ausgangsgrößen: $y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)}}_{\text{hom. Lsg.}} x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{durch } u(t) \text{ determinierter Lsg.-teil}} \quad C \cdot x(t)$
- Transitionsmatrix e^{At}

$$\leadsto e^{At} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A)^l t^l = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots$$

$$\leadsto \text{Eigenschaften: } \begin{aligned} & e^{A0} = I & (e^{At})^{-1} &= e^{A(-t)} & (e^{A(t-t_0)})^{-1} &= e^{A(t_0-t)} \\ & e^{A(t_2-t_1)} e^{A(t_1-t_0)} &= e^{A(t_2-t_0)} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Berechnung Transitionsmatrix: Gewichtsfkt. + Laplace-Transform, Ähnlichkeitstransform, Satz von Cayley-Hamilton, Sylvester-Formel, Laplace-Transform

$\leadsto$ Gewichtsfkt. & Laplace-Transform:

- für SISO mit $x(t_0) = 0$: $y(t) = \int_{t_0}^t c^T e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$
 $g(t) = c^T e^{At} b + d \delta(t)$

- Lösung im Bildbereich: $s x(s) - x_0 = A x(s) + b u(s)$

$$(sI - A) x(s) = x_0 + b u(s) \leadsto x(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} b u(s)$$

für $x_0 = 0$: $Y(s) = c^T (sI - A)^{-1} b u(s) + d u(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b + d$$

$\leadsto$ Ähnlichkeitstransform:

V : EV-Matrix (A diagonalisierbar) bzw. Hauptvektormatrix (falls A nicht diagonalisierbar) von A

$\tilde{A}$: auf Diagonal- bzw. Jordan-Form transformierte Matrix A

$$A = V \tilde{A} V^{-1} \leadsto e^{At} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (V \tilde{A} V^{-1})^l t^l$$

$$(V \tilde{A} V^{-1})^l = V (\tilde{A})^l V^{-1} \leadsto e^{At} = V \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\tilde{A})^l t^l \right) V^{-1} = V e^{\tilde{A}t} V^{-1}$$

A diagonalisierbar:

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda_1^i t^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda_n^i t^i \end{bmatrix} V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}$$

A nicht diagonalisierbar: $\tilde{A}$ Jordan-Form (Bsp.: λ_1 mit Vielfachheit p_1 & genau einem lin. unabh. EV v_1)

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{1}{(p_1-1)!} t^{p_1-1} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{1}{(p_1-2)!} t^{p_1-2} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_{p_1+1} t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}$$

V : Hauptvektormatrix

• $v_1 = v_{1,1}$ bestimmen:

$$(A - \lambda_1 I) v_{1,1} = 0$$

• $p_1 - 1$ Hauptvektoren $v_{1,i}, i=2, \dots, p_1$ bestimmen:

$$(A - \lambda_1 I) v_{1,i+1} = v_{1,i}; i=1, \dots, (p_1-1)$$

liefert dann die Transformatrix

$$V = [v_{1,1} \ v_{1,2} \ \dots \ v_{1,p_1} \ v_{p_1+1} \ \dots \ v_n]$$

$\leadsto$ Satz von Cayley-Hamilton: jede Matrix erfüllt ihre charakteristische Gleichung $\rightarrow A^i, i \geq n \in \{I, A, \dots, A^{n-1}\}$
 $e^{At} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A)^l t^l = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) (A)^l$; ges.: Zeitfunktionen $\alpha_l(t), l=0, \dots, (n-1)$

A diagonalisierbar: $p_A(\lambda) = p_{\tilde{A}}(\lambda)$:

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) (\lambda_i)^l, i=1, \dots, n$$

$\rightarrow n$ Bestimmungsgl. für $\alpha_l(t)$

A nicht diagonalisierbar: λ_1 mit Vielfachheit p_1 : $\alpha_l(t)$ aus Ableitungen:

$$\left. \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda t} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) (\lambda)^l \right) \Big|_{\lambda=\lambda_1}, k=0, \dots, (p_1-1)$$

→ Sylvester-Formel: nur wenn alle EWe verschieden

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} F_i \quad \text{mit} \quad F_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$$

→ Laplace-Transform

- hom. Zust. DGL betrachten: $\dot{x}(t) = Ax(t), t > 0, x(0) = x_0$
mit Lösung $x(t) = e^{At} x_0$
- LT: $X(s) = (sI - A)^{-1} x_0$
- Vergleich Lösungen liefert: $e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$

Stabilitätsverhalten und Zeitverhalten

- Stabilität: Eigenschaft Sys. auf beschränkt Anregung mit beschr. Bewegung zu reagieren
- asympt. Stabilität: ausgehen, wenn für $u(t) \equiv 0$ und bel. Anfangszust. $x(t_0)$: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
→ LTI(A, B) genau dann asympt. stb., wenn für alle EWe von A gilt: $\operatorname{Re} \{ \lambda_i \} < 0, i=1, \dots, n$
- lin. dynam. Sys. (A, B, C, D) stabil, wenn einfache λ von Sys. matrix A: $\operatorname{Re} \{ \lambda_i \} < 0$
mehrfache λ von A: $\operatorname{Re} \{ \lambda_i \} < 0$
- λ von A legen Fundamentallösungen fest

$\det(sI - A) = 0$; Nullstellen $s_1, \dots, s_n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{s_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \\ \text{beschränkt} & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} = 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} > 0 \end{cases}$$

Eigenwertlage		Zeitverhalten	Eigenwertlage		Zeitverhalten
	Eigenwerte auf reeller Achse mit $\operatorname{Re}\{s_k\} < 0$ asymptotisch stabil			konj. komplexes EW-Paar mit $\operatorname{Re}\{s_k\} < 0$ asymptotisch stabil	
	einfacher Eigenwert mit $\operatorname{Re}\{s_k\} = 0$ grenzstabil			einfaches konj. komplexes EW-Paar mit $\operatorname{Re}\{s_k\} = 0$ grenzstabil	
	min. ein Eigenwert mit $\operatorname{Re}\{s_k\} > 0$ instabil			min. ein konj. komplexes EW-Paar mit $\operatorname{Re}\{s_k\} > 0$ instabil	

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{s_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} = 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}\{s_i\} > 0 \end{cases}$$

Normalformen

- Zust. darst. nicht eindeutig: Ähnl. trrafo. mit beliebiger regulärer $(n \times n)$ -Matrix $T \rightarrow$ transform. Zust. $\tilde{x}$
 $\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t), \quad x(t) = T\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = T^{-1}x(t_0)$
 $\dot{\tilde{x}} = T\dot{x} = A \underbrace{T\tilde{x}}_{=\tilde{x}} + Bu$
 $\dot{\tilde{x}} = \underbrace{T^{-1}AT}_{=\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{T^{-1}B}_{=\tilde{B}} u$
 $y = \underbrace{CT}_{=\tilde{C}} \tilde{x} + Du.$

→ Eigenwerte nicht veränderbar mit Ähnl. trrafo.

→ $p_A(\lambda) = p_{\tilde{A}}(\lambda)$ (gleiches char. Pol.)

→ wenn A den EV λ besitzt, so ist $T^{-1}v$ EV der transform. Matrix $\tilde{A}$ zum gleichen EW

→ Sys. eigensch. wie Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit sind ggü. der Trrafo invariant

transformierten Zustandsgleichungen lauten somit

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad \tilde{x}(t_0) = T^{-1}x_0$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} + Du.$$

- Kanonische NF: $\tilde{A}$ Diagonal- bzw. Jordan-Matrix

→ (n,n) -Matrix A n EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die sich aus char. Gl. ergeben: $\det(\lambda I - A) = a^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

→ zu jedem EW λ_i : (Recht-)EV v_i : $Av_i = \lambda_i v_i \rightarrow (A - \lambda_i I)v_i = 0, i=1, \dots, n$

→ (n,n) -EV-Matrix $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$; V regulär, wenn v_i lin. unabh. EV-Matrix V^{-1} : links-EV von

~ A diagonalisierbar: V Transformatrix: $\underline{x} = V \tilde{x}$, dann ist $\tilde{A} = V^{-1} A V$ (die transformierte Sym. Matrix) eine aus den EWen λ_i gebildete Diagonalmatrix

~ A nicht diagonalisierbar: λ_n mit Vielfachheit p_1 & genau einem lin. unabh. EV $v_1, \dots, v_{p_1}$, dann Hauptvektormatrix als Transformatrix (Bestimmung s. „Ähnlichkeitsrafo“) $\rightarrow$ transformierte Symmetrische $\tilde{A}$ besitzt Jordan-Form

~ Zustandsgl. der kontinuierl. NF (mit V EV- & HV-Matrix):

$$\dot{\tilde{x}} = V^{-1} A V \tilde{x} + V^{-1} B u, \quad \tilde{x}(0) = V^{-1} x_0$$

$$y = C V \tilde{x} + D u$$

~ kontinuierl. NF nicht eindeutig, da mit v_i auch λv_i EV von A

- Regelungs-NF

Die Regelungs-Normalform mit einer Systemmatrix in FROBENIUS-Form

$$\dot{x}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad b_2 - b_n a_2 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] x_R + b_n u$$

wird für ein beliebiges lineares Eingrößensystem mit der Zustandstransformation

$$\dot{x}_R = T_R^{-1} \dot{x}$$

und der Transformationsmatrix

$$T_R = \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T A \\ \underline{s}_R^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

erhalten. Dabei bezeichnet $\underline{s}_R^T$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{s}_R^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]^{-1}$$

Die Regelungs-Normalform wird auch als Steuerungs-Normalform 2. Art bezeichnet.

- Beobachtung-NF

$$\dot{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x_B + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ \dots \ 0 \ 1] x_B + b_n u$$

wird für ein beliebiges lineares Eingrößensystem mit der Zustandstransformation

und der Transformationsmatrix

$$T_B = [\underline{s}_B \ A \underline{s}_B \ A^2 \underline{s}_B \ \dots \ A^{n-1} \underline{s}_B]^{-1}$$

erhalten. Dabei bezeichnet $\underline{s}_B$ die letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{s}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} A \\ \underline{C} A^2 \\ \vdots \\ \underline{C} A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtungs-Normalform wird auch als Beobachtungs-Normalform 2. Art bezeichnet.

- Steuerbarkeits- & Beobachtbarkeitsmatrix müssen regulär (nicht-singulär, invertierbar) sein, sonst keine Trrafo möglich