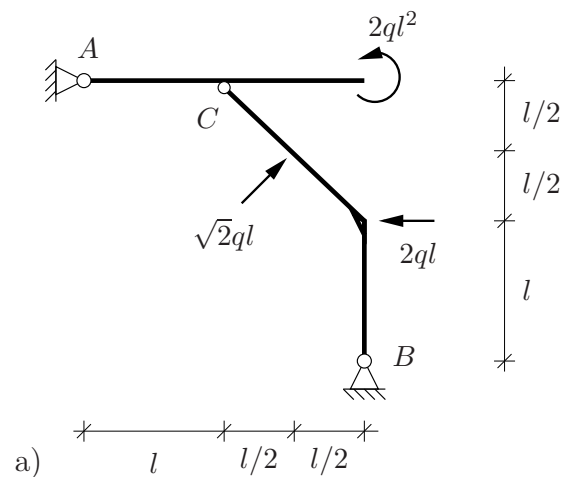


Aufgabe 1 (25 Punkte)

Das in a) dargestellte Tragwerk wird durch zwei Einzellasten sowie durch ein Einzelmoment beansprucht.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte.

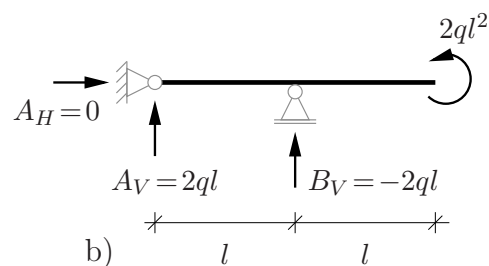
Geg.: q, l .



Das in b) dargestellte System wird durch ein Einzelmoment beansprucht. Die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen im Tragwerk und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

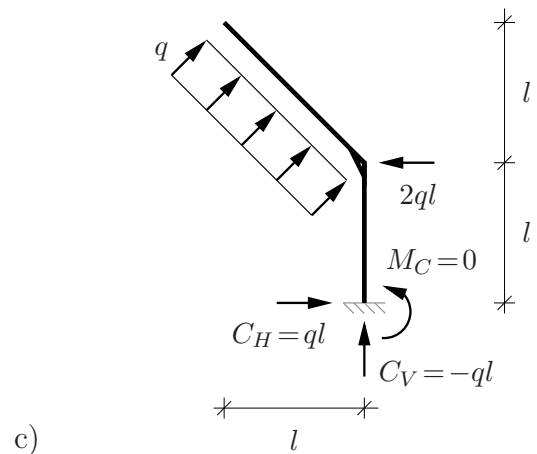
Geg.: q, l .



Der in c) abgebildete Kragarm wird durch eine Einzellast sowie durch eine gleichförmige Streckenlast q senkrecht zur Stabachse beansprucht. Die Auflagerreaktionen im Punkt C sind gegeben.

4. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen im Tragwerk und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

Geg.: q, l .



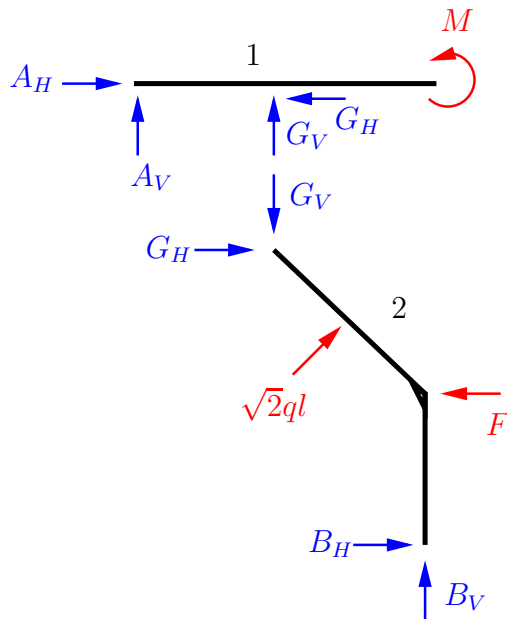
Lösung**1. statische Bestimmtheit**

$$f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

→ Das System ist statisch bestimmt.

2. Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte im Tragwerk a)

Freischnitt:



Teilsystem 1:

$$\Sigma H : A_H - G_H = 0 \quad \rightarrow A_H = G_H$$

$$\Sigma M_A : G_V \cdot l + 2ql^2 = 0 \quad \rightarrow \boxed{G_V = -2ql}$$

$$\Sigma V : A_V + G_V = 0 \quad \rightarrow \boxed{A_V = 2ql}$$

Teilsystem 2:

$$\Sigma M_B : 2ql \cdot l - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}ql \cdot \frac{3}{2}l - G_H \cdot 2l + G_V \cdot l = 0 \quad \rightarrow \boxed{G_H = -ql}$$

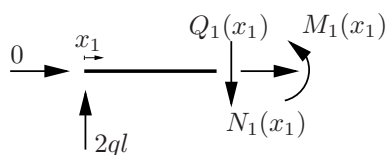
$$\rightarrow \boxed{A_H = -ql}$$

$$\Sigma H : G_H + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}ql - 2ql + B_H = 0 \quad \rightarrow \boxed{B_H = 2ql}$$

$$\Sigma V : B_V + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}ql - G_V = 0 \quad \rightarrow \boxed{B_V = -3ql}$$

3. Schnittgrößen im Tragwerk b)

3.1 Teilsystem 1



$$\rightarrow: N_1(x_1) = 0$$

$$\boxed{N_1(x_1) = 0}$$

$$\downarrow: Q_1(x_1) - 2ql = 0$$

$$\boxed{Q_1(x_1) = 2ql}$$

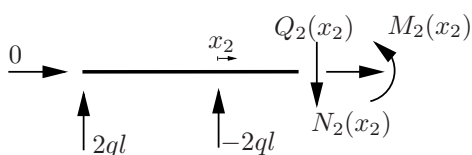
$$\Sigma M_S: M_1(x_1) - 2qlx_1 = 0$$

$$\boxed{M_1(x_1) = 2qlx_1}$$

$$M_1(x_1 = 0) = 0$$

$$M_1(x_1 = l) = 2ql^2$$

3.2 Teilsystem 2



$$\rightarrow: N_2(x_2) = 0$$

$$\boxed{N_2(x_2) = 0}$$

$$\downarrow: Q_2(x_2) = 0$$

$$\boxed{Q_2(x_2) = 0}$$

$$\Sigma M_S: M_2(x_2) + 2qlx_2 - 2ql(l + x_2) = 0$$

$$\boxed{M_2(x_2) = 2ql^2}$$

$$M_2(x_2 = 0) = 2ql^2$$

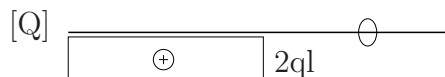
$$M_2(x_2 = l) = 2ql^2$$

3.3 Graphische Darstellung

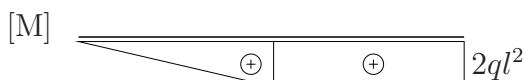
Normalkraftverlauf



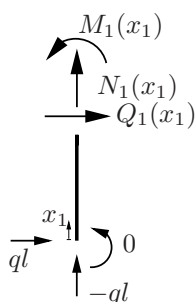
Querkraftverlauf



Momentenverlauf

**4. Schnittgrößen im Tragwerk c)**

4.1 Teilsystem 1



$$\uparrow: N_1(x_1) = 0$$

$$\boxed{N_1(x_1) = 0}$$

$$\rightarrow: Q_1(x_1) + ql = 0$$

$$\boxed{Q_1(x_1) = -ql}$$

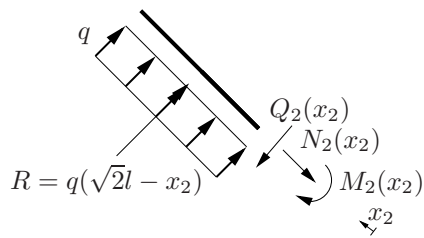
$$\Sigma M_S: M_1(x_1) + qlx_1 = 0$$

$$\boxed{M_1(x_1) = -qlx_1}$$

$$M_1(x_1 = 0) = 0$$

$$M_1(x_1 = l) = -ql^2$$

4.2 Teilsystem 2



$$\nearrow: N_2(x_2) = 0$$

$$N_2(x_2) = 0$$

$$\swarrow: Q_2(x_2) - q(\sqrt{2}l - x_2) = 0$$

$$Q_2(x_2) = q(\sqrt{2}l - x_2)$$

$$\Sigma M_S: M_2(x_2) + q(\sqrt{2}l - x_2)\frac{\sqrt{2}l - x_2}{2} = 0$$

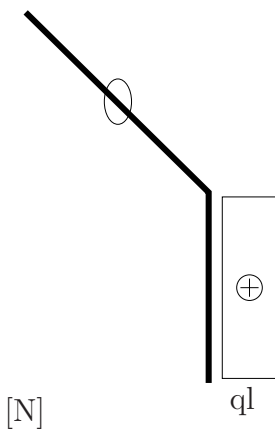
$$M_2(x_2) = -\frac{q}{2}(\sqrt{2}l - x_2)^2$$

$$M_2(x_2 = 0) = -ql^2$$

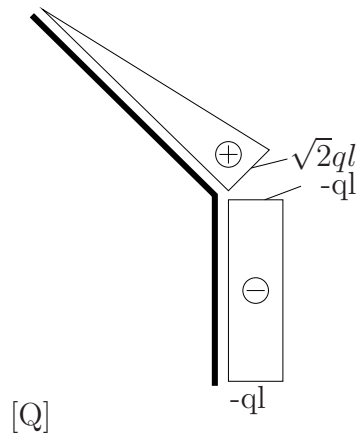
$$M_2(x_2 = \sqrt{2}l) = 0$$

4.3 Graphische Darstellung

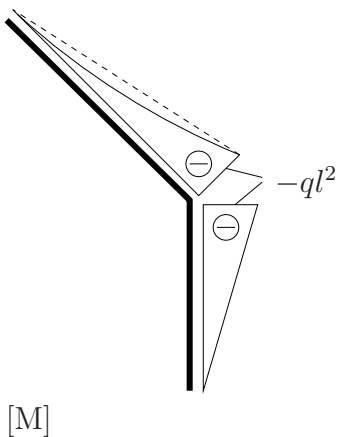
Normalkraftverlauf



Querkraftverlauf



Momentenverlauf



Aufgabe 2 (25 Punkte)

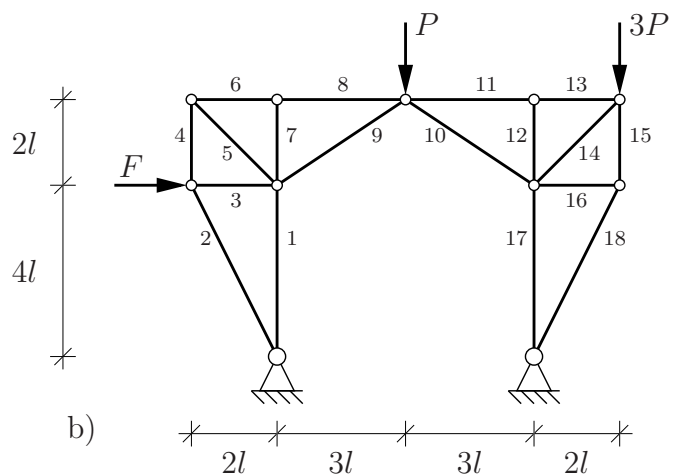
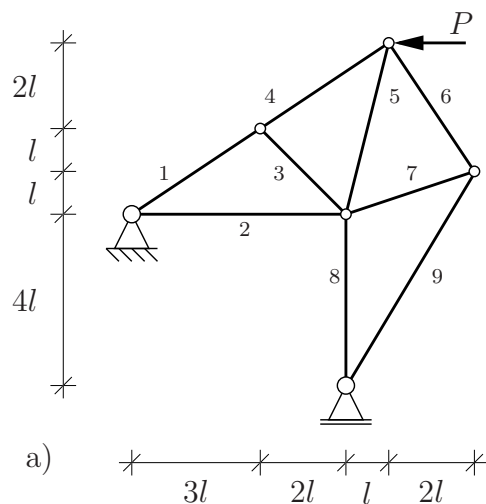
Die in a) und b) dargestellten Fachwerke werden durch Einzellasten beansprucht.

1. Überprüfen Sie beide Systeme auf statische Bestimmtheit.
2. Geben Sie alle direkt ersichtlichen Nullstäbe des Fachwerks in Abb. a) an.

Bestimmen Sie für das in b) dargestellte Fachwerk

3. sämtliche Auflagerreaktionen,
4. die Stabkräfte in den Stäben 6, 7 und 9 mit Hilfe eines geeigneten *Ritterschnittes*,
5. die Stabkräfte in den Stäben 1–5 und 8 mit Hilfe des *Knotenpunktverfahrens*, sowie
6. den Wertebereich von F so, dass die Stäbe 8 und 9 auf Zug beansprucht werden.

Geg.: l , F , P .

**Lösung****1. Statische Bestimmtheit**

$$\text{System a): } f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 6 - (3 + 9) = 0$$

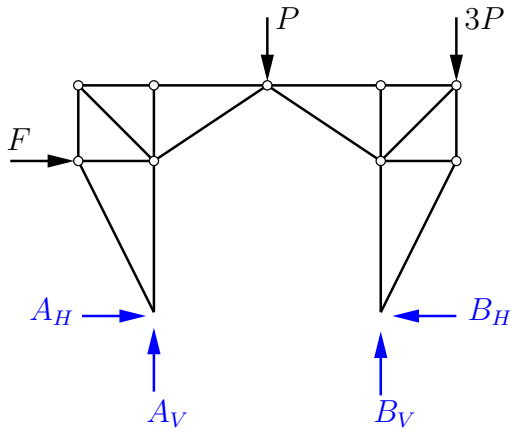
$$\text{System b): } f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 11 - (4 + 18) = 0$$

⇒ Die Systeme sind statisch bestimmt.

2. Nullstäbe

$$S_3, S_9, S_6, S_7$$

3. Auflagerkräfte



$$\curvearrowright \Sigma M_A : B_V \cdot 6l - P \cdot 3l - 3P \cdot 8l - F \cdot 4l = 0$$

$$\Rightarrow B_V = \frac{9}{2} + \frac{2}{3}F$$

$$\uparrow \Sigma V : A_V + B_V - P - 3P = 0$$

$$\Rightarrow A_V = -\frac{1}{2}P - \frac{2}{3}F$$

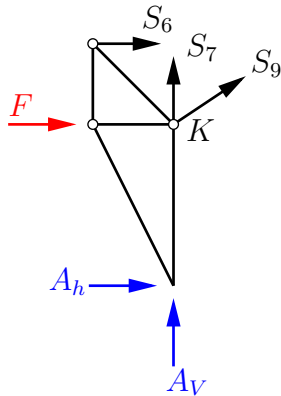
$$\curvearrowright \Sigma M_G : -B_H \cdot 6l + B_V \cdot 3l - 3P \cdot 5l = 0$$

$$\Rightarrow B_H = -\frac{1}{4}P + \frac{1}{3}F$$

$$\rightarrow \Sigma H : A_H - B_H + F = 0$$

$$\Rightarrow A_H = -\frac{1}{4}P - \frac{2}{3}F$$

4. Ermittlung der Kräfte in den Stäben 6, 7 und 9 mit geeignetem Ritterschnitt



$$\curvearrowright \Sigma M_K : -S_6 \cdot 2l + A_H \cdot 4l = 0$$

$$\Rightarrow S_6 = -\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}F$$

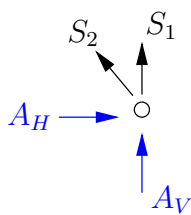
$$\rightarrow \Sigma H : S_6 + \frac{3}{\sqrt{13}}S_9 + F + A_H = 0$$

$$\Rightarrow S_9 = \frac{1}{4}\sqrt{13}P + \frac{1}{3}\sqrt{13}F$$

$$\uparrow \Sigma V : A_V + S_7 + \frac{2}{\sqrt{13}}S_9 = 0$$

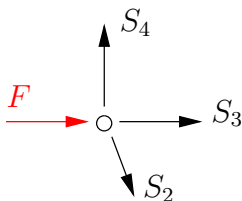
$$\Rightarrow S_7 = 0$$

5. Ermittlung Stabkräfte 1-5 und 8 mit dem Knotenpunktverfahren



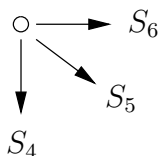
$$\rightarrow \Sigma H : A_H - \frac{1}{\sqrt{5}}S_2 = 0 \quad \rightarrow S_2 = -\frac{\sqrt{5}}{4}P - \frac{2}{3}\sqrt{5}F$$

$$\uparrow \Sigma V : A_V + S_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}S_2 = 0 \quad \rightarrow S_1 = P + 2F$$

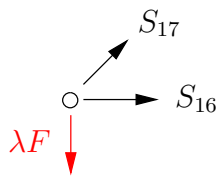


$$\rightarrow \Sigma H : F + S_3 + \frac{2}{\sqrt{20}}S_2 = 0 \quad \rightarrow S_3 = \frac{1}{4}P - \frac{1}{3}F$$

$$\uparrow \Sigma V : S_4 - \frac{4}{\sqrt{20}}S_2 = 0 \quad \rightarrow S_4 = -\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}F$$



$$\rightarrow \Sigma H : S_6 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_5 = 0 \quad \rightarrow S_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}P - \frac{4}{3}\sqrt{2}F$$



$$\rightarrow \Sigma H : S_8 - S_6 = 0$$

$$\rightarrow S_8 = -\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}F$$

6. zulässiger Wertebereich für F

$$\text{Zug: } S_8 > 0 \rightarrow -\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}F > 0 \rightarrow F < -\frac{3}{8}P$$

$$\text{Zug: } S_9 > 0 \rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{13}P + \frac{1}{3}\sqrt{13}F > 0 \rightarrow F > -\frac{3}{4}P$$

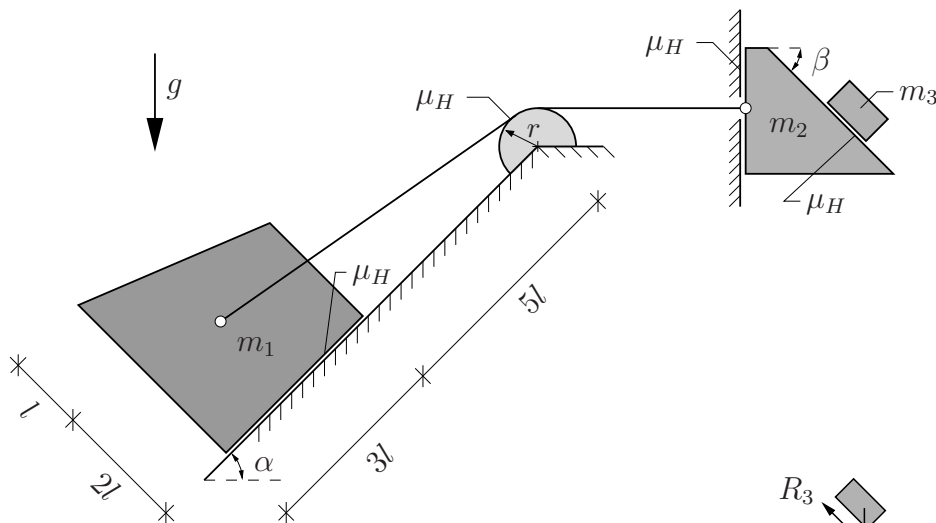
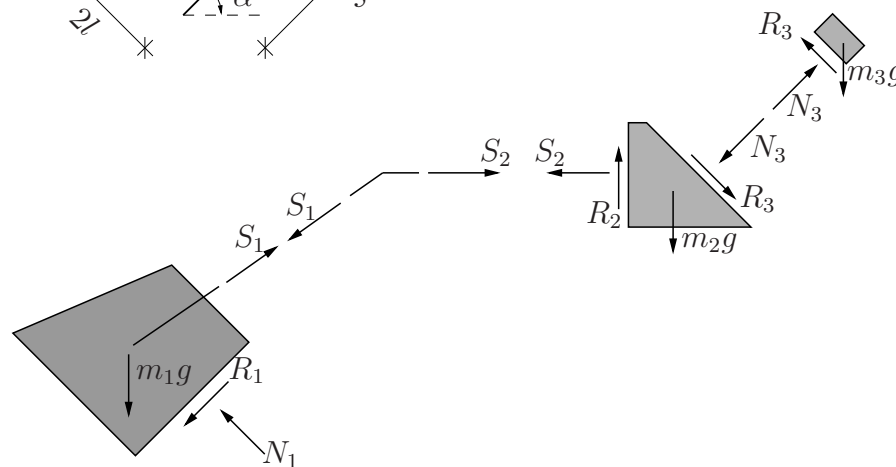
$$\boxed{\Rightarrow -\frac{3}{4}P < F < -\frac{3}{8}P}$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Die dargestellten Massen m_1 und m_2 sind über ein masseloses, dehnstarres Seil miteinander verbunden. Das Seil ist reibungsfrei mit der Masse m_1 in dessen Schwerpunkt verbunden und läuft über eine rauhe Umlenkwalze mit Radius r . Alle Oberflächen sind reibungsbehaftet (Haftreibungskoeffizient μ_H). Das System befindet sich in der gezeichneten Ruhelage.

1. Schneiden Sie alle Massen frei.
2. Wie groß darf der Winkel β maximal sein, damit die Masse m_3 in Ruhe bleibt?
3. Wie groß muss die an der Masse m_2 angreifende Seilkraft mindestens sein, damit das System in Ruhe bleibt?
4. Wie groß muss die Masse m_1 mindestens sein, damit das System in Ruhe bleibt?

Geg.: $\alpha, m_2, m_3, \mu_H, l, g, r = 0.5l$

**Lösung****1. Freischnitt****2. Maximaler Winkel β damit m_3 in Ruhe bleibt**

$$\rightarrow: N_3 \cdot \cos \beta - R_3 \cdot \sin \beta = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: -m_3 \cdot g + N_3 \cdot \sin \beta + R_3 \cdot \cos \beta = 0 \quad (2)$$

$$R_3 = N_3 \cdot \mu_H \quad (3)$$

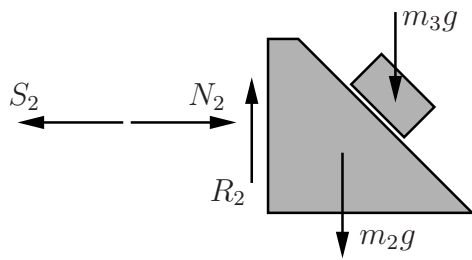
$$(3) \text{ in } (2): N_3 \sin \beta + N_3 \cdot \cos \beta \cdot \mu_H = m_3 \cdot g \Rightarrow N_3 = \frac{m_3 \cdot g}{\sin \beta + \cos \beta \cdot \mu_H} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (1): \frac{m_3 \cdot g}{\sin \beta + \cos \beta \cdot \mu_H} \cdot \cos \beta - \frac{m_3 \cdot g}{\sin \beta + \cos \beta \cdot \mu_H} \cdot \mu_H \cdot \sin \beta = 0$$

$$m_3 \cdot g \cdot \cos \beta - m_3 \cdot g \cdot \mu_H \cdot \sin \beta = 0$$

$$\mu_H = \tan \beta$$

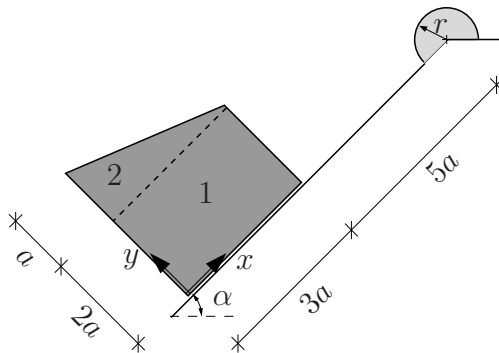
$$\Rightarrow \beta = \arctan(\mu_H)$$

3. Seilkraft S_2 

$$\rightarrow: S_2 = N_2; \quad \uparrow: R_2 - (m_2 + m_3) \cdot g = 0$$

$$R_2 = \mu_H \cdot N_2 = \mu_H \cdot S_2 = (m_2 + m_3) \cdot g$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{m_2 + m_3}{\mu_H} \cdot g$$

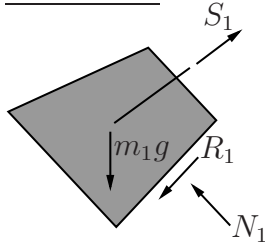
4. Masse m_1 

i	A_i	x_{si}	y_{si}	$A_i x_{si}$	$A_i y_{si}$
1	$6a^2$	$\frac{3}{2}a$	a	$9a^3$	$6a^3$
2	$\frac{3}{2}a^2$	a	$\frac{7}{3}a$	$\frac{3}{2}a^3$	$\frac{7}{2}a^3$
Σ	$7,5a^2$			$10,5a^3$	$9,5a^3$

$$x_S = \frac{10,5a^3}{7,5a^2} = 1,4a = \frac{7}{5}a$$

$$y_S = \frac{9,5a^3}{7,5a^2} = 1,267a = \frac{19}{15}a$$

Freischnitt:



Winkel des Seiles:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\frac{23}{30}a}{6,6a}\right) = 7,362^\circ$$

$$y_S - \frac{1}{2}a - \frac{23}{30}a \quad \left| y_S \right|$$

$$(3a - x_S) + 5a = 6,6a$$

Masse m_1 damit System in Ruhe bleibt:

$$S_2 \leq S_1 \cdot e^{\mu_H(\alpha - \beta)} \quad \text{mit } S_2 = \frac{m_2 + m_3}{\mu_H} \cdot g \quad (1)$$

$$\nearrow: 0 = -R_1 - m_1 g \cdot \sin \alpha + S_1 \cdot \cos \gamma$$

$$S_1 = \frac{R_1 + m_1 g \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma} \quad \text{mit } R_1 = N_1 \cdot \mu_H$$

$$S_1 = \frac{N_1 \mu_H + m_1 g \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma} \quad (2)$$

$$\nwarrow: 0 = N_1 - m_1 g \cos \alpha - S_1 \sin \gamma$$

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha + S_1 \sin \gamma \quad (3)$$

$$(3) \text{ in } (2): \quad S_1 = \frac{m_1 g \cdot \mu_H \cdot \cos \alpha + S_1 \cdot \mu_H \cdot \sin \gamma + m_1 g \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma}$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{\cos \gamma} m_1 g \mu_H \cos \alpha + S_1 \mu_H \tan \gamma + \frac{1}{\cos \gamma} m_1 g \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow S_1 (1 - \mu_H \tan \gamma) = \frac{1}{\cos \gamma} m_1 g \mu_H \cos \alpha + \frac{1}{\cos \gamma} m_1 g \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{\cos \gamma \cdot (1 - \mu_H \tan \gamma)} m_1 g (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\text{in } (1): \quad \frac{m_2 + m_3}{\mu_H} \cdot g \leq \frac{1}{\cos \gamma \cdot (1 - \mu_H \tan \gamma)} m_1 g (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot e^{\mu_H(\alpha - \beta)}$$

$$\Rightarrow m_1 \geq \frac{\cos \gamma (1 - \mu_H \tan \gamma) (m_2 + m_3)}{\mu_H (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha)} \cdot e^{-\mu_H(\alpha - \beta)}$$