

Elektrotechnik 1

Elektrischer Gleichstrom

Elektrische Ladung (Elektrizitätsmenge)

Elementarladungen $q_{\pm} = \pm 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ Proton / Elektron

elektrische Ladung Q : $[Q] = 1 \text{ C (Coulomb)} = 1 \text{ As (Amperesekunde)}$

Elektrostatik: Lehre von den ruhenden Ladungen

Elektrodynamik: Lehre von den bewegten Ladungen

Elektrische Leiter

Metalle (Cu, Al), Flüssigkeiten (Hg, H₂O mit Salzen), Gase (Nichtleiter, außer ionisiert), Supraleiter (kein Widerstand wenn Temp. niedr.)

Halbleiter

wenige bewegliche Ladungsträger, Leitfähigkeit stark temperaturabhängig

Nichtleiter (Isolatoren)

fast keine freien Ladungsträger

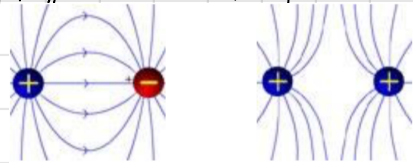
Elektrische Feldstärke

Raum, in dem Kräfte auf Körper einwirken: Kraftfeld; Ursache elektr. Feld: ruhende elektr. Ladung

magn. Feld: bewegte elektr. Ladung (Ströme)

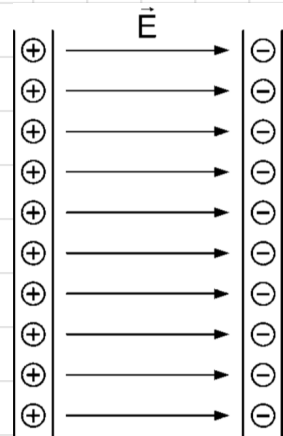
Kraft auf Ladungsträger in elektr. Feld, die Ladung & Stärke des elektr. Felds proportional ist $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ (1.1)

$[E] = 1 \text{ V m}^{-1}$



elektr. Feldlinien

homogenes elektr. Feld



Elektrische Spannung

elektr. Spann. U : Ursache elektr. Feldstärke

(1.2) $U = E \cdot l$ Leiterlänge $[U] = 1 \text{ V (Volt)}$

Spann.quellen U_q : erzeugen e^- -Überschuss an negativer & e^- -Mangel an positiver Klemme $U_q \downarrow \oint$

Spann.richtung: + nach - $\sim$ Zählpfeil

Spannung: Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ zw. zwei Punkten: $U_{12} = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Potential: Spannung gegen festen Bezugspunkt (z.B. Erde)

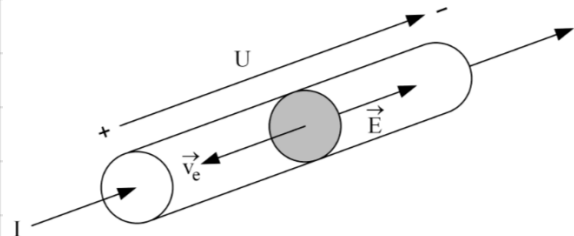
Elektrische Stromstärke

elektr. Strom: gerichtete Bewegung von Ladungsträgern unter Einfluss von Spannung

elektr. Stromstärke: Ladung, die pro Zeiteinheit durch Leiter fließt

$I = \frac{Q}{t}$ (1.3) stationärer Strom $i = \frac{dq(t)}{dt}$ (1.4) zeitlich veränderlicher Strom

positive Stromrichtung (Strompfeil in Schaubildern) entgegengesetzt der tatsächlichen Elektronenbewegung im Leiter

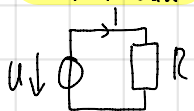


Stromdichte

$S = \frac{I}{A}$ (1.5) $[S] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$
A ← Leiterquerschnitt

Ohmsches Gesetz

$U = R \cdot I$ (1.6)
↑ Widerstand



Elektrischer Widerstand, spezifischer Widerstand, Leitwert

Ursache Widerstand: Reibungskraft auf e^- bei Bewegung im Metall

$$[R] = \Omega (\text{Ohm}) = 1 \text{ V A}^{-1}$$

$$E = \rho \cdot l \quad (1.7) \quad \rho: \text{spezifischer Widerstand } [\rho] = 1 \Omega \text{ m}$$

langer gerader Leiter Länge l , Querschnitt A : $R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (1.8)$

Temperatur nimmt zu $\rightarrow$ Widerstand nimmt zu: $\rho(\vartheta) = \rho_{20}(1 + \alpha_{20} \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C}))$

$$R(\vartheta) = R_{20}(1 + \alpha_{20} \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C}))$$

α_{20} : Temperaturkoeffizient des Widerstands

ϑ : Temperatur in $^\circ\text{C}$; $\alpha \approx 0,004 \text{ K}^{-1}$

spezifische Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (1.9) \quad [\sigma] = \frac{\text{S}}{\text{m}} \left(= \text{A/V} \right)$

ohmscher Gesetz mit elektr. Leitwert G : $I = G \cdot U \quad (1.10)$ mit $G = \frac{1}{R} \quad [G] = \text{S}$

Elektrische Arbeit und Leistung

Arbeit zur Bewegung von Ladung im elektr. Feld

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \sim W = Q \cdot U \quad (1.11) \quad \text{da Wegintegral elektr. Feldstärke Spannung } U$$

$$[W] = 1 \text{ joule bzw. } 1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

elektr. Arbeit in ohmschen Widerständen in Wärme umgesetzt $\rightarrow$ Temperaturerhöhung $\rightarrow$ elektr. Leistung P ist pro Zeiteinheit geleistete

elektr. Arbeit $P = \frac{W}{t} = \frac{Q}{t} \cdot U = I \cdot U \quad (1.12) \quad P = I^2 R \quad (1.13) \quad P = \frac{U^2}{R} \quad (1.14) \quad [P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ VA} = 1 \text{ W (Watt)}$

Kennzeichnung des Gleichstromkreises und Zählpfilsysteme

Zählpfeile: positive Zählrichtung zu einem Umlaufsinn

Spannungspfeil an Quelle: Von + nach -, Strompfeil entgegengerichtet

Verbraucher: Strom- & Spannungspfeile in gleiche Richtung

Knoten: Verzweigungspunkt, an der mindestens drei Ströme zu bzw. abfließen

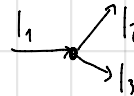
Zweig: Verbindung zwischen zwei Knoten

Masche: geschlossener Pfad in Netzwerk, der sich selbst nicht schneidet, d.h. jeder Knoten nur ein Mal durchlaufen

Erstes Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)

Summe aller Ströme ist unter Berücksichtigung der Vorzeichen gleich 0

eingehende Ströme: +, abgehende: - $\sum_k I_k = 0 \quad (1.15)$



Zweites Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

jeder Zweig nur einmal durchlaufen, Summe aller Teilspannungen in einer Masche ist 0 $\sum_m U_m = 0 \quad (1.16)$

Umlaufsinn beliebig festgelegt, Teilspannungen im Umlaufsinn: +, gegen Umlaufsinn: -

Berechnung von Gleichstromnetzen mittels Kirchhoffscher Gesetze

1. Ersatzschaltbild zeichnen

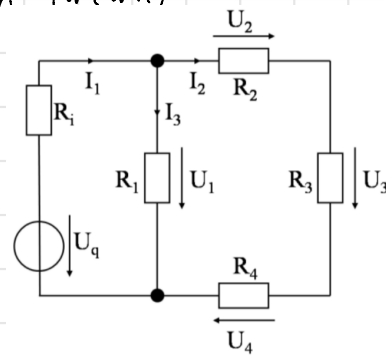
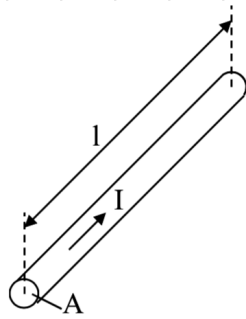
2. Quellspannung(en), Strom- & Spannungspfeile einzeichnen

3. Knotenregel, Maschenregel & Ohmsches Gesetz so oft anwenden, bis genügend unabhängige Gleichungen zur Berechnung vorhanden

Für jedes Netzwerk: $(k-1)$ unabhängige Knotengleichungen & $z-(k-1)$ unabhängige Maschengleichungen

↑ Anzahl der Knoten

↑ Anzahl der Zweige

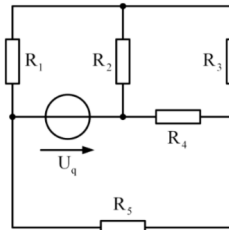


Aufstellung eines linear unabhängigen Gleichungssystems

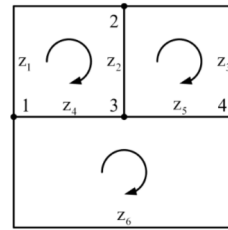
topologische Struktur: nur bestehende Verbindungen zwischen Knoten durch Linien

Bestimmung der Maschengleichungen:

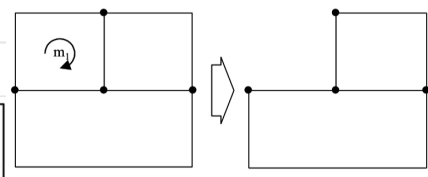
Maschengleichung 1. Masche aufstellen, dann Zweig in Masche gedanklich weglassen; weitere Masche usw.



a) Netzwerk

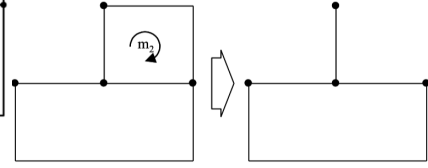


b) Struktur
k = 4 Knoten (1 ... 4)
z = 6 Zweige (z1 ... z6)



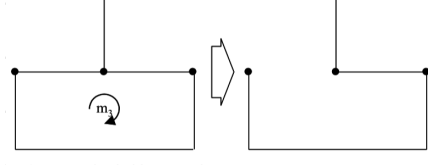
a) Netzwerk mit erster Masche

b) Erstes Restnetzwerk



c) Netzwerk mit zweiter Masche

d) Zweites Restnetzwerk



e) Netzwerk mit dritter Masche

f) Drittes Restnetzwerk

Reihenschaltung und Spannungsteilerregel

Reihenschaltung von k Widerständen:

$$R_e = \sum_k R_k \quad (1.17)$$

durch alle Widerstände fließt der gleiche Strom I

Spannungsteilerregel: für Teilspannungen an den Widerständen gilt:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} \quad \text{verhalten sich proportional zu den Widerständen}$$

Parallschaltung und Stromteilerregel

Parallschaltung von k Widerständen:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad (1.19)$$

alle Widerstände liegen an der selben Spannung U an

Stromteilerregel: für Teilströme in Widerständen gilt: Verhalten sich umgekehrt proportional zu Widerständen

$$\frac{I_1}{R_1} = \frac{I_2}{R_2} = \frac{I_3}{R_3} \quad (1.20)$$

Charakterisierung realer Spannungsquellen

- reale Spannungsquellen: Spannung sinkt mit steigendem Strom $\sim$ Innenwiderstand R_i

$$R_i = \frac{U_q}{I_k} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad \text{I}_k: \text{Strom im "virtuellen" Kurzschluss} \quad \text{Klemmenspannung } U: U = U_q - R_i \cdot I \quad (1.22)$$

Methode der Ersatzspannungsquelle

- wenn in kompliziertem Netzwerk nur Ströme & Spannungen eines einzelnen Zweiges berechnet werden sollen

- 1. Schritt: interessierenden Zweig mit Klemmen 1 & 2 herausnehmen

Ersatzleerlaufspannung bestimmen

$$\leadsto U_q' = U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_i} \quad (1.23)$$

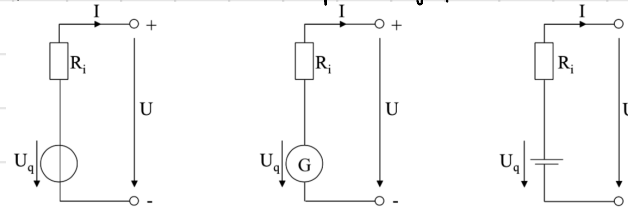
- 2. Schritt: Stromkreis 1-2 kurzschließen, I_k' bestimmen

$$I_k' = \frac{U_q'}{R_i} \quad (1.24)$$

- Restnetzwerk durch Reihenschaltung aus U_q' & R_i' ersetzen mit Innenwiderstand $R_i' = \frac{U_q'}{I_k'} = \frac{R_i \cdot R_1}{R_i + R_1}$

$$I_2 = \frac{U_q'}{R_i' + R} \quad (1.25)$$

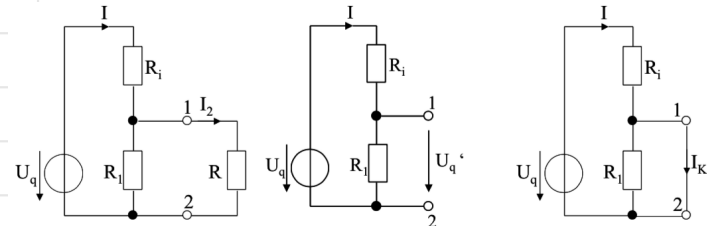
Ersatzschaltbilder realer Spannungsquellen:



a) Allgemein

b) Generator (Gleichstrommaschine)

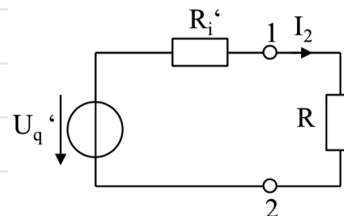
c) Batterie



a) Ausgangsschaltung

b) 1. Schritt

c) 2. Schritt



Überlagerungssatz

- lineares Netzwerk, mehrere Spannungs- o. Stromquellen $\leadsto$ deren Wirkung darf linear überlagert werden
- Vorgehen:
 1. alle Quellen bis auf eine herausnehmen & Netzwerkgleichungen für Teilsystem lösen
 - $\leadsto$ inaktive Spannungsquellen: Innenwiderstand $0 \leadsto$ in Teilsystem durch Kurzschluss ersetzen
 - $\leadsto$ inaktive Stromquellen: Innenwiderstand $\infty \leadsto$ Verbindung aus Teilsystem entfernen $\leadsto$ Leerlauf
 2. Ergebnis durch Addition aller Teilergebnisse

2 Wechselstrom

- Wechselstrom: Strom der periodisch Größe & Richtung wechselt & dessen zeitlicher Mittelwert 0 ist, Wechselspann.: analog
 zeitlich veränderliche Größen, sinusförmige Wechselgrößen

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (2.1) \quad u: \text{Momentanwert der Spann.}; \hat{u}: \text{Scheitelwert d. S.}; \varphi_u: \text{Phasenwinkel d. S.}; \omega: \text{Kreisfrequenz}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2) \quad [\omega] = 1 \text{ s}^{-1} \quad f: \text{Frequenz (Zahl der Sinusschwingungen pro Zeiteinheit)}, [f] = \text{Hz} = 1 \text{ s}^{-1} \\ T: \text{Periodendauer (Länge einer Sinusperiode)}, [T] = 1 \text{ s}$$

$$\text{Wechselstrom: } i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2.3)$$

Zeigerdarstellung von Wechselgrößen

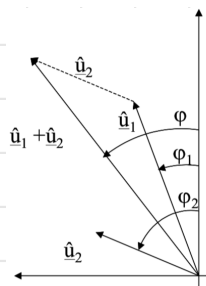
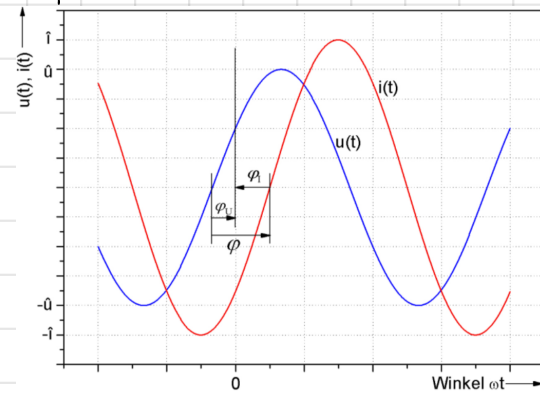
- Zeigerdarstellung für Wechselstromkreise, die nur eine Frequenz aufweisen & bei denen Zeitabhängigkeit harmonisch (sinusförmig) ist
- Stromvektor: Länge $\hat{i}$, Winkel φ_i ggü. Referenzachse
- keine Berücksichtigung d. Zeitabhängigkeit, da alle Ströme & Spannungen in Schaltung gleiche Zeitabhängigkeit aufweisen

→ Zeiger: symbolische Größen, durch die Amplitude & Nullphasenwinkel des entsprechenden sinusförmigen Wechselvorgangs ausgedrückt werden

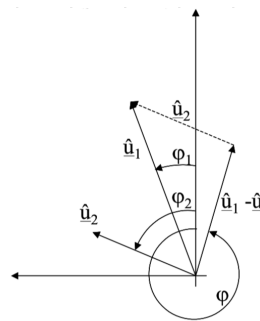
→ Unterscheidung von anderen Größen: Unterstrich

→ Zeigerlänge: Amplitude der Wechselgröße

→ Orientierung 1. Zeiger willkürlich (Ordinate / Abszisse)



Addition von Zeigern



Subtraktion von Zeigern

Berechnung von elektrischen Netzwerken in Zeigerdarstellung

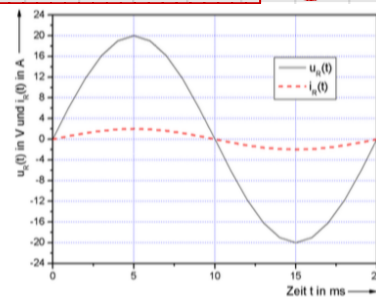
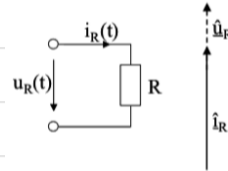
Ohmscher Widerstand

$$\text{Ohmsches Gesetz } u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (2.4) \quad \sim \quad \hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R \quad (2.5) \quad \text{und } \varphi_u = \varphi_i \quad \text{oder } \varphi_c = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ \quad (2.6)$$

$$\text{mit Zeigerdarstellung } \hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R \quad (2.7) \quad \hat{u}_R: \text{Amplitudenzeiger}$$

- Bild: Strom- & Spannungsverlauf an ohmschem Widerstand

$$\hat{u} = 20 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}, R = 10 \Omega$$



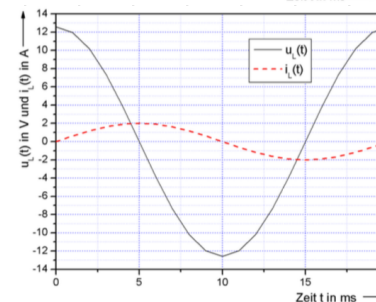
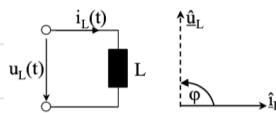
Induktivität L (ideale Spule)

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.8) \quad \hat{u}_L = \omega \cdot L \cdot \hat{i}_L \quad (2.9) \quad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \quad (2.10) \\ \text{oder } \varphi_c = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$$

Spannung eilt Strom in idealer Spule um 90° voraus, $[L] = \text{H (Henry)} = 1 \text{ Vs} \cdot \text{A}^{-1} = \Omega \text{ s}$

$$X_L = \omega L \quad Y_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} \quad X_L: \text{induktiver Blindwiderstand} \quad Y_L: \text{induktiver Blindleitwert} \quad (2.11)$$

$$[X_L] = \Omega \quad \hat{u}_L = X_L \cdot \hat{i} \quad \hat{i}_L = Y_L \cdot \hat{u}_L \quad (2.13)$$



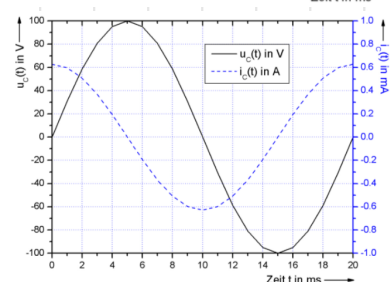
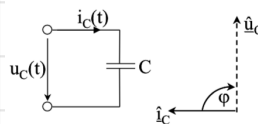
Kapazität C (Kondensator)

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.14) \quad \hat{i}_C = \omega \cdot C \cdot \hat{u}_C \quad (2.15) \quad \varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2} \quad \text{oder } \varphi_c = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ \quad (2.16)$$

Spannung eilt Strom an idealem Kondensator um 90° nach $[C] = \text{F (Farad)} = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{As} \cdot \text{V}^{-1} = \text{s} \cdot \Omega^{-1}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad Y_C = \omega C \quad (2.17) \quad X_C: \text{kapazitiver Blindwiderstand} \quad Y_C: \text{kapazitiver Blindleitwert} \quad [X_C] = \Omega$$

$$\hat{u}_C = X_C \cdot \hat{i}_C \quad (2.19) \quad \hat{i}_C = Y_C \cdot \hat{u}_C \quad (2.20)$$



Berechnung von Wechselstromschaltungen

- frequenzabhängige Wechselstromwiderstände (Blindwiderstände) neben ohmschen Widerständen (Wirkwiderständen)

$$\hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R \quad (2.21) \quad \hat{u}_L = X_L \cdot \hat{i}_L \quad (2.22) \quad \hat{u}_C = X_C \cdot \hat{i}_C \quad (2.23)$$

- Reihenschaltung: Spannungsabfälle an R, L, C (somit deren Impedanzen R, Z_L, Z_C) vektoriell addiert
- Gesamtspann.: Wirkanteil parallel zum Strom, Blindanteil senkrecht zum Strom

- Wirkkomponente U_w & Blindkomponente U_b aus Zeigerdiagramm:

$$(2.24) \quad \hat{u}_w = \hat{u} \cdot \cos \varphi \quad \hat{u}_b = \hat{u} \sin \varphi \quad (2.25)$$

- Parallelschaltung: Ströme durch R, L, C (somit deren Admittanzen G, Y_L, Y_C) vektoriell addiert

- Gesamtstrom: Wirkanteil, parallel zur Spannung, Blindanteil senkrecht zur Spannung

$$(2.26) \quad \hat{i}_w = \hat{i} \cdot \cos \varphi \quad \hat{i}_b = \hat{i} \cdot \sin \varphi \quad (2.27)$$

Elektrische Leistung & Arbeit im Wechselstromkreis

- Augenblicksleistung: $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} (\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) \quad (2.28)$

- Wirkleistung P : konstanter zeitunabhängiger Anteil: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cdot \cos \varphi$ mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
 $\cos \varphi$: Leistungsfaktor, möglichst nahe 1 (2.29)

- reine ohmsche Widerstandsbelastung: $P = P_{\text{mittel}} = \frac{\hat{i}^2 \cdot R}{2} \quad p_{zf}(t) = -\frac{\hat{i}^2 \cdot R}{2} \cdot \cos(2\omega t) \quad (2.31)$

$$P = I^2 \cdot R \quad (2.32) \quad \text{mit } I = I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \hat{i} \quad (\text{Effektivwert})$$

- Bezeichnung der Größe von Wechselspannungen:

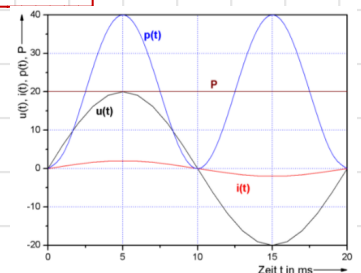
→ Nachrichtentechnik: Amplitude $\hat{u}$

→ Energietechnik: Effektivwert U & Effektivzeigerwerte

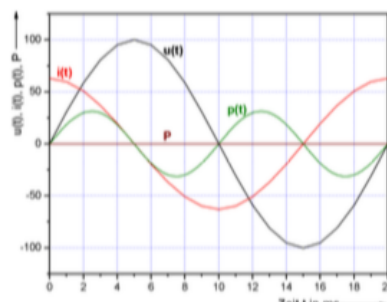
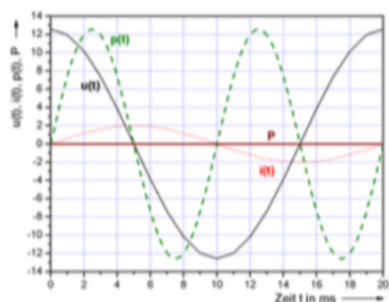
→ im Kondensator eilt der Strom der Spannung vor (2.35)

→ in Induktivitäten sich die Ströme verspäten } 90^\circ \text{ Phasenverschiebung}

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (2.34)$$



Zshg. Spann., Str., P am ohmschen R



mittlere Leistung L & C : $P_{\text{mittel}} = 0 \quad (2.36)$

dennoch Belastung Netz durch pulsierende Augenblicksleist.

$$L: p_{zf} = -\frac{\hat{u}^2}{2 \cdot \omega \cdot L} \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (2.37)$$

$$C: p_{zf} = \frac{\hat{u}^2 \cdot \omega \cdot C}{2} \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (2.38)$$

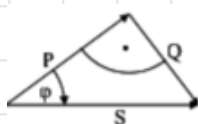
- zwei Arten von Leistungen im Wechselstromkreis: Wirkleistung P : bewirkt Erwärmung

Blindleistung Q : zw. Netz- & Zweipol hin- & hergeschoben

- Produkt Effektivwerte: Scheinleistung $S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \quad (2.39)$

- Betrag der Scheinleistung: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.40)$

Leistungsdreieck



	Allgemeiner Zweipol	R	L	C	Einheit
Wirkleistung	$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$	$U \cdot I$	0	0	$[P] = W$
Blindleistung	$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$	0	$U \cdot I$	$-U \cdot I$	$[Q] = \text{var}$
Scheinleistung	$S = U \cdot I$	$U \cdot I$	$U \cdot I$	$U \cdot I$	$[S] = VA$

obwohl alle die gleiche Dimension haben → Differenzierung

- Verbrauch elektr. Energie über längere Zeit: $W = U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot t = P \cdot t \quad (2.41)$

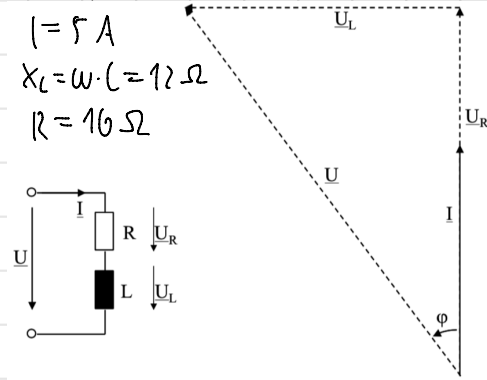
- Blindleistungsanteil: $W_Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot t = Q \cdot t \quad (2.42)$

Analyse von Wechselstromnetzwerken

$$\sum_k i_k(t) = 0 \text{ bzw. } \sum_k i_k = 0 \quad (2.43) \text{ Knotenregel} \quad \sum_k u_k(t) = 0 \text{ bzw. } \sum_k u_k = 0 \quad (2.44) \text{ Maschenregel}$$

Reihenschaltung von R und L

1. Ersatzschaltbild
2. Maschenregel: $U - U_R - U_L = 0$
3. Zeigerdiagramm: I in senkr. Achse, parallel (in Phase) zu I liegt U_R
 $\rightarrow$ Betrag der Spann. am Widerstand: $U_R = I \cdot R = 5 \text{ A} \cdot 16 \Omega = 80 \text{ V}$
4. U_L um $+90^\circ$ gg. I gedreht (U_L eilt I um 90° voraus)
 $U_L = X_L \cdot I = 5 \text{ A} \cdot 12 \Omega = 60 \text{ V}$
5. Spannungen mit Maßstab (z.B. $10 \text{ V} \hat{=} 1 \text{ cm}$) einzeichnen $\rightarrow U$ & φ ablesen
alternativ: Berechnung über Satz des Pythagoras: $U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L)^2}$



Komplexe Zahlen

- komplexe Zahl $z = a + jb$ und $z^* = a - jb$
- Betrag, Radius: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ Argument: Winkel φ gg. reelle Achse: $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) \sim e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$
- kartesische Form: $z = a + jb$
- trigonometrische Form der Polarform: $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$
- Exponentialdarstellung der Polarform: $z = r e^{j\varphi}$
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Ableitung: $(r \cdot e^{j\omega t})' = j\omega r e^{j\omega t}$
 $\hat{=}$ Multiplikation mit imaginärer Einheit $j \hat{=}$ Drehung um $+90^\circ$ (gg. den Uhrzeigersinn)
- Integration $\hat{=}$ Division durch j (Multiplikation mit $-j \hat{=}$ Drehung um -90° (im Uhrzeigersinn))

Komplexe Darstellung von Wechselgrößen

- Darstellung $u(t), i(t)$ mittels komplexer Zahlen: von Effektivwertzeiger Darstellung der Funktionen ausgehen
 $\sim$ mit ω rotierender Effektivwertzeiger $\underline{u} \hat{=}$ komplexer Zahl $\underline{u}$, die in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert, Imaginärteil der komplexen Zahl $\underline{u} \hat{=}$ Zeitfunktion $u(t)/\sqrt{2}$
- $\underline{u} = |\underline{u}| e^{j(\omega t + \varphi_u)} = u \cdot [\cos(\omega t + \varphi_u) + j\sin(\omega t + \varphi_u)]$ $\text{Im}(\underline{u}) = u \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{\sqrt{2}} u(t)$
mit $u = |\underline{u}| = u_{\text{eff}} = \hat{u}/\sqrt{2}$
 $\sim i(t)$ analog

- komplexer Scheinwiderstand $\underline{Z}$, wird Impedanz genannt: $\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z} \quad (2.45)$
Kehrwert Impedanz $\underline{Z}$: Admittanz $\underline{Y}$

- Zusammenhänge Spannung & Strom in R, L, C:

$$R: \underline{u}_R = R \cdot \underline{i}_R \quad L: \underline{u}_L = L \cdot \frac{d}{dt} (|\underline{i}_L| \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}) = j\omega L |\underline{i}_L| e^{j(\omega t + \varphi_i)} = j\omega L \cdot \underline{i}_L \quad (2.47)$$

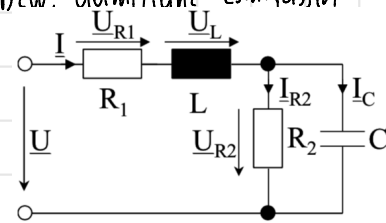
$$C: \underline{u}_C = \frac{1}{C} \int |\underline{i}_C| \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} dt = \frac{1}{j\omega C} |\underline{i}_C| e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}_C \quad (2.48)$$

- Beschreibung stimmt formal mit Größen aus Zeigerdarstellung überein; zusätzlich: Phasenverschiebung durch ein jedem ω vorgestelltes j

Netzwerkanalyse

- zunächst: Parallel- & Reihenschaltungen verschiedener Elemente zu Gesamtimpedanz bzw. admittanz zsm. fassen

$$\begin{aligned} \text{Gesamtimpedanz: } Z_{RL} &= R + j\omega L = R + jX_L \\ Y_{RC} &= \frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{jX_C} \end{aligned} \left\{ Z_{ges} = Z_{RL} + \frac{1}{Y_{RC}} \right.$$

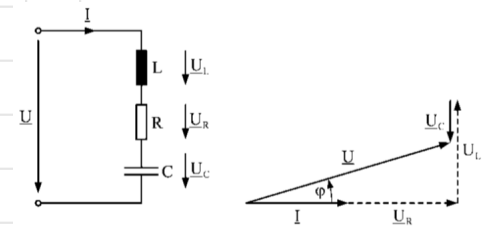


Reihenschaltung

- Strom I: reelle Achse, Spannungen nach Maschenregel addiert

$$\underline{U} = I \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = I \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrag \& Phase der Spannung: } |\underline{U}| &= |I| \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \varphi &= \varphi_u - \varphi_i = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{aligned}$$



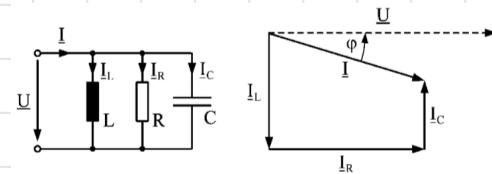
- Gesamtimpedanz $Z_{ges} = R + j \left(\omega L + \frac{1}{\omega C} \right)$

Parallelschaltung

- Spannung U: reelle Achse, Ströme nach Knotenregel phasenrichtig addieren

$$\underline{I} = \underline{U} \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + j\omega C \right) = \underline{U} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrag \& Phase des Stromes: } |\underline{I}| &= |\underline{U}| |\underline{Y}| = \underline{U} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \\ \varphi &= \varphi_u - \varphi_i = 0 - \arctan \left(R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) = \arctan \left(R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right) \end{aligned}$$



- Gesamtadmittanz $Y_{ges} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$

Leistung bei komplexer Rechnung

$$\underline{S} = P + jQ = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| e^{j\varphi} \quad (2.49) \quad \text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\sim \underline{S} = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot e^{j\varphi} = |\underline{U}| \cdot e^{j\varphi_u} \cdot |\underline{I}| e^{-j\varphi_i} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

komplexe Scheinleistung im Wechselstromnetz: Produkt von Spannung & konjugiert komplexem Strom

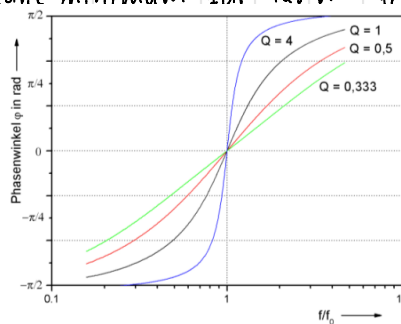
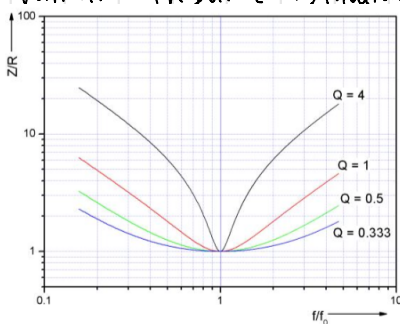
Schwingkreise

- System: min. zwei Energiespeicher vorhanden $\sim$ periodischer Energieaustausch $\sim$ Schwingungen

Reihenschwingkreis

- Impedanz Reihenschaltung L, R, C: $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

- Variation Frequenz $\sim$ Änderung Impedanz Minimum für Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim Z \text{ reell: } Z|_{\omega_0} = R$



Betrag bezogene Impedanz (links) & Phasengang (rechts) des Serienschwingkreises über Frequenz & in Abhängigkeit der Güte Q

- Breite Impedanzminimum: durch Güte des Schwingkreises Q beschrieben

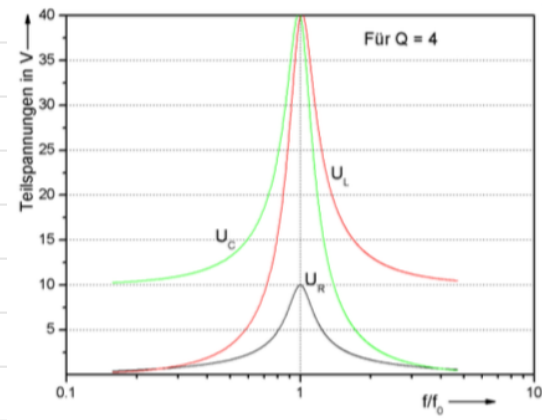
$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_0}{R} \quad \text{mit } Z_0 = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Nähe Resonanzfrequenz: Spann. Spule & Kond. kann deutlich höher sein als Klemmenspann. der Reihenschaltung

$$U_L = U_C = Z_0 \cdot I = Q \cdot R \cdot I = Q \cdot U_R$$

- Güte Schwingkreis $\uparrow$ ($\hat{=}$ „schmäler werden“ d. Frequenzbandes)

$\leadsto$ Spann. an Spule & Kondensator im Resonanzpunkt steigt proportional an



Elektrische und magnetische Felder

Kraftwirkung im elektrischen Feld

- ruhendes elektr. Feld: Kraft auf geladene Körper, abhängig von Größe der Ladung & Ort
- gleichnamige Ladungen stoßen sich mit $\vec{F}$ ab, ungleichnamige ziehen sich mit $\vec{F}$ an $\rightarrow \vec{F} = Q \cdot \vec{E}$
- E-Feld hat an jeder Stelle des Raumes eine Richtung (Vektorfeld) & wird durch Feldlinien dargestellt (von + nach -)
- Feldlinien haben Ursprung (Quelle) & Ende (Senke) in elektr. Ladungen, deshalb elektrost. Feld: Quellenfeld
- im Inneren idealer Leiter: E-Feld Null, gilt auch für Hohlräume in Leitern (Faraday'scher Käfig)

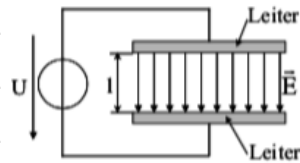
Kondensator

- aus zwei entgegengesetzt geladenen Leiteroberflächen, voneinander isoliert
- Spann. anlegen $\sim$ Ladungsträger an Leiteroberflächen gespeichert
- Ladung ist Spann. proportional mit Proportionalitätskonst. Kapazität C

(3.1) $Q = C \cdot U$ $[C] = 1 \text{ F (Farad)}$

- Kapazität nur von Geometrie & Material abh.
- Plattenkond.: zwei leitende Platten (Elektronen), Fläche A , Abstand l , angelegte Spann. U

$$u_c \downarrow \frac{Q}{\oint_{ic} C}$$



(3.2) $C = \epsilon \frac{A}{l}$ Kapazität proportional Fläche, umgekehrt proportional Abstand
 ϵ : Dielektrizitätskonstante / Permittivität, Materialkonstante

$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ ϵ_0 : absolute Permittivität im Vakuum, ϵ_r materialspezifische / relative Permittivität

Ströme und Spannungen am Kondensator

- Änderung Ladungszustand Kondensator $\sim$ Spannungsänderung $q(t) = C \cdot u(t)$

(3.3) $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ Kondensatorgleichung: Spann. am Kond. kann sich nicht sprungförmig ändern, da dazu unendlicher Strom nötig wäre

Laden und Entladen eines Kondensators

ESB Ladevorgang Kond.

- **Laden:** Kond. C für Zeiten $t < 0$ ungeladen, Schalter bei $t = 0$ schließen

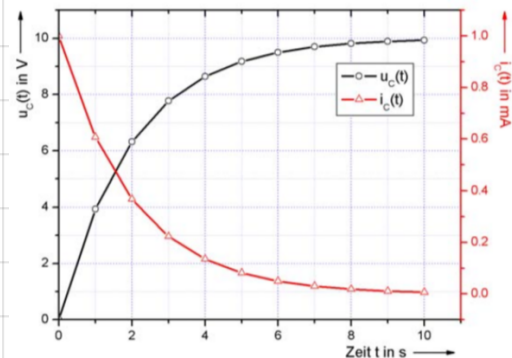
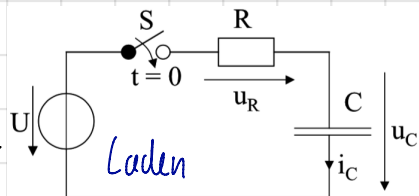
(3.4) $U = R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$ Dgl. zum Lösen Anfangswert (z.B. $u_c(0) = 0$ wenn Kond. zu Beginn ungeladen) nötig

$$u_c(t) = L_1 e^{-t/\tau} + L_0 \quad \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{L_1}{-\tau} e^{-t/\tau} \rightarrow U = R \cdot C \cdot \frac{L_1}{-\tau} e^{-t/\tau} + L_1 e^{-t/\tau} + L_0$$

- zeitabh. Terme müssen in Summe 0 sein, da U zeitunabh.: $0 = R \cdot C \cdot \frac{L_1}{-\tau} e^{-t/\tau} + L_1 e^{-t/\tau} \Rightarrow \tau = R \cdot C$ (3.5)
- zeitabh. Terme müssen U ergeben: $U = L_0$ (3.6)
- $u_c(0) = 0 = U + L_1 e^{-0/\tau} \Rightarrow L_1 = -U$

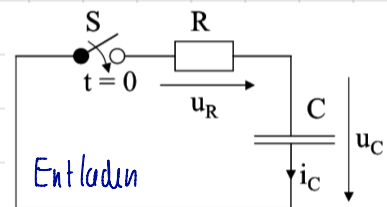
$u_c(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$ (3.7) $i_c(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ (3.8)

- τ : Zeitkonstante des Stromkreises, Dimension einer Zeit, charakteristisch für zeitlichen Ablauf der Aufladung



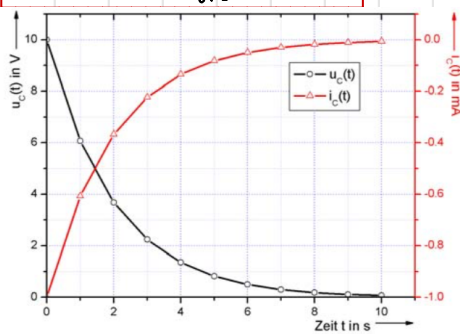
Zeit	Kondensator wirkt wie	u_c	i_c
$t = 0$	„Kurzschluss“	$u_c(0) = 0$	$i_c(0) = \frac{U}{R}$
$t = \tau$		$u_c(\tau) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot U$	$i_c(\tau) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{e}$
$t \rightarrow \infty$	„Leerlaufverhalten“	$u_c(\infty) = U$	$i_c(\infty) = 0$

- **Entladen:** Reihenschaltung R & C über Schalter kurzgeschlossen, für $t < 0$ mit Spann. U geladen, Schalter zum Zeitpunkt $t = 0$ schließen



3.9 $0 = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$ mit $u_C(0) = U$: $u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ 3.10

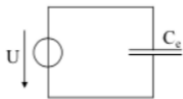
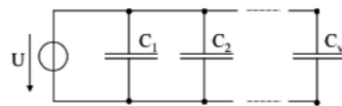
$i_C(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ 3.11



Schaltungen von Kondensatoren

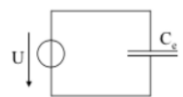
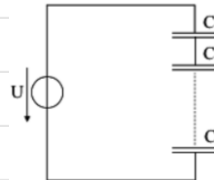
Parallelschaltung: alle Kondensatoren gleiche Spannung

$C_e = \frac{Q_{ges}}{U} = \sum_k C_k$ 3.12



Reihenschaltung: alle Kondensatoren gleiche Ladung

$\frac{1}{C_e} = \frac{U}{Q} = \sum_k \frac{1}{C_k}$ 3.13



Das magnetische Feld

- entsteht durch elektr. Ströme oder Permanentmagnete

Größen im magnetischen Feld

Magnetische Feldstärke

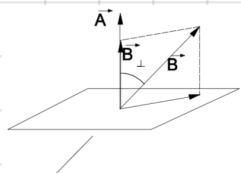
- Magnetfeld stromdurchflossener Leiter: Kraft auf Stabmagnet proportional dem Strom I , umgekehrt proportional dem Abstand des Magneten von der Mittellinie des Leiters
- stromdurchflossener Leiter: Kreuz ($\otimes$) Strom fließt in, Punkt ($\odot$) Strom fließt aus Zeichenebene heraus
- magnetische Feldstärke H : Quotient aus Strom & Länge der Feldlinie $|\vec{H}| = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$ 3.14
 $[H] = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
- langer, gerader Leiter: Feldlinien kreisförmig um Leiter
- magn. Feld: quellenfreies Wirbelfeld
- Korkenzieherregel: eine in Richtung des Stromes eingedrehte Rechtsschraube gibt durch ihren Dreh Sinn Richtung des Magnetfeldes an

Magnetische Flussdichte

- magnetische Flussdichte/Induktion $\vec{B}$, parallel zur magn. Feldstärke
 $[\vec{B}] = 1 \text{ Vs} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ T (Tesla)} (= 10^4 \text{ G (Gauß)})$
- $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ 3.15 μ : (Materialkonst.) Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$; μ_0 : absolute Perm. im Vakuum, μ_r : materialabh. rel. Perm.
 $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ 3.16 $\mu_r \approx 1$

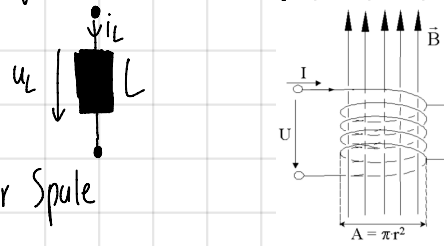
Magnetischer Fluss

- magn. Fluss Φ : Summe der magn. Flussdichtelinien, die senkrecht durch Fläche treten
 $\Phi = B \cdot A \cdot \cos(\angle \vec{B}, \vec{A})$
- $[\Phi] = 1 \text{ Vs} = 1 \text{ Wb (Weber)} (= 10^8 \text{ M (Maxwell)})$



Induktivität

- Spule: N stromdurchflossene Windungen, so angeordnet, dass sie sich zu größtmögl. Gesamtfeld überlagern
- verketteter Fluss $\Psi = N \cdot \Phi = L \cdot I$; $\Psi \sim I$, Proportionalitätskonst.: Induktivität
 $[L] = 1 \text{ H (Henry)} = 1 \text{ Vs A}^{-1} = \Omega \text{ s}$
- Stahlspe: $L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$ (3.17) μ_r : Permeabilitätszahl Kern
 A : Querschnittsfläche der Spule l : Länge der Spule



Ströme und Spannungen an der Induktivität

- Änderung Fluss in Induktivität $\sim$ Stromänderung: $N \cdot \Phi(t) = L \cdot i(t)$
- zeitl. Änderung des Flusses $\sim$ Spann. an Anschlüssen der Induktivität

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.18) \quad \sim u_L(t) = N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Ein- und Ausschaltvorgänge an Induktivitäten

- Strom an Spule kann sich nicht sprunghaft ändern (unendl. Spann. wäre nötig)
- reale Spule: Reihenschaltung Spule & ohmscher Widerstand des Drahtes der Spule

Einschalten einer realen Spule

- L für $t < 0$ stromlos, $t = 0$: S schließen

$$(3.19) \quad U = i_L(t) \cdot R + L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{Dgl zur Berechnung des Einschaltvorganges der Spule}$$

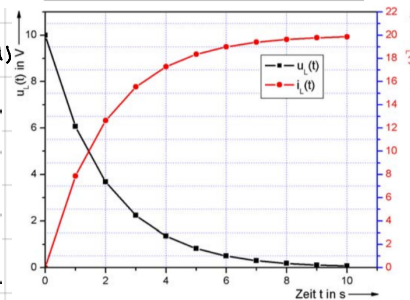
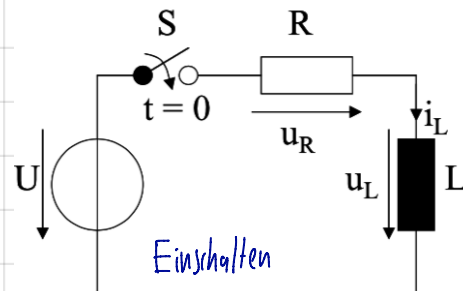
$i_L(0) = 0$ (stromlose Spule zu Beginn)

$$(3.20) \quad i_L(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \sim u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.21)$$

- τ : Zeitkonstante des Stromkreises, charakteristisch f. zeitl. Ablauf des Stromaufbaus

$$\tau = \frac{L}{R} \quad [\tau] = \Omega \text{ s} / \Omega = \text{s} \quad (3.22)$$

Zeit	Spule wirkt wie	$u_L(t)$	$i_L(t)$
$t = 0$	„Leerlauf“	$u_L(0) = U$	$i_L(0) = 0$
$t = \tau$		$u_L(\tau) = \frac{1}{e} \cdot U$	$i_L(\tau) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)$
$t \rightarrow \infty$	„Kurzschluss“	$u_L(\infty) = 0$	$i_L(\infty) = \frac{U}{R}$



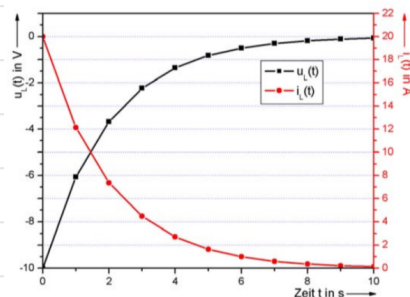
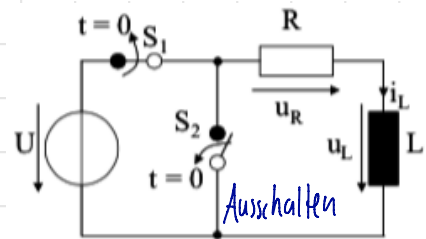
Ausschalten einer realen Spule

- S_1 lange Zeit geschlossen $\sim$ stationärer Zustand, in Spule fließt stationärer Spulenstrom
 $\lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = i_L(0) = \frac{U}{R}$ Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$

- $t = 0$: zeitgleich zum Öffnen von S_1 wird S_2 geschlossen, Strom fließt im „kurzgeschlossen“ Kreis weiter, damit Spann. nicht ∞ wird

$$(3.23) \quad 0 = i_L(t) \cdot R + L \frac{di_L(t)}{dt} \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

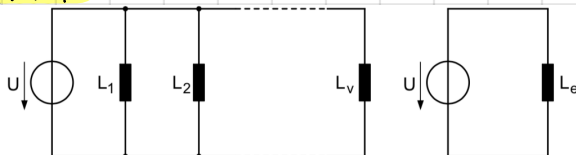
$$(3.24) \quad i_L(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \sim u_L(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.25)$$



Schaltungen von Induktivitäten

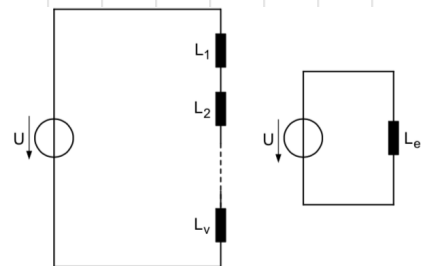
- Parallelschaltung:

$$\frac{1}{L_e} = \sum_k \frac{1}{L_k}$$



- Reihenschaltung:

$$L_e = \sum_k L_k$$



Elektrotechnik 2

Halbleiterbauelemente

Kristallaufbau

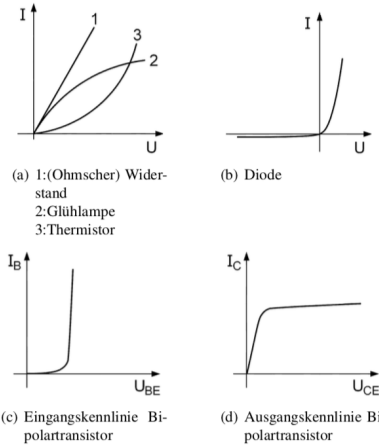
- reine Halbleiter bei tiefen Temperaturen nichtleitend, Leitfähigkeit steigt mit Temperatur

Dotierung

- Verunreinigung Halbleiter mit $\rightarrow$ Element der 5. HG ~ 1 freies e^- extra $\rightarrow$ n-dotiert
 $\rightarrow$ Element der 3. HG ~ 1 e^- weniger $\sim$ Defektelektron $\rightarrow$ p-dotiert

Linearisierung Nichtlinearer Bauelemente und Netzwerke

- Heißleiter (Thermistor)
- Kaltleiter (Glühlampe)
- Halbleiter (Diode, Transistor)
- nichtlinear: Steigung R der Stromspannungskennlinie (SSK) nicht konstant
 $\sim$ statischer Widerstand R_S : Wert des Widerstands in jedem Punkt der SSK
 $\sim$ differentieller Widerstand R_d : Steigung Tangente/Sekante in bestimmtem Bereich der SSK



Berechnung von statischem und differentiellem Widerstand

- R_S in A: $R_S = \frac{U_A}{I_A} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \tan \alpha = m_R \cdot \tan \alpha$ (4.1) m_u, m_i, m_R : Maßstäbe der Spann., des Stroms und des Widerstands

- R_d in A: $R_d = \frac{dU}{dI} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = m_R \cdot \tan \beta$ (4.2)

entspricht Ableitung der Spann. nach dem Strom im Punkt A $\hat{=}$ Tangente in A
 β : Winkel zw. Tangente & Stromachse

hier: $\beta < \alpha$ also $R_d(A) < R_S(A)$

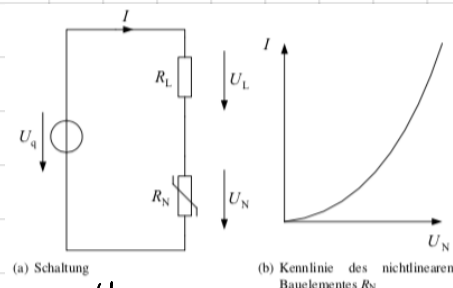
R_S : positiv, 0; R_d : positiv, negativ, 0; lineares Element: $R_S = R_d$

Berechnung von nichtlinearen Netzwerken

- nichtlineares Netzwerk: mind. ein nichtlinearer Widerstand
- Anwendung aller Berechnungsverfahren außer Überlagerungssatz

grafische Methode:

- Netzwerk: Reihenschaltung linearer R_L & nichtlinearer Widerstand R_N
geg.: Spannung U_q , R_L , SSK von R_N mit $I_N = f(U_N)$; ges.: I , Spannungen U_L & U_N



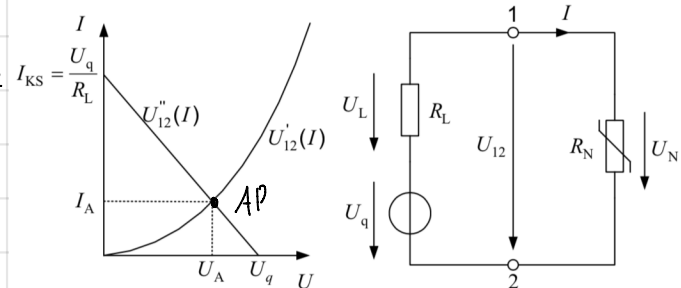
- Methode der Ersatzspannungsquelle zur Lösung des nichtlinearen Netzwerks

1. sinnvolle Maßstäbe für I & U wählen, SSK des nichtlinearen Widerstands zeichnen

2. Zusammenfassung linearer Teil des Netzwerks zu einer Ersatzquelle (U_q zusammen mit R_L als reale Spannungsquelle) Spannung an R_N (SSK): $U'_{12} = U_N(I)$ (4.3)

Klemmspannung der realen Spannungsquelle: $U''_{12} = U_q - R_L \cdot I$ $\sim$ als Gerade zeichnen $\sim$ Arbeitsgerade

3. grafische Lösung: Schnittpunkt der beiden Kurven, den nur in SP liefern die Gleichungen gleiche Werte: $U'_{12} = U''_{12} = U''_{12}$
gesuchte Werte aus Diagramm ablesen: Arbeitspunkt AP



analytische Methode:

- für kleine Änderungen innerhalb eines Arbeitsbereichs bzw. um einen Arbeitspunkt des nichtlinearen Widerstands wird die SSR um diesen Arbeitspunkt herum linearisiert geg.: SSR von R_N , Arbeitspunkt A

1. SSR durch passende Sekante um A ersetzen

- ~ R_N wird innerhalb des definierten Arbeitsbereichs durch die Sekantengleichung beschrieben: $U = U_s + R_d \cdot I$ (4.5)
- ~ Zusammenhang Klemmspann. & -strom I einer Schaltung aus Widerstand R_d und Spannungsquelle U_s

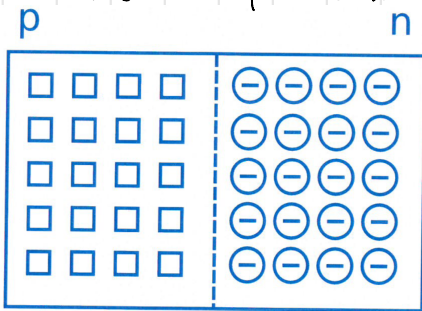
2. Bestimmung R_d & U_s :

- ~ R_d : differentieller Widerstand im AP: $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}$ (4.6)

- ~ U_s : ergibt sich für Punkt im Arbeitsbereich: $U_s = U_1 - R_d \cdot I_1$ (4.7)

Der p-n-Übergang

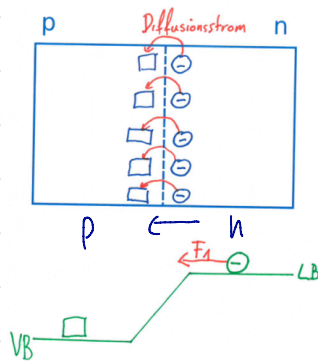
- Verwendung beider Dotierungsarten in unterschiedl. Bereichen des Bauteils
- Zustand 0: n- & p- Seite sind elektrisch neutral



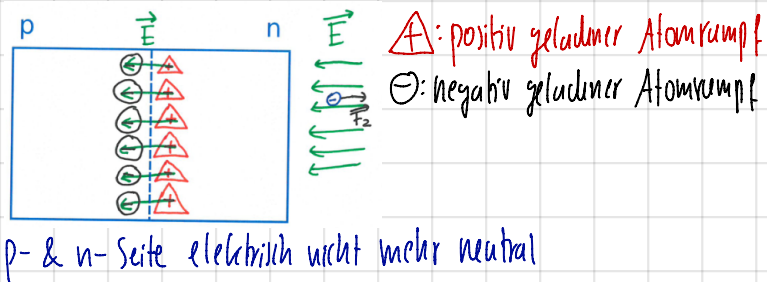
○ ungebundene Elektronen
□ Defektelektronen

Sperrschicht: Bereich des p-n-Übergangs, praktisch frei von bewegl. Ladungsträgern
Diffusionsspannung U_D : Spannungsdifferenz zw. n- & p-Gebiet, von Dotierung abh.

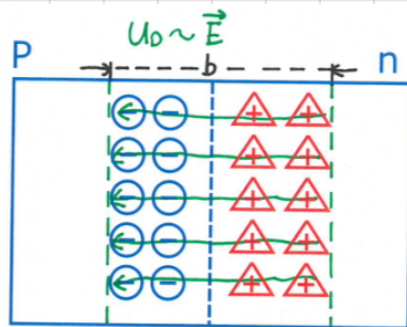
- Zustand 1:



- Zustand 2:



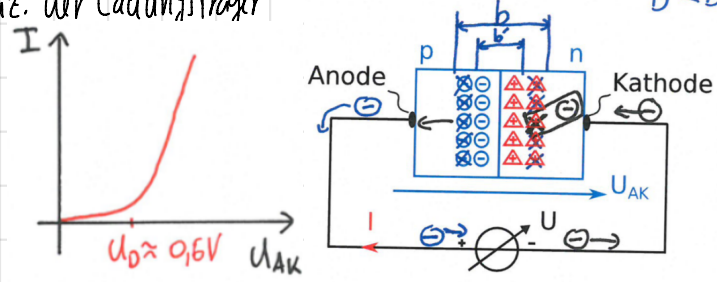
- Zustand 3: $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$



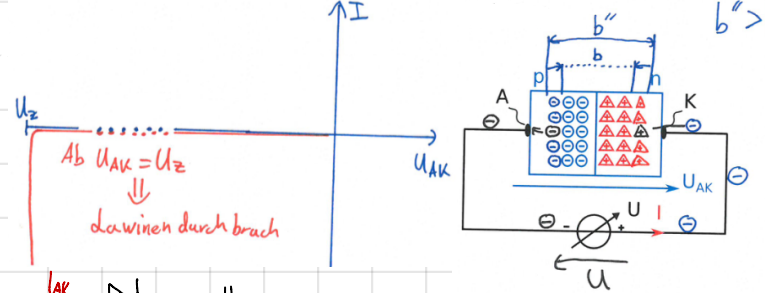
b: Sperrschichtbreite
 U_D : Diffusionsspannung

Stromdurchlassener p-n-Übergang

- äußere Spannung: Konz. Ladungsträger verändert sich, da vom Minuspol e^- nachgezogen & vom Pluspol e^- abgesaugt werden $\sim$ Konz.-unterschied der Ladungsträger Diffusionsstrom im p-n-Übergang
- anlegen positive Spannung (Betrieb in Durchlassrichtung): Konz. der Ladungsträger erhöht sich & Breite der Sperrschicht verringert sich
 $0 < U = U_{AK} < U_d \sim$ Strom steigt langsam an
 $U \geq U_d \sim$ Strom steigt exponentiell an



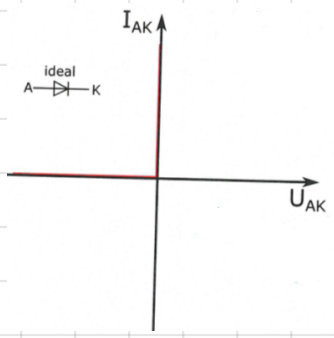
- anlegen negative Spann. (Betrieb in Sperrichtung): Konz. der Ladungsträger verringert sich & Breite der Sperrschicht nimmt ab $\sim$ Strom wird geringer und nähert sich einem durch die Diffusion bestimmten Wert $U_z < U = U_{AR} < 0$
 U_z : Zener-Spannung erreicht $\sim$ Lawinendurchbruch (reversibel)



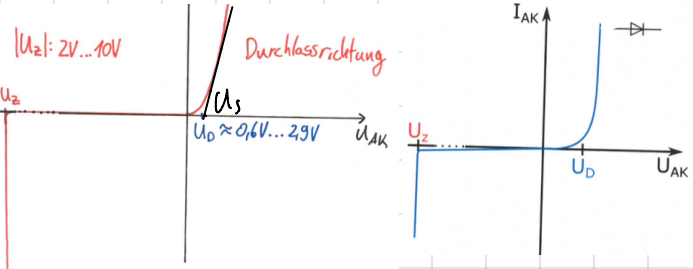
- Bedeutung p-n-Übergang: Diode

Die ideale Diodenkennlinie

- $I_{AK} = 0$ für $I > 0$ und $I = 0$ für $U_{AK} < 0$
- ideale Diode $\hat{=}$ elektrisch gesteuertem Schalter; leitet, wenn Spannung positiv, sperrt, wenn Spannung negativ oder Ventil, das Stromfluss nur in eine Richtung zulässt

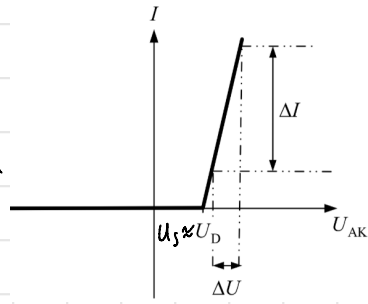
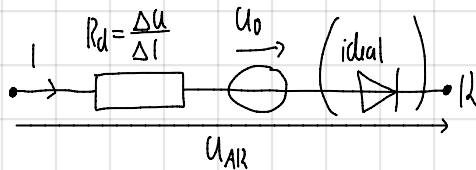


Die reale Diodenkennlinie



Die linearisierte Diodenkennlinie

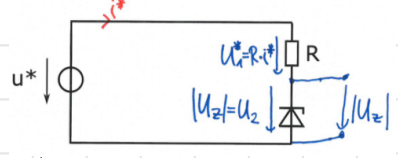
- Linearisierung um Arbeitspunkt liefert ESB:



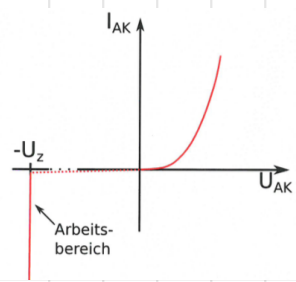
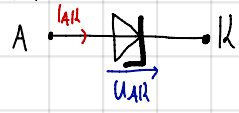
R_d & U_0 beschreiben linearisierte Kennlinie; die in Reihe geschaltete ideale Diode begrenzt die Linearisierung auf den ersten Quadranten, die Durchlassrichtung der Diode; U_s (bei Linearisierung ermittelt) $\approx U_0$

Bauarten von Dioden

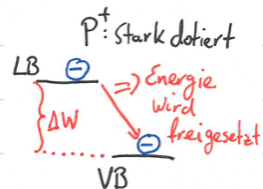
- Zenerdiode: arbeitet in Sperrichtung, nutzt aus, dass Durchbruchspann. nahezu unabh. von Strom ist ($\sim$ konstant) $\sim$ zur Spannungsstabilisierung in Sperrichtung betrieben
 übersteht Durchbruch, solange der Strom Maximalstrom nicht überschreitet



U^* : instabile/schwankende Quelle
 $U_1^* + U_2 = U^* \sim |U_2| = U^* - R \cdot I^*$



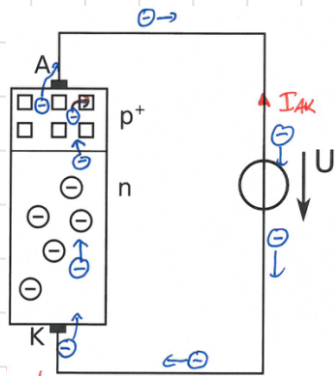
Leuchtdiode:



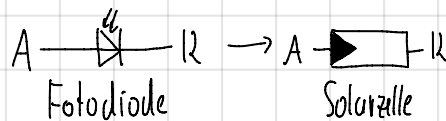
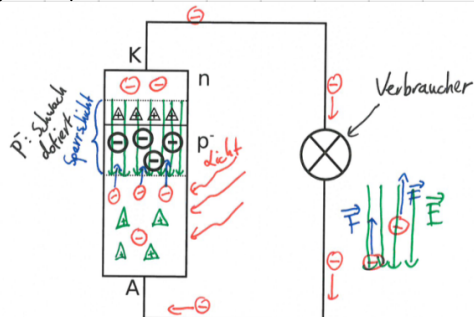
$$\Delta W = U_0 \cdot e^+ = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad e^+: \text{Ladung Positron} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$h: \text{Plancksches Wirkungsquantum} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$= 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$$



Solarzelle:



Licht setzt Elektronen frei $\rightarrow$ $\vec{E}$ -Feld der Sperrschicht beschleunigt die Elektronen in Richtung n-Schicht

Kapazitätsdioden: z.B. Brückengleichrichter aus 6 Dioden zur Gleichrichtung von Drehstrom

Bipolartransistor

bipolar: sowohl Elektronen- als auch Löcherleitung

Aufbau und Funktionsweise von Bipolartransistoren

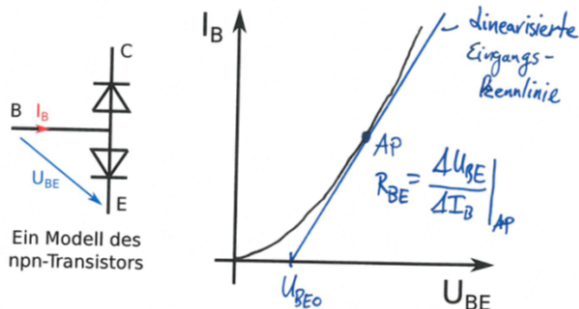
Aus drei unterschiedl. dotierten Halbleiterschichten aufgebaut, je nachdem NPN- oder PNP-Transistor

Transistor $\hat{=}$ Reihenschaltung zweier Dioden, B-E-Diode in Durchlass- & B-C-Diode in Sperrichtung betreiben $\rightarrow U_{BE} > 0, U_{CE} > 0$

$I_B > 0$ in B-E-Kreis $\rightarrow$ Elektronen fließen von Emitter in die Basis & rekombinieren mit den Löchern in der Basis, benötigt Zeit $\rightarrow$ einige Ladungsträger fließen weit in Basis hinein, wenn Basis geringe Dicke $\rightarrow$ werden vom äußeren Feld durch U_{CE} an Kollektor angezogen & können bis zum Kollektor gelangen $\rightarrow$ Ladungsträger werden abgezogen & gelangen nicht mehr zur Basis-Elektrode $\rightarrow$ Strom in den Kollektor

Kollektorstrom I_C steigt mit steigendem Basisstrom ebenfalls an
i. A. $I_C > I_B \rightarrow$ Signalverstärkung

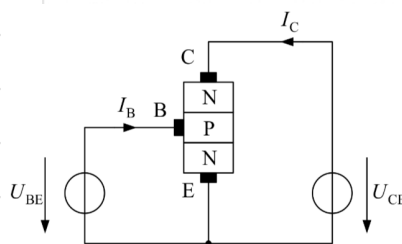
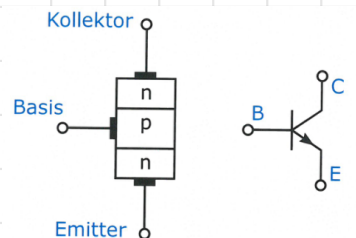
Eingang: U_{BE} : Basis-Emitter-Spannung & I_B
Ausgang: U_{CE} : Kollektor-Emitter-Spannung & I_C
Eingangskennlinie: Beziehung zw. I_B und U_{BE}



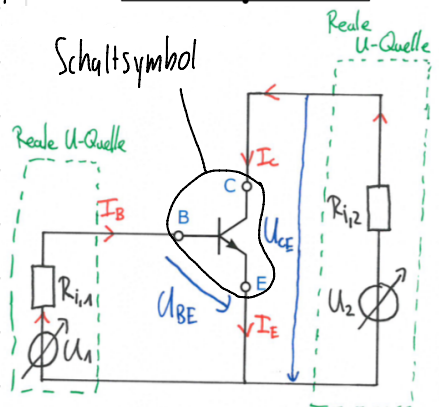
linearisierte Eingangskennlinie: $U_{BE} = U_{BE0} + R_{BE} \cdot I_B$ (4.8)

R_{BE} : dynamischer Basis-Emitter-Widerstand

U_{BE0} : $\approx$ Diffusionsspannung Basis-Emitter



Schaltzeichen



Das Kennlinienfeld

- im Ausgangskennlinienfeld gewählter AP vor allem für Verlustberechnung von Bedeutung

- 1. Quadrant:

Ausgangskennlinie $I_C = f(U_{CE})$ bei verschiedenen Werten des Basisstroms I_B

- 2. Quadrant:

Stromverstärkungskennlinie $I_C = f(I_B)$; $I_C \approx \beta \cdot I_B$ (4.9) $I_C \gg I_B$

β : Gleichstromverstärkung: 5...500

für kleine Abweichungen um AP: $I_C = f(I_B)$ linearisieren

β : Wechselstromverstärkung $\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$ (4.10) 5...500

geringe Variation von I_B um $\pm \frac{\Delta I_B}{2}$ um Arbeitspunkt $I_{B,AP}$:

$$I_{C,AP} \pm \frac{\Delta I_C}{2} \approx \beta \cdot I_{B,AP} \pm \frac{\Delta I_B}{2}$$

Wechselstromverstärker: Wechselspannungssignal den Gleichstromwerten des APs überlagern $\sim$ Mischgrößen i_c und i_B

$$i_B = I_{B,AP} + \hat{i}_B \cdot \sin(\omega t + \varphi_{iB}) \text{ mit } \hat{i}_B \ll I_{B,AP} \sim i_c = I_{C,AP} + \beta \cdot \hat{i}_B \cdot \sin(\omega t + \varphi_{iB}) \text{ mit } \hat{i}_c = \beta \cdot \hat{i}_B$$

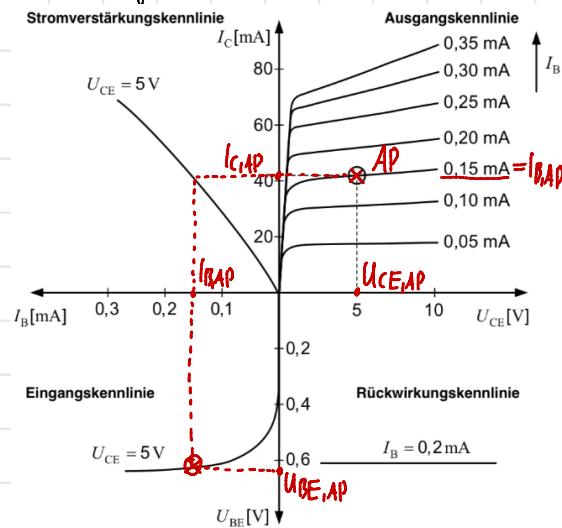
- 3. Quadrant:

Eingangskennlinie $\hat{=}$ Diodekennlinie in Durchlassrichtung $\sim$ kann wie diese durch reale Spannungsquelle mit Leerlaufspannung U_{BE0} und Widerstand R_{BE} linearisiert werden

$$R_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} \quad U_{BE} = U_{BE0} + R_{BE} \cdot I_B \quad (4.12)$$

U_{BE0} : Diffusionsspannung Emitter-Basis-Übergang R_{BE} : Bahnwiderstand der Strecke Basis-Emitter

- 4. Quadrant: Rückwirkungskennlinie $\sim$ Einfluss U_{CE} auf $U_{BE} \sim$ vernachlässigbar



Transistor-Ersatzschaltbild

- Wechselstromverstärker (Normalbetrieb): Gleichstrom- & Wechselstromersatzschaltbild
- Schaltbetrieb

Transistor-Ersatzschaltbild für Verstärkerschaltungen

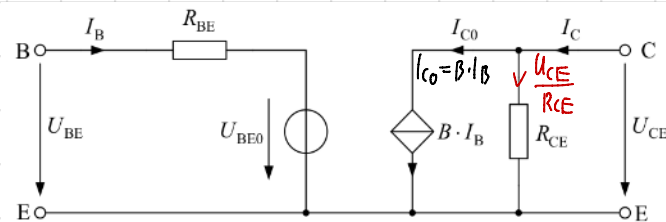
- Eingangssignal = Mischsignal aus GS- & WS-Anteil $\sim$ Verhalten des Transistors unterschiedlich $\sim$ GS- & WS-ESB

Linearisiertes Gleichstromersatzschaltbild des Bipolartransistors

- linearisierte Eingangskennlinie: $U_{BE} = U_{BE0} + R_{BE} \cdot I_B$

$$(4.13) \quad I_B = \frac{U_{BE} - U_{BE0}}{R_{BE}}$$

- Ausgangskreis: gesteuerte Stromquelle $\diamond$, Quellstrom ist abhängig von einer Variablen (hier I_B)



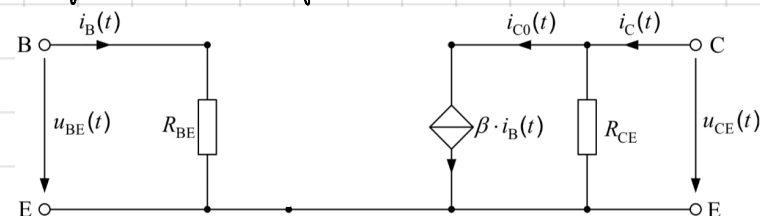
linearisierte Ausgangskennlinie: $I_C = I_{C0} + \frac{1}{R_{CE}} \cdot U_{CE}$ Vereinfachung $R_{CE} \rightarrow \infty \rightarrow I_{C0} \approx I_C$, unter Vernachlässigung von R_{CE} gilt: $I_{C,AP} = \beta \cdot I_{B,AP}$ (4.14)

- Einsatz GS-ESB: Transistorschaltung als WS-Verstärker $\sim$ Einstellung AP bzw. Ermittlung der Daten des AP

Linearisiertes Wechselstromersatzschaltbild des Bipolartransistors

- Eingangskreis: $i_B(t) = \frac{u_{BE}(t)}{R_{BE}}$ (4.15)

- Ausgangskreis: $i_{C0}(t) = \beta \cdot i_B(t) = i_C(t) - \frac{u_{CE}(t)}{R_{CE}}$ (4.16)

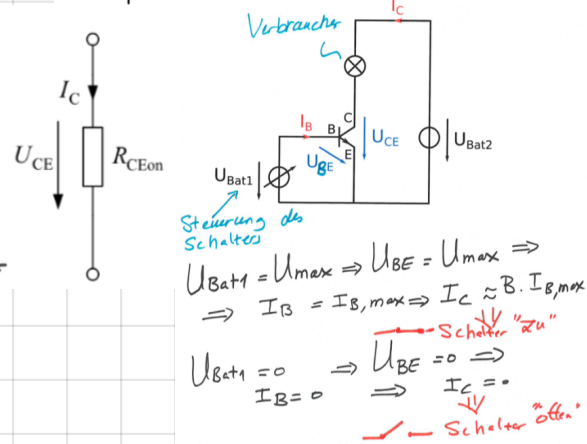
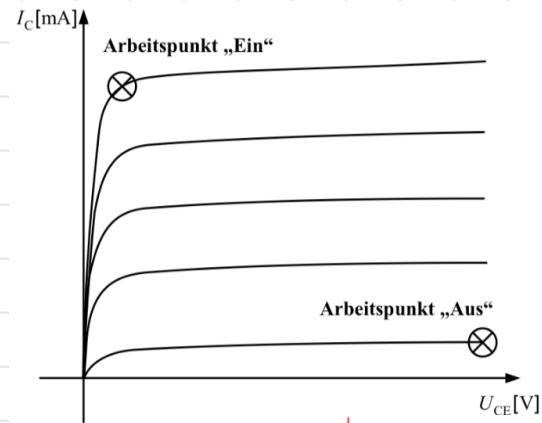
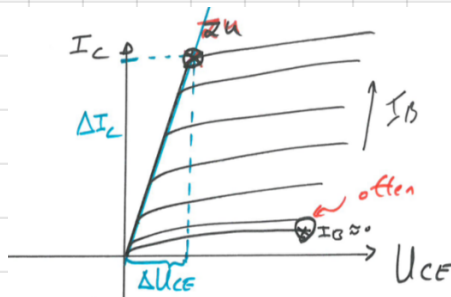


- Einsatz WS-ESB: WS-Verstärker $\sim$ Berechnung der Verstärkungsfaktoren U_u & V_i

Transistor-Ersatzschaltbild für Schalteranwendungen

- U_{BE} sehr niedrig $\rightarrow I_C$ verringert sich auf Wert nahe 0 $\rightarrow$ C-E-Strecke wird sehr hochohmig $\rightarrow$ Schalterzustand „OFF“
- U_{BE} maximal $\rightarrow I_C$ hoch bei niedrigem U_{CE} $\rightarrow$ Schalterzustand „ON“
 $\rightarrow$ Betrachtung Ausgangskennlinie als sehr steile Gerade $\hat{=}$ ohmscher Widerstand R_{CEON} , werst für hohe I_B einen niedrigen Wert auf & wirkt wie ein Schalter, der I_C leitet

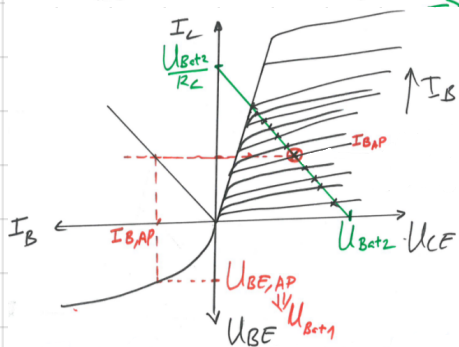
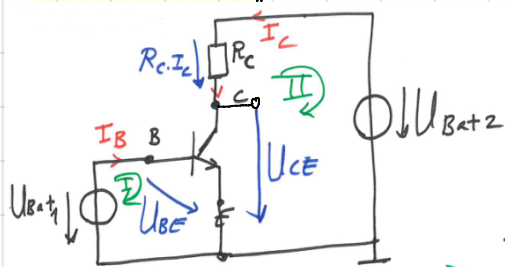
$$R_{CEON} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} \quad (4.17)$$



Grundschaltungen des Bipolartransistors

- Emitterschaltung (Basisschaltung, Kollektorschaltung)

Die Emitterschaltung



Maschenregel zu Masche I und II liefert Arbeitsgerade der Emitterschaltung:

$$I_C = (U_{Bat2} - U_{CE}) \cdot \frac{1}{R_C} \quad (4.18)$$

Eingang Emitterschaltung: Spannung, die zw. Anschlüssen B-E angelegt wird

Ausgang Emitterschaltung: Spannung, die zw. Anschlüssen C & E gemessen wird

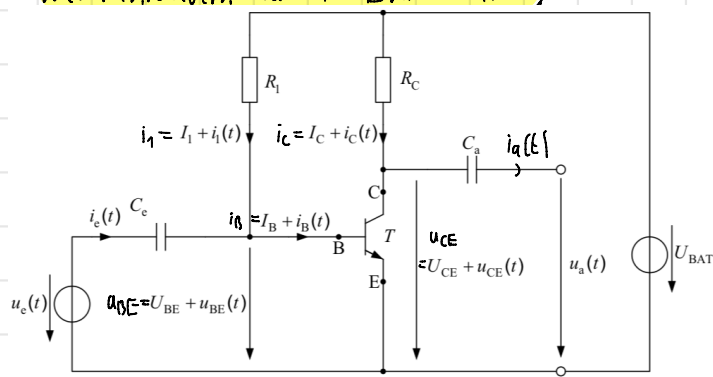
mögliche AP der Schaltung: Schnittpunkte Arbeitsgerade mit Kennlinien

Wechselstrom-Transistorverstärker

- Zweck: Verstärkung von Wechselstromsignalen, dazu wird das WS-Signal den Gleichgrößen überlagert
 $\rightarrow$ es treten Mischsignale auf: $i_B = I_{B,AP} + i_B(t)$ $i_C = I_{C,AP} + i_C(t)$

$$u_{BE} = U_{BE,AP} + u_{BE}(t) \quad u_{CE} = U_{CE,AP} + u_{CE}(t)$$

Wechselstromverstärker in Emitterschaltung



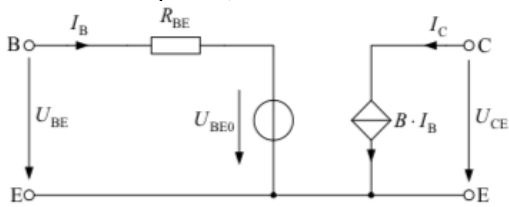
- $R_{CE} \rightarrow \infty$

- C_{CE}, C_{BE} sehr klein

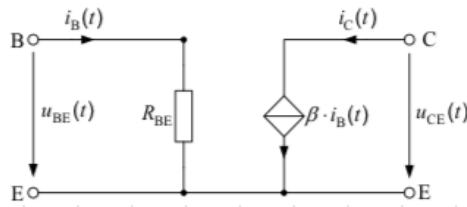
- C_e, C_a sehr groß $\rightarrow$ leiten auch bei sehr kleinen Frequenzen

- AP & Ansteuerbarkeit von Verstärkern: wähle $U_{CE,AP} = U_{Bat}$

- Vereinfachungen führen auf



Vereinfachtes GS-ESB des Transistors



Vereinfachtes WS-ESB des Transistors

- Schritt 1: Gleichstrombetrachtung $\leadsto$ Entfernung $u_e(t)$

$\leadsto$ GS-ESB des Transistors einsetzen

$\leadsto$ Daten des Arbeitspunktes bzw. unbekannte Größen ermitteln

RR 1: $I_{Bat} = I_B + I_C$

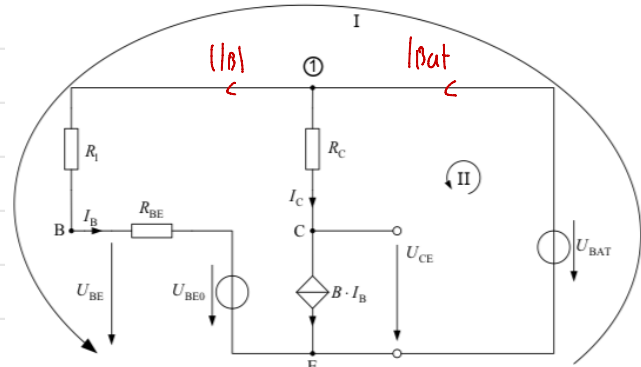
MR I: $U_{Bat} = U_{BE0} + I_B \cdot R_1 + I_B \cdot R_{BE}$

MR II: $U_{Bat} = U_{CE} + I_C \cdot R_C$

Einklinkung des AP mit $U_{CE,AP}$ & $I_{C,AP}$: Dimensionierung R_C, R_1

$$R_C = \frac{U_{Bat} - U_{CE,AP}}{I_{C,AP}} \quad (4.19)$$

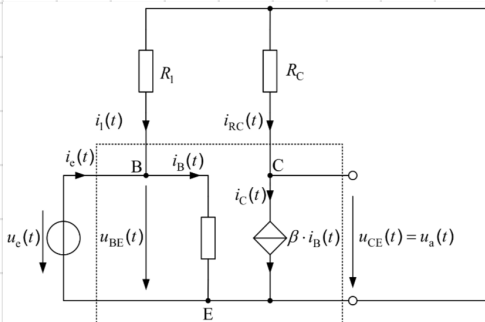
$$R_1 = \beta \cdot \frac{U_{Bat} - U_{BE0} - R_{BE}}{I_{C,AP}} \quad (4.20)$$



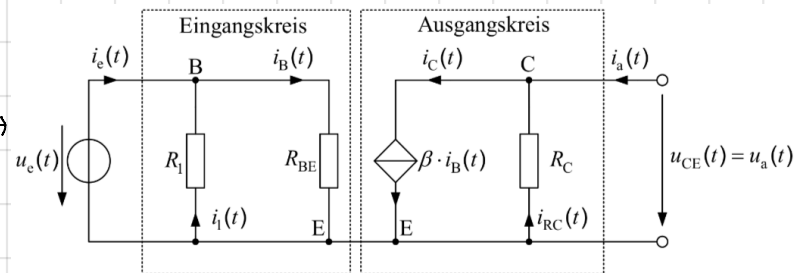
- Schritt 2: Wechselstrombetrachtung $\leadsto U_{Bat} = 0$

$\leadsto$ WS-ESB des Transistors einsetzen

$\leadsto$ Spannungsverstärkung V_u & Stromverstärkung V_i berechnen



Übersichtlicher $\rightarrow$



Bestimmung V_u :

Voraussetzung: $i_a(t) = 0 \leadsto$ kein Ausgangsstrom $\leadsto u_a(t)$ Leerlaufspannung ($\hat{=}$ unbelasteter Ausgang)

Eingangskreis: $u_{BE}(t) = u_e(t) = i_B(t) \cdot R_{BE}$

Ausgangskreis: $u_{CE}(t) = u_a(t) = -R_C \cdot i_{RC}(t)$

da $i_a(t) = 0$: $i_{RC}(t) = i_C(t) = \beta \cdot i_B(t)$

$$u_a(t) = V_u \cdot u_e(t) \leadsto V_u = \frac{u_a(t)}{u_e(t)} \Big|_{i_a(t)=0} \quad (4.21)$$

$$\leadsto V_u = -\beta \cdot \frac{R_C}{R_{BE}} \quad (4.22)$$

V_u beschreibt Beziehung von Eingangsspann. $u_e(t)$ & Ausgangsspann. $u_a(t)$ im Leerlauf

Bestimmung V_i :

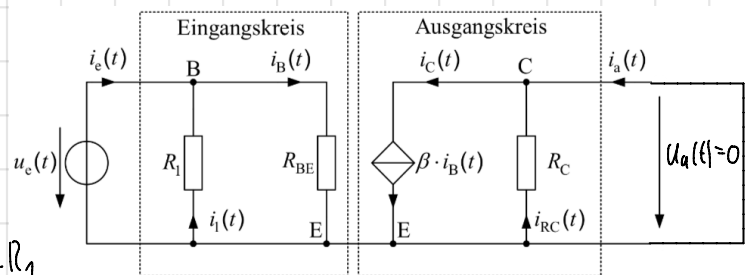
Voraussetzung: WS-Ausgang kurzgeschlossen $\leadsto u_a(t) = 0$

Ausgangsstrom: $i_a(t) = i_C(t) = \beta \cdot i_B(t)$

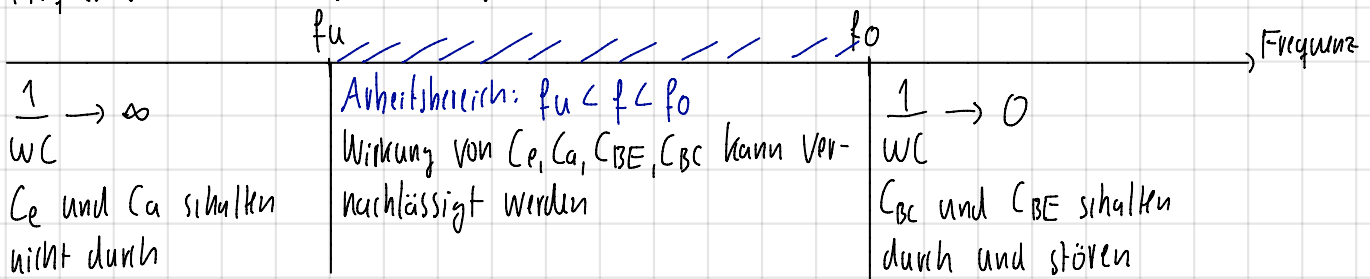
Stromteilerregel Eingangskreis: $i_B(t) = i_e(t) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{BE}}$

$$\leadsto i_a(t) = V_i \cdot i_e(t) \leadsto V_i = \beta \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{BE}} \approx \beta \quad (4.23)$$

$$\leadsto V_i = \frac{i_a(t)}{i_e(t)} \Big|_{u_a(t)=0} \quad (4.24)$$



- Frequenzverhalten des Wechselstromverstärkers



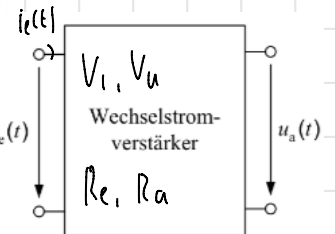
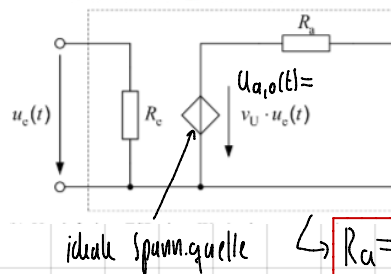
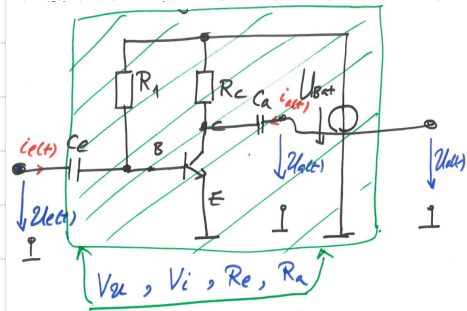
untere Frequenz
 $f_u = \frac{\omega_u}{2\pi}$ mit $\omega_u = \frac{1}{C_e R_e}$ (4.25)

obere Frequenz
 $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ mit $\omega_o = \frac{1}{R_c \cdot C_{BC}}$ (4.26)

R_e : Eingangswiderstand, in Bispillschaltung:
 $R_e = R_1 \parallel R_{BE}$

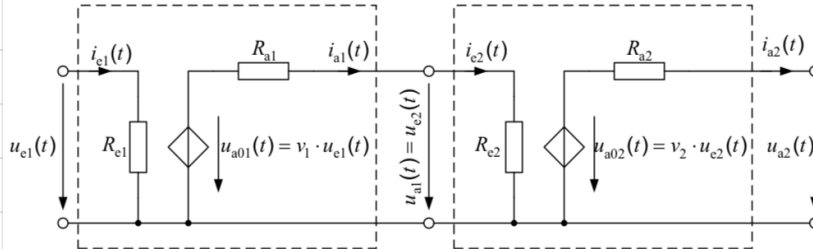
Ersatzschaltbild des Wechselstromverstärkers
 = Vierpoldarstellung

	Emitterschaltung	Kollektorschaltung	Basis-Schaltung
V_u	groß	kleiner als 1	groß
V_i	groß	groß	kleiner als 1
R_e	klein	groß	sehr klein
R_s	groß	sehr klein	groß
φ : zwischen u_e und u_a	180°	gleiche Phase	gleiche Phase
Anwendung:	WS-Verstärker	Impedanzwandler	Hochfrequenzanwendung



ideale Spannungsquelle $\rightarrow R_a = \frac{u_{a,kl}}{i_{a,ks}} = \frac{V_u \cdot u_e}{i_c} = R_c$ (4.27)

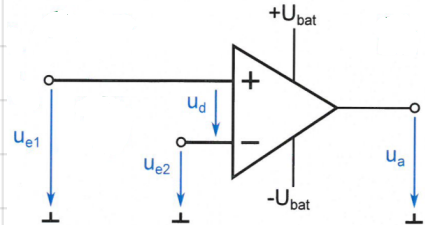
- mehrstufiger Verstärker: $V_{u,gesamt} = \frac{u_{a0}(t)}{u_e(t)} \approx V_{u1} \cdot V_{u2} \cdot \dots \cdot V_{un}$ (4.28)



Verstärkung erste Stufe: $u_{a01}(t) = V_{u1} \cdot u_{e1}(t)$
 Eingang zweite Stufe: $u_{e2}(t) = u_{a01}(t) \cdot \frac{R_{e2}}{R_{a1} + R_{e2}}$
 Verstärkung zweite Stufe: $u_{a02}(t) = V_{u2} \cdot u_{e2}(t)$
 $R_{e2} \gg R_{a1} \rightarrow u_{a02}(t) = V_{u1} \cdot V_{u2} \cdot u_{e1}(t)$

Der Operationsverstärker

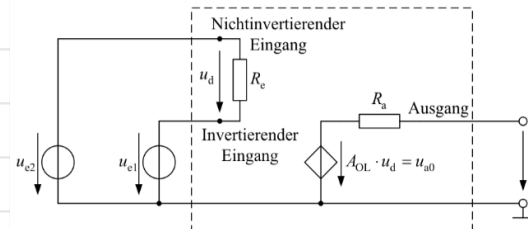
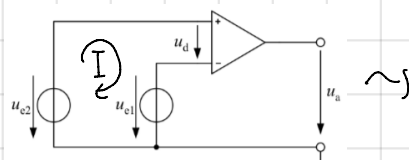
Anforderungen an Verstärker: Eingangswiderstand möglichst groß
 Ausgangswiderstand möglichst klein
 Verstärkungsfaktor möglichst groß



$\pm U_{bat}$: Versorgungsspannung
 $+/-$: nichtinvertierender/invertierender Eingang

u_d : Differenzspannung: Pfeilung vom nichtinvertierenden zum invertierenden Eingang

Operationsverstärker im Open-Loop-Betrieb



NR I: $u_d = u_{e1} - u_{e2}$
 $u_a = A_{OL} \cdot u_d$
 A_{OL} : Open-Loop-/Leerlaufverstärkung

Idealer Operationsverstärker

- $R_e \rightarrow \infty \sim i_e \approx 0$
- $A_{OL} \rightarrow \infty \sim U_d \approx 0$
- $R_a = 0$

(- Frequenzbereich f : 0... ∞ (Hz))

(- OP vollkommen symmetrisch: wenn $u_{e2} = u_{e1} \sim U_a = 0$)

$$U_a = U_d \cdot A_{OL} \sim \text{MRI: } U_d = U_1 - U_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{OL} \rightarrow \infty \\ U_1 > U_2 \rightarrow U_d > 0 \sim U_a = \infty \text{ (Praxis: } U_a \rightarrow U_{a,max}) \\ U_1 = U_2 \rightarrow U_d = 0 \sim U_a = 0 \text{ (trifft in Praxis nicht auf)} \\ U_1 < U_2 \rightarrow U_d < 0 \sim U_a = -\infty \text{ (Praxis: } U_a \rightarrow U_{a,min}) \end{array} \right.$$

Ausgangsspann. für $U_{a,min} < U_a < U_{a,max}$ linear von U_d abhängig, Bereich heißt Ausgangsaussteuerbarkeit, bei weiterer Erhöhung von u_d steigt u_a nicht weiter an

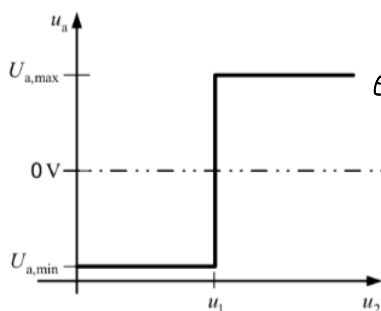
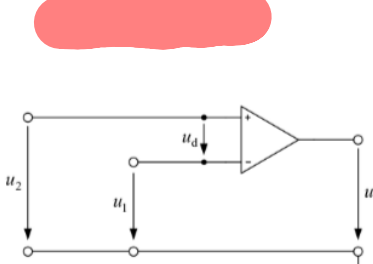
$\sim$ Ausgangsaussteuerbarkeit (liegt ungefähr bei ± 12 V, $U_{a,max(min)} = \pm(15\text{V} - 3\text{V}) (\approx 3$ Volt unter Betriebsspannung)

Operationsverstärker als Komparator

- Operationsverstärker ohne Rückkopplung: Komparator

$$U_a = U_{a,max} \text{ für } u_2 > u_1$$

$$U_a = U_{a,min} \text{ für } u_2 < u_1$$



Verlauf Ausgangsspannung in Abhängigkeit von u_2
Vergleich zweier Spannungen mit hoher Präzision möglich

Waldenhangung u_d : u_a springt nicht sofort, durch Slew-(Anstiegs-)Rate begrenzt

$$SR = \frac{\Delta U}{\Delta t} \stackrel{\text{z.B.}}{=} 1 \frac{\text{V}}{\mu\text{s}} \Rightarrow \text{Anstieg von } -12\text{V auf } 12\text{V} \Rightarrow \text{ms dauert } t = 1\text{V} \cdot \mu\text{s}^{-1} \cdot 24\text{V} = 24\mu\text{s}$$

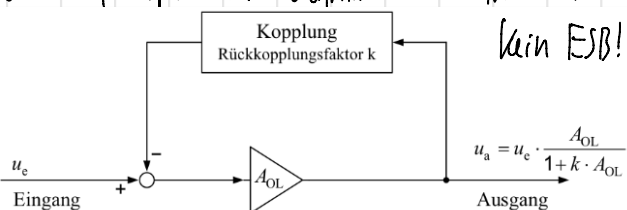
Operationsverstärker mit Rückkopplung

- Rückkopplung Ausgang auf Eingang: am Ausgang des OP stellt sich dauerhaft Spann. mit $U_{a,min} < U_a < U_{a,max}$ ein

- mit A_{OL} : Verstärkung des offenen Verstärkers

k : Rückkopplungsfaktor

- Gegenkopplung: rückgekoppelte Spann. wird von Eingangsdifferenzspann. subtrahiert (Bild)

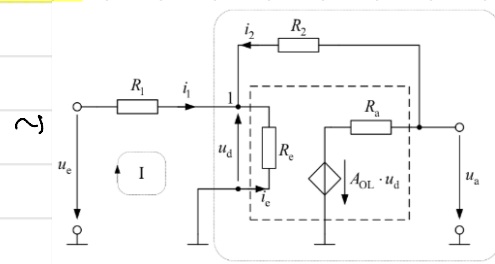
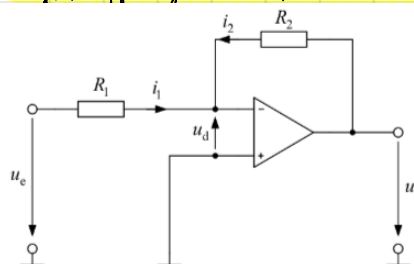


- Mitkopplung: rückgekoppelte Spann. wird addiert

- OP als Verstärker: starke Gegenkopplung $\sim u_a$ stellt sich so ein, dass $u_d = 0$ (idealer OP)

Schaltungen mit rückgekoppelten Operationsverstärkern (Gegenkopplung)

Gegenkopplung - Invertierender Verstärker



$$\begin{array}{l} \text{MRI: } R_1 \cdot i_1 - u_d - u_e = 0 \\ \text{MRII: } u_a + u_d - R_2 \cdot i_2 = 0 \\ \text{RL 1: } i_1 + i_2 - i_e = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ideal} \\ u_e = R_1 \cdot i_1 \\ u_a = R_2 \cdot i_2 \\ i_1 = -i_2 \end{array} \right. \sim V_a = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Sonderfall Invertierer: $R_1 = R_2 \sim V_a = -1$

- durch ohmschen Widerstand rückgekoppelt
- nichtinvertierender Eingang auf Masse gelegt
- über R_1 : Zuführung u_e auf invertierendem Eing.
- Ziel: Bestimmung u_a in Abhängigkeit von u_e

Gegenkopplung - Nichtinvertierender Verstärker

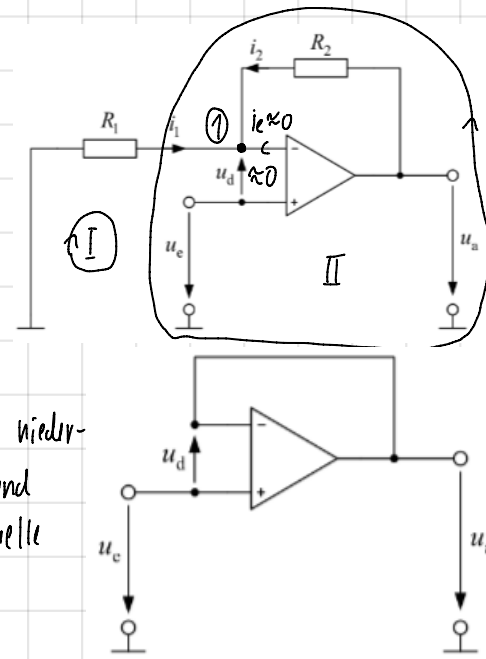
- invertierender Eingang über R_1 auf Masse gekipft
- u_e wird direkt dem nichtinvertierenden Eingang zugeführt

$$\left. \begin{array}{l} \text{MR I: } -u_e = R_1 i_1 \\ \text{MR II: } u_a = u_e + R_2 \cdot i_2 \\ \text{KR 1: } i_1 = -i_2 \end{array} \right\} \sim V_u = \frac{u_a}{u_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \sim \text{keine Invertierung}$$

Sonderfall Impedanzwandler: $R_1 \rightarrow \infty, R_2 = 0 \sim V_u = 1$

oder Spannungsfolger hoher Eingangs-, niedriger Ausgangswiderstand $\sim$ Koppln. niederohmiger Verbraucher an Quellen mit hohem Innenwiderstand
Umwandlung Quelle mit hohem Innenwiderstand in Quelle mit niedrigem Innenwiderstand

Schaubilder für alle Schaltungen auf FS

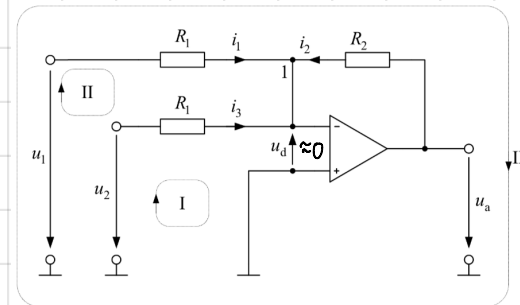


Gegenkopplung - Addierer

- gleichzeitige Addition & Verstärkung analoger Spannungen

$$\left. \begin{array}{l} \text{MR I: } -u_2 + R_1 \cdot i_3 = 0 \\ \text{MR II: } -u_1 + R_1 \cdot i_1 - R_1 \cdot i_3 + u_2 = 0 \\ \text{MR III: } u_a - u_1 + R_1 \cdot i_1 - R_2 \cdot i_2 = 0 \\ \text{KR 1: } i_1 + i_3 + i_2 = 0 \end{array} \right\} \sim u_a = \frac{R_2}{R_1} (u_1 + u_2) \quad \text{invertierend, Verstärkung um } \frac{R_2}{R_1}$$

(invertierender Addierer)

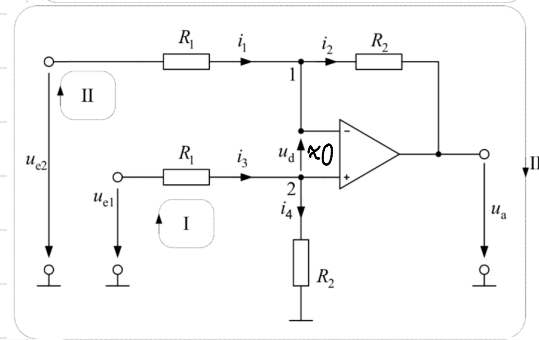


Gegenkopplung - Subtrahierer

- Bildung der Differenz zweier Spannungen & gleichzeitige Verstärkung

$$\left. \begin{array}{l} \text{MR I: } -u_{e1} + R_1 \cdot i_3 + R_2 \cdot i_4 = 0 \\ \text{MR II: } -u_{e2} + R_1 \cdot i_1 - R_1 \cdot i_3 + u_{e1} = 0 \\ \text{MR III: } -u_{e2} + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + u_a = 0 \\ \text{KR 1: } i_1 = i_2 \\ \text{KR 2: } i_3 = i_4 \end{array} \right\} u_a = \frac{R_2}{R_1} (u_{e1} - u_{e2})$$

(Differenzverstärker)



Gegenkopplung - Integrierer

- Realisierung einer zeitabhängigen Schaltung

$$\text{MR I: } -u_e + R \cdot i_1 = 0 \quad \sim u_c = u_a \quad (1)$$

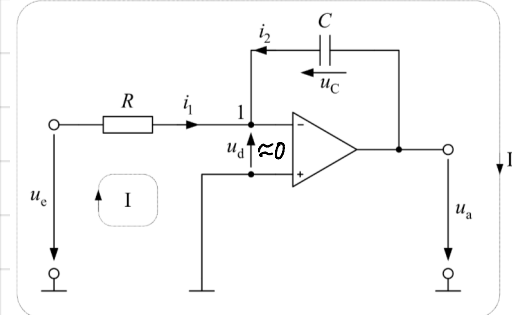
$$\text{MR II: } -u_e + R \cdot i_1 - u_c + u_a = 0$$

$$\text{KR 1: } i_1 + i_2 = 0 \sim i_2 = -i_1 \quad (2)$$

$$\text{Kondensatorgl: } i_2 = C \frac{du_c}{dt} \sim u_c = \frac{1}{C} \int i_2 dt + K \leftarrow \text{Integrationskonstante (3)}$$

$$(1) \& (2) \sim u_a = -\frac{1}{RC} \int u_e dt + K$$

$$\text{zeitlich konst. Eingangsspannung: } u_a(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_e \cdot d\tau$$



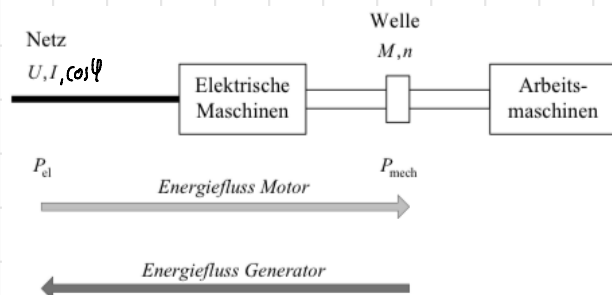
Elektrische Maschinen

Elektrische Maschinen - Grundlagen

M: Drehmoment n: Drehzahl

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{\text{nutzbar abgegebene Leistung}}{\text{insgesamt aufgenommene Leistung}} = \frac{P_{ab}}{P_{auf}}$ (5.1)

Motor: $\eta_M = \frac{P_{mech}}{P_{el}}$ (5.2) Generator: $\eta_G = \frac{P_{el}}{P_{mech} + P_{el, Feld}}$ (5.3)



elektrische Wirkleistung: Gleichstrom: $P_{el} = U \cdot I$ (5.4)
 Erzeugung des magnetischen Feldes

WS: $P_{el} = m \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$ (5.5)
 Effektivwerte m: Anzahl der Stränge

mechanische Leistung: $P_{mech} = M \cdot \Omega$ (5.6) Ω : Winkelgeschw.
 $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot n$ (5.7) $[\Omega] = s^{-1}$ $[n] = s^{-1} = \frac{[n] \text{ in } min^{-1}}{60 \cdot s \cdot min^{-1}}$

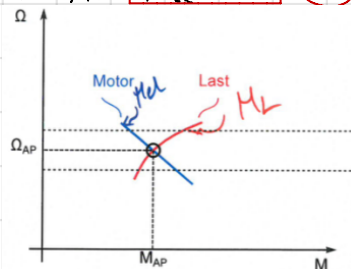
Nennleistung P_N : höchste Leistung, die dauerhaft erbracht werden kann, ohne Lebensdauer/Sicherheit der EM zu beschränken
 Motor: $P_N = P_{mech}$ Generator: $P_N = P_{el}$

Arbeitspunkt

- Punkt auf Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie der Antriebsmaschine, der sich einstellt, wenn Maschine mit Last/Arbeitsmaschine belastet wird $\hat{=}$ Schnittpunkt beider Kennlinien

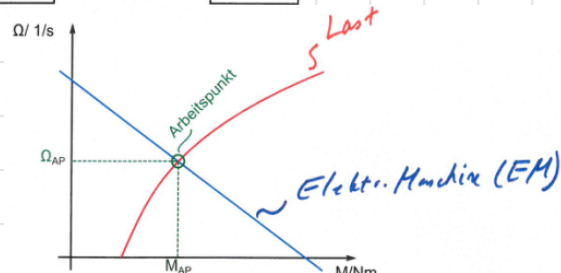
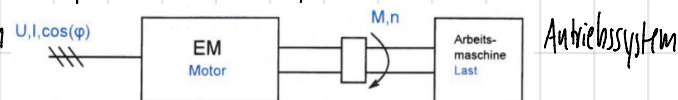
$M_{el} - M_{last} = M_B$ M_B : Bremsungsmoment M_{el} : Motor

im AP: $M_{el} = M_L$ (5.8)



$\Omega > \Omega_{AP} \rightarrow M_L > M_{el} : M_B < 0$
 $\Omega < \Omega_{AP} \rightarrow M_{el} > M_L : M_B > 0$ } dann stabiler AP

$$\left| \frac{dM_L}{d\Omega} \right|_{AP} > \left| \frac{dM_{el}}{d\Omega} \right|_{AP} \quad (5.9)$$



Elektromagnetismus

- homogenes Magnetfeld: Feldlinien parallel und Betrag des Feldes ist überall gleich

$\vec{H}$: magn. Feldstärke $[\vec{H}] = A \cdot m^{-1}$

$\vec{B}$: magn. Flussdichte (Magnetfeld): $Vs \cdot m^{-2}$

Φ : magn. Fluss: Anzahl der Feldlinien, die eine Fläche A durchsetzen

- vereinfachte Beziehung für homogenes magn. Feld und senkrechte Flächen

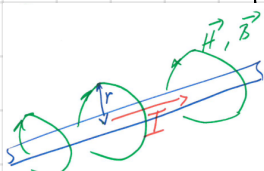
$$|\vec{B}| = \frac{\Phi}{A} \quad (5.10)$$

$B = f(H)$: Hysteresekurve $\sim$ linearer Bereich der Hysteresekurve: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$ (5.11)

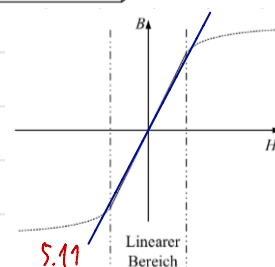
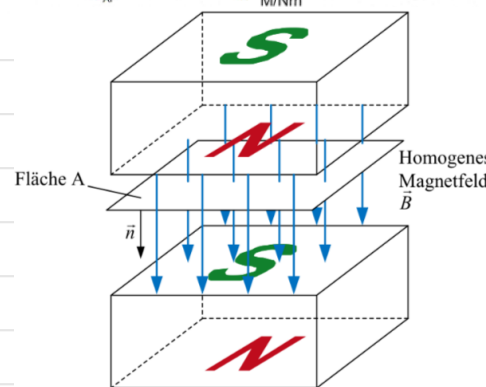
für Weichmagnete; μ_r : Permeabilitätszahl des Werkstoffes

Feld um stromdurchflossenen Leiter: rechte Faust Regel: Daumen in Stromrichtung, andere Finger

zeigen Richtung der kreisförmigen Feldlinien von $\vec{H}$ (magnetisches Feld)



$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (5.12)$$



Lorentz'sches Kraftgesetz: Kraft auf stromdurchflossenen Leiter in Magnetfeld

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} \quad (5.13) \quad \vec{F}: \text{Kraft auf Leiter} \quad \vec{e}: \text{Einheitsvektor in techn. Stromrichtung}$$

$\vec{B}$: magn. Flussdichte L : Länge des Leiters I : Strom durch Leiter

rechte Hand Regel: Daumen in Stromflussrichtung, Zeigefinger in Richtung der magn. Flussdichte
 $\rightarrow$ Mittelfinger zeigt Richtung der Kraft

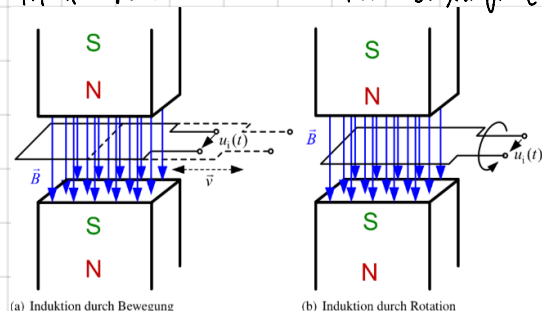
$$|\vec{F}| = I \cdot L \cdot |\vec{e}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\angle \vec{e}, \vec{B})$$

Induktionsgesetz: jede Änderung des magn. Flusses Φ verursacht die Induktion einer elektr. Spannung

$$u_i(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (5.14)$$

N : Anzahl Leiterschleifen

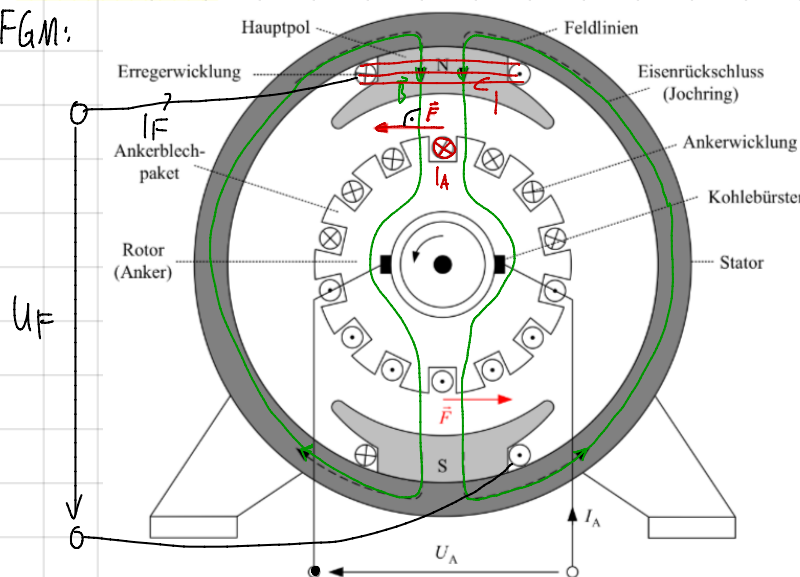
1. Fall: ruhendes (konstantes) Feld & bewegte Leiterschleife



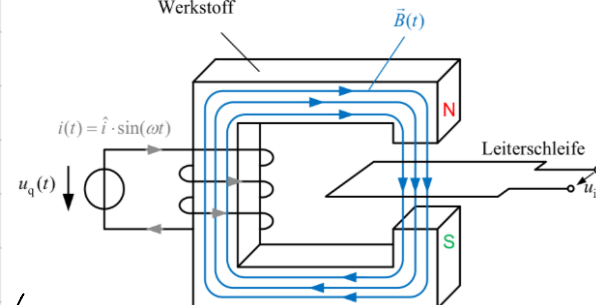
$\hookrightarrow$ Bewegungsinduktion / Generatorprinzip

Gleichstrommaschine

FGM:

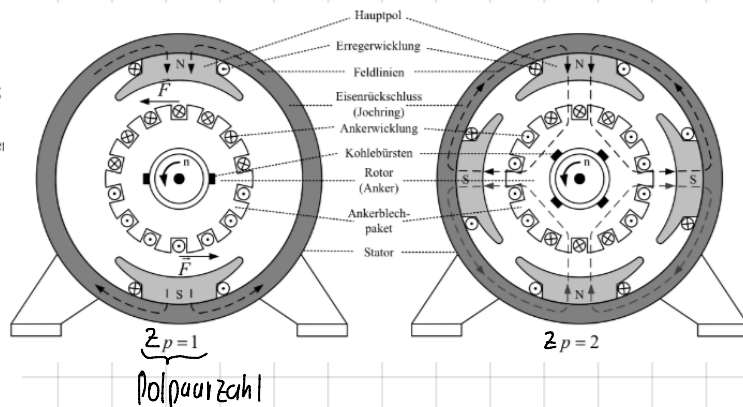


2. Fall: ruhende Leiterschleife & Kern aus weichmagnetischem Werkstoff



$\hookrightarrow$ Ruheinduktion / Transformatorprinzip

Polzahl:



Kraft auf einen Leiter: $F_{el,1} = I_A \cdot L \cdot B$, N Windungen ($2N$ -Leiter): $F_{el} = 2 \cdot N \cdot I_A \cdot L \cdot B \quad (5.15)$ (Rotor)

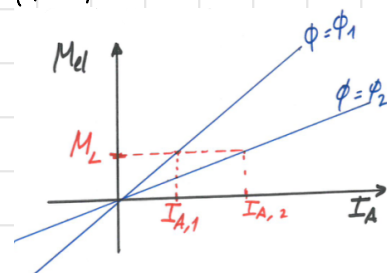
Drehmoment Rotor mit Rotorradius r : $M_{el} = F_{el} \cdot r = 2 \cdot N \cdot L \cdot I_A \cdot B \cdot r \quad (5.16) \quad (5.17)$

$$\Phi = B/A \sim M_{el} = \frac{2 \cdot N \cdot Z_p}{\pi} \cdot \Phi \cdot I_A = C \cdot \Phi \cdot I_A = C \cdot \text{Maximalkonstante}$$

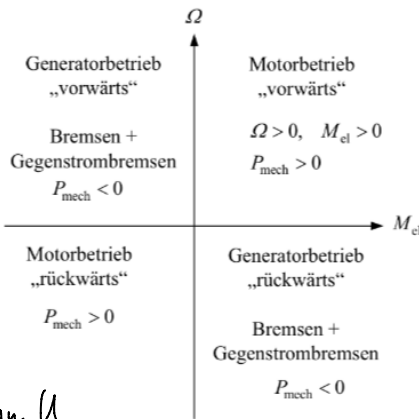
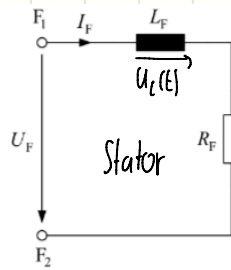
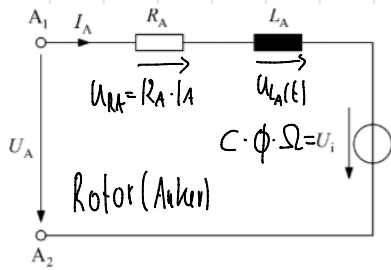
induzierte Spann. U_i in einem Leiter: $U_{i,1} = \Omega \cdot r \cdot L \cdot B$, $2N$ -Leiter: $U_i = 2 \cdot N \cdot r \cdot L \cdot B \quad (5.18)$

$$\Phi = B/A \sim U_i = C \cdot \Phi \cdot \Omega \quad (5.19)$$

$\Phi = f(I_F)$ bei fremderregter GM, $\Phi = \text{konst.}$ bei permanenterregter GM



Elektrisches Ersatzschaltbild der Gleichstrommaschine, motorischer und generatorischer Betrieb



im stationären Zustand ($i_A = I_A + i_A(t)$) $i_A(t) = 0 \Rightarrow i_A = I_A$

$$u_{LA}(t) = \frac{dI_A}{dt} = 0 \quad u_{LF}(t) = \frac{dI_F}{dt} = 0$$

Drehzahlstellverfahren

- aus ESB folgt: $\Omega = \frac{U_A}{c \cdot \Phi} - \frac{R_A}{(c \cdot \Phi)^2} \cdot M_{el}$ - $M_{el} = c \cdot \Phi \cdot I_A$ (S.20)

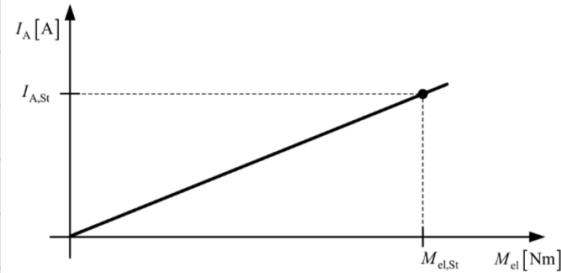
Drehmoment - Drehzahl - Kennlinie der FGM für PMGM: $c \cdot \Phi = \text{konstant}$
- Veränderung einzelner Parameter ($U_A, \Phi, \dots$): Beeinflussung der Kennlinien

S.20: $M_{el} = 0$: $\Omega_0 = \frac{U}{c \cdot \Phi}$ (S.21) $\Omega = 0$: $M_{el, st} = \frac{U}{R_A} \cdot c \cdot \Phi$ (S.22)

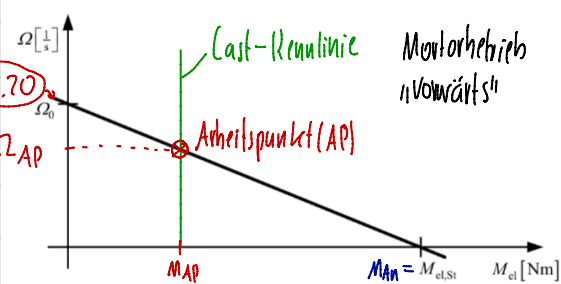
Nennkennlinie: $U = U_N, \Phi = \Phi_N$: $\Omega = \frac{U_N}{c \cdot \Phi_N} - \frac{R_A}{(c \cdot \Phi_N)^2} \cdot M_{el}$ (S.23)

Nennpunkt: AP auf Nennkennlinie mit $\Omega = \Omega_N, M_{el} = M_{el, N}$

$\Omega_N = \frac{U_N}{c \cdot \Phi_N} - \frac{R_A}{(c \cdot \Phi_N)^2} \cdot M_{el, N}$ (S.24) M_{AN} : Anlaufdrehmoment ($\hat{=}$ Stillstands-drehmoment $M_{el, st}$)
 Ω_0 : Leerlaufwinkelgeschwindigkeit



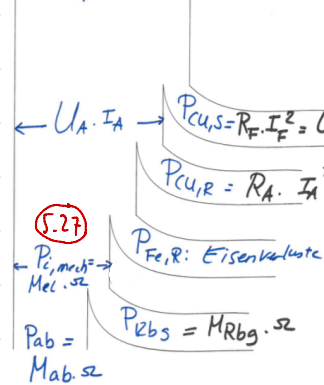
(a) Ankerstrom über Drehmoment



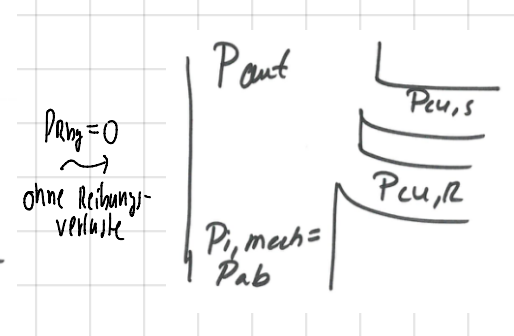
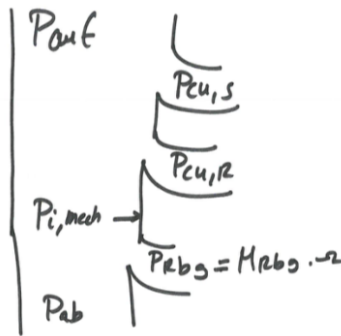
(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment

Leistungsflussdiagramm für FGM-Motor

$P_{auf} = P_{auf, s} + P_{auf, r}$
 $= U_F \cdot I_F + U_A \cdot I_A$

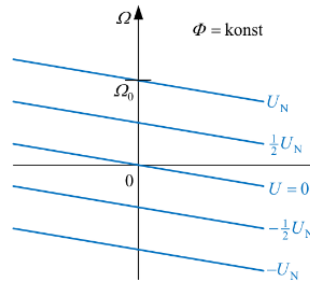
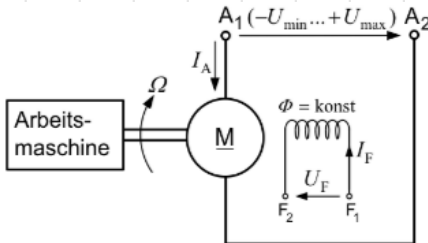


$P_{Cu, s} = R_F \cdot I_F^2 = \frac{U_F^2}{R_F}$ (S.25) $P_{Fe} = 0$
 $P_{Cu, r} = R_A \cdot I_A^2$ (S.26) $\sim$ ohne Eisenverluste
 $P_{Rbg} = M_{Rbg} \cdot \Omega$
 $P_{ab} = M_{ab} \cdot \Omega$

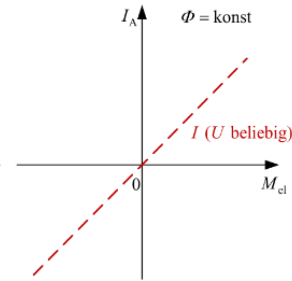


Drehzahlsteuerung FGM - Spannungssteuerung

- Variation $U_A = U$: Ω - M -Kennlinie wird parallel verschoben; lin. Abh. des erzeugten Drehmoments M_{el} von I_A bleibt erhalten



(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment

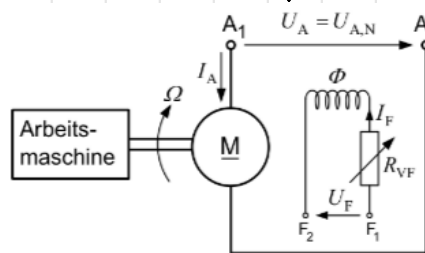


(c) Ankerstrom über Drehmoment

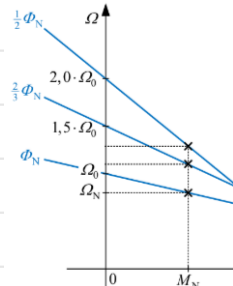
- ① verlustarm
- ② dynamisch
- $\sim$ Stellglied wird benötigt

Drehzahlsteuerung FGM - Fluss-/Feldsteuerung

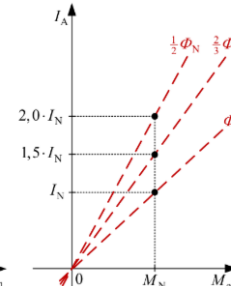
- Variation Erregerstrom I_F : Steigung der Ω -M-KL & I_A -M-KL kann verändert werden
- aber: Fluss-schwächung: $M_{\text{ex}} = C \cdot \Phi \cdot I_A \Rightarrow M$ sinkt



(a) Anordnung



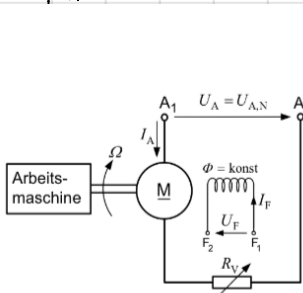
(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment



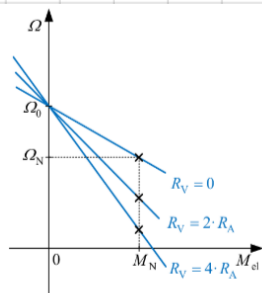
(c) Ankerstrom über Drehmoment

Drehzahlsteuerung FGM - Widerstandssteuerung

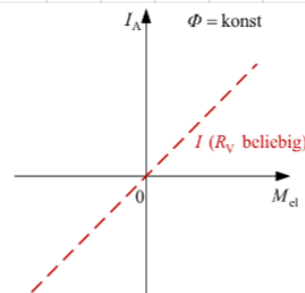
- Einbringen zusätzl. Widerstand R_V in Ankerkreise: Veränderung Steigung der Ω -M-KL ohne Beeinflussung der Leerlaufdrehzahl



(a) Anordnung



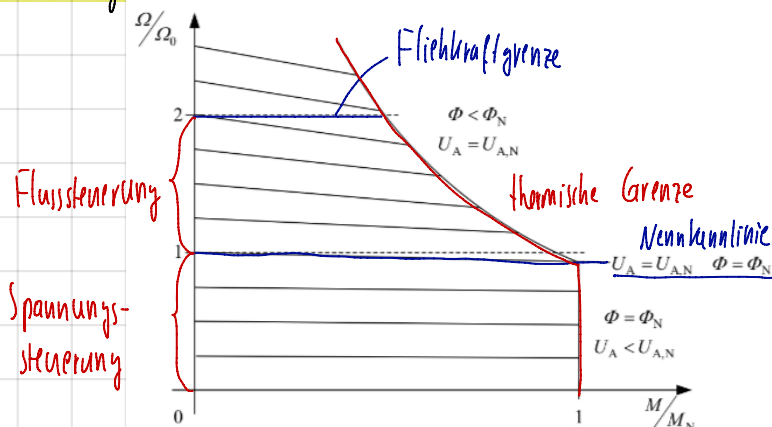
(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment



(c) Ankerstrom über Drehmoment

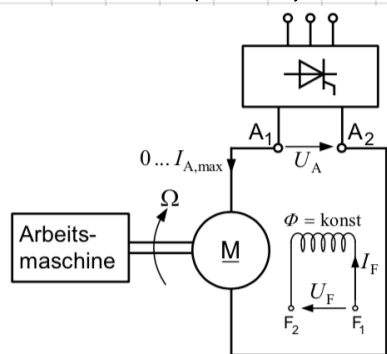
- ⊕ einfacher Aufbau
- ⊖ unwirtschaftlich
- für dauerhaften Betrieb weniger geeignet

Drehzahlsteuerung FGM - Kombination mehrerer Steuerverfahren

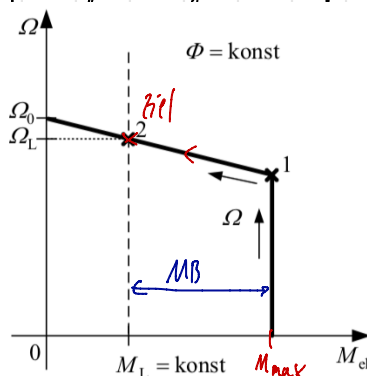


Anlaufverfahren

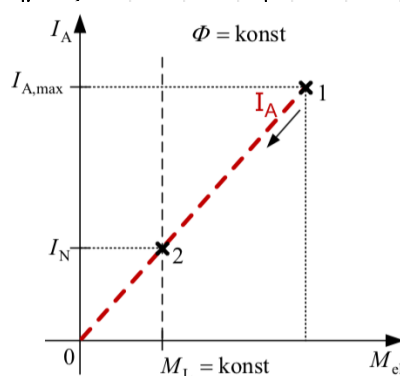
- Anlaufen (Einschalten bei Stillstand) einer Gm: spezielle Anlaufverfahren
- U_i bei Stillstand $OV \sim$ beim Anlegen der vollen U_A ohne weitere Maßnahmen evtl. zu großer I_A , da nur Ankerwiderstand R_A den Strom begrenzen würde
- 1. Verfahren: Spann.steuerung $\sim U_A$ langsam erhöhen, so dass max. zulässiger Anlaufstrom nicht überschritten wird, bei Erreichen Ankerennspannung (oder gewünschte Spannung) $\sim AP$ wandert auf Nennlinie bis zum Nennpunkt



(a) Anordnung



(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment

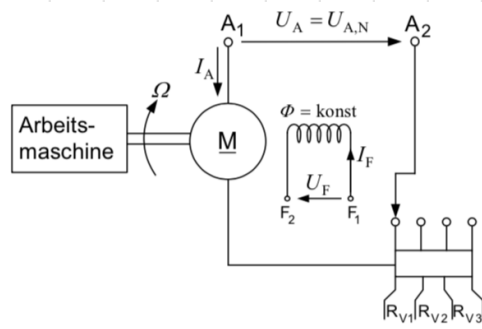


(c) Ankerstrom über Drehmoment

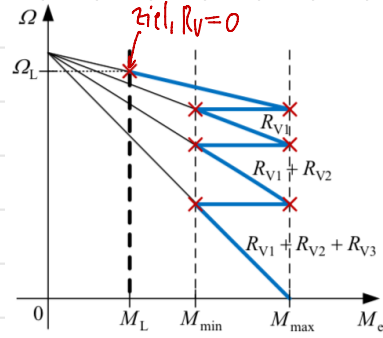
$$M_B = M_{\text{ex}} - M_L$$

$$M_B: \text{Beschleunigungsmoment}$$

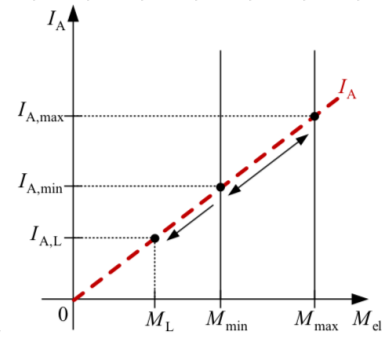
- 2. Verfahrens Widerstandssteuerung mit mehreren Vorwiderständen im Ankerkreis, die nach & nach überbrückt werden



(a) Anordnung

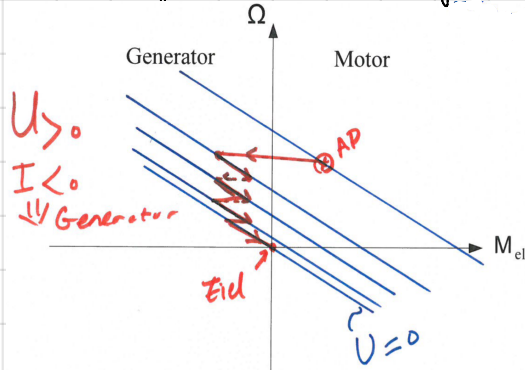


(b) Winkelgeschwindigkeit über Drehmoment



(c) Ankerstrom über Drehmoment

- Nutzfremdung: schrittweise Reduzierung der Ankerspannung



Vor- und Nachteile der Gleichstrommaschine

Vorteile:

- + sehr gute Steuer- und Regeleigenschaften
- + hoher Stellbereich von niedrigen bis sehr hohen Drehzahlen
- + hohes Anlaufmoment

Nachteile:

- mechanische Kommutierung
- Verschleiß der Kohlebürsten
- Funkenbildung