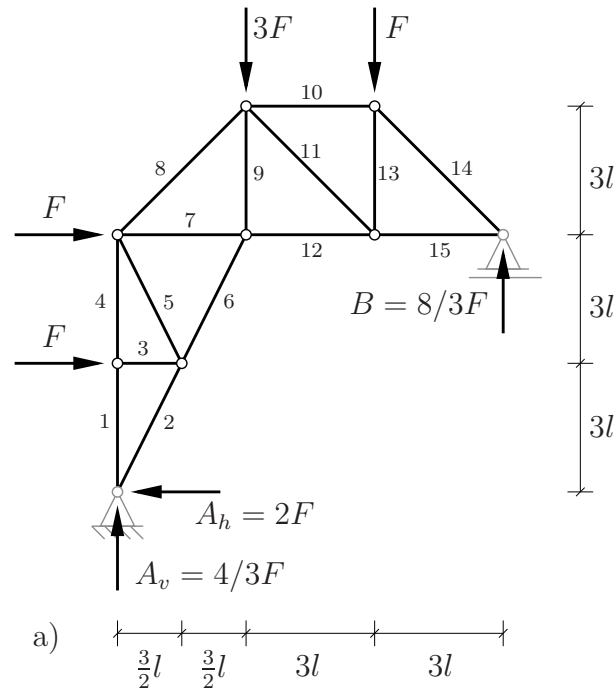


Aufgabe 1 (25 Punkte)

Das in Abbildung a) dargestellte Fachwerk wird durch vier Einzelkräfte belastet. Die Auflagerkräfte sind gegeben.

1. Berechnen Sie alle Stabkräfte mit dem Knotenpunktverfahren.

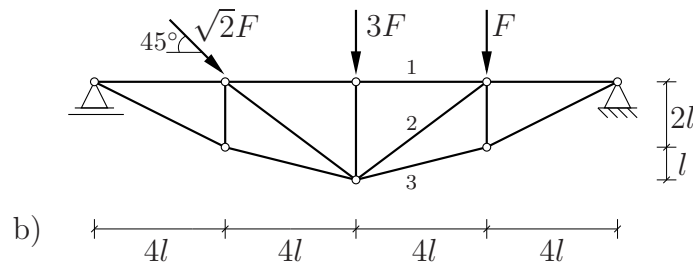
Geg.: l, F .



Die Fachwerk-Unterspannung in Abbildung b) wird durch drei Einzelkräfte belastet.

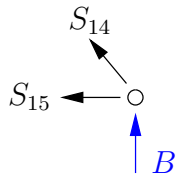
2. Überprüfen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
3. Bestimmen Sie sämtliche Auflagerkräfte.
4. Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 1, 2 und 3 mit Hilfe eines geeigneten Ritterschnittes.

Geg.: l, F .



Lösung

1. Ermittlung aller Stabkräfte mit dem Knotenpunktverfahren

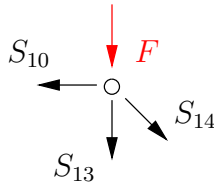


$$\uparrow \Sigma V : B + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{14} = -\frac{8}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot F$$

$$\leftarrow \Sigma H : S_{15} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{15} = \frac{8}{3} \cdot F$$

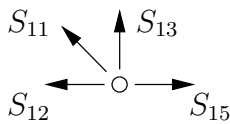


$$\downarrow \Sigma V : F + S_{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{13} = \frac{5}{3} \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : -S_{10} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{10} = -\frac{8}{3} \cdot F$$

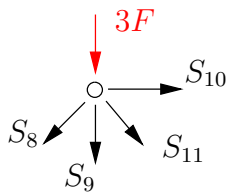


$$\uparrow \Sigma V : \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{11} + S_{13} = 0$$

$$\rightarrow S_{11} = -\frac{5}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : -S_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{11} + S_{15} = 0$$

$$\rightarrow S_{12} = \frac{13}{3} \cdot F$$

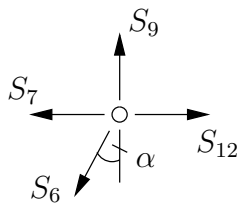


$$\rightarrow \Sigma H : -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{11} + S_{10} = 0$$

$$\rightarrow S_{8} = -\frac{13}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot F$$

$$\downarrow \Sigma V : \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{8} + S_{9} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{11} + 3 \cdot F = 0$$

$$\rightarrow S_{9} = 3 \cdot F$$



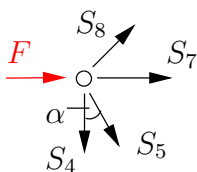
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\uparrow \Sigma V : S_{9} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{6} = 0$$

$$\rightarrow S_{6} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : -S_{7} + S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{6} = 0$$

$$\rightarrow S_{7} = \frac{17}{6} \cdot F$$

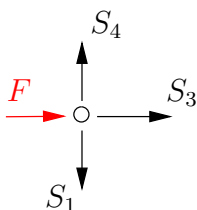


$$\rightarrow \Sigma H : F + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{8} + S_{7} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{5} = 0$$

$$\rightarrow S_{5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot F$$

$$\uparrow \Sigma V : -S_{4} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{8} = 0$$

$$\rightarrow S_{4} = -\frac{16}{3} \cdot F$$

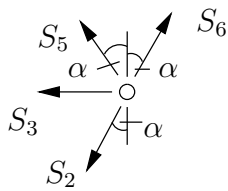


$$\rightarrow \Sigma H : S_{3} = -F$$

$$\rightarrow S_{3} = -F$$

$$\uparrow \Sigma V : S_{1} = S_{4}$$

$$\rightarrow S_{1} = -\frac{16}{3} \cdot F$$



$$\uparrow \Sigma V : \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_5 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_6 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_2 = 0 \quad \rightarrow S_2 = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot F$$

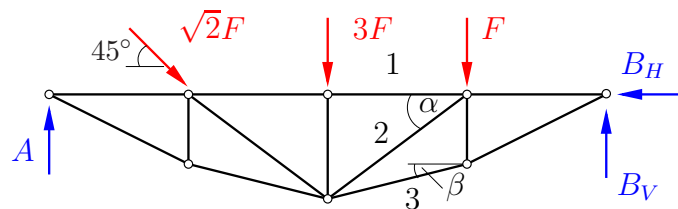
2. Statische Bestimmtheit

äußere: $f = 3n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0$

innere: $f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 8 - (3 + 13) = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow$ Das System ist äußerlich und innerlich statisch bestimmt.

3. Auflagerkräfte

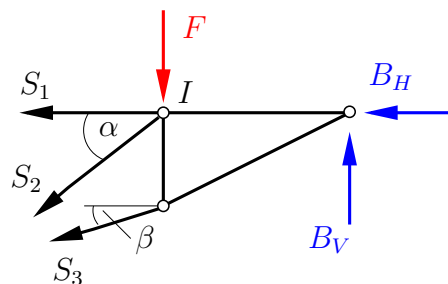


$$\rightarrow \Sigma H : \quad B_H = F \quad \Rightarrow B_H = F$$

$$\curvearrowright \Sigma M_B : \quad F \cdot 4l + 3 \cdot F \cdot 8l + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot F \cdot 12l - A \cdot 16l = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{5}{2} \cdot F$$

$$\uparrow \Sigma V : \quad A - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot F - 3 \cdot F - F + B_V = 0 \quad \Rightarrow B_V = \frac{5}{2} \cdot F$$

4. Ermittlung der Kräfte in den Stäben 1, 2 und 3 mit geeignetem Ritterschnitt



$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_I : \quad B_V \cdot 4l - S_3 \cdot \cos \beta \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow S_3 = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{17} \cdot F$$

$$\uparrow \Sigma V : \quad B_V - F - S_2 \cdot \sin \alpha - S_3 \cdot \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow S_2 = \frac{5}{12} \cdot F$$

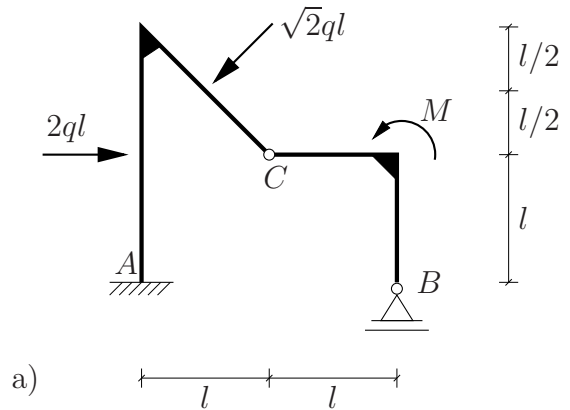
$$\leftarrow \Sigma H : \quad S_1 + S_2 \cdot \cos \alpha + S_3 \cdot \cos \beta + B_H = 0 \quad \Rightarrow S_1 = -\frac{19}{3} \cdot F$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Das in a) dargestellte Rahmentragwerk wird durch zwei Einzellasten und ein Moment beansprucht.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte.

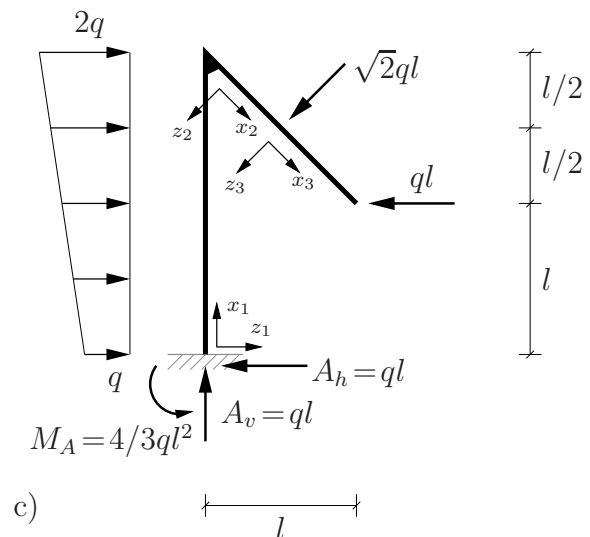
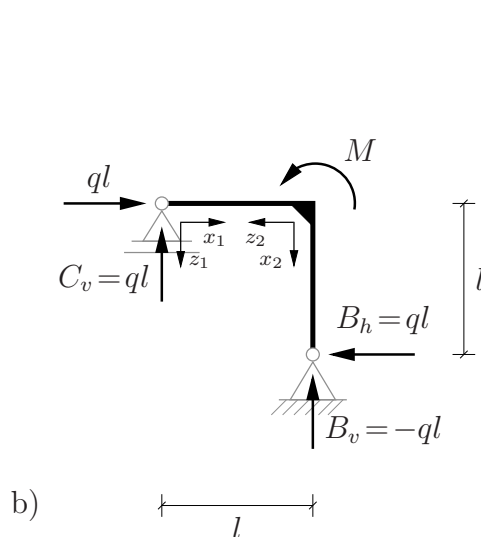
Geg.: $q, l, M = 2ql^2$.



Die in b) und c) dargestellten Tragwerke werden durch ein Einzelmoment, Einzellasten und eine trapezförmige Streckenlast beansprucht. Alle Auflagerreaktionen sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen in beiden Tragwerken und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

Geg.: $q, l, M = 2ql^2$.

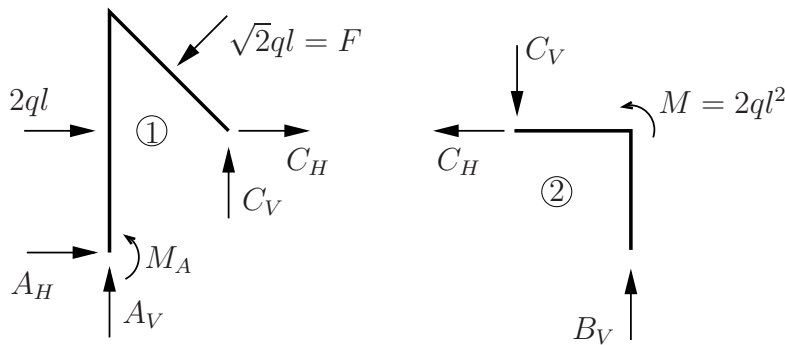
**Lösung****1. statische Bestimmtheit**

$$f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

→ Das System ist statisch bestimmt.

2. Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte

Freischnitt:



Teilsystem 2:

$$\curvearrowright \Sigma M_C : B_V \cdot l = -2ql^2 \quad \rightarrow \boxed{B_V = -2ql}$$

$$\uparrow : C_V = B_V \quad \rightarrow \boxed{C_V = -2ql}$$

$$\rightarrow : C_H = 0$$

Teilsystem 1:

$$\rightarrow : A_H = -C_H + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F - 2ql$$

$$A_H = ql - 2ql$$

$$\rightarrow \boxed{A_H = -ql}$$

$$\uparrow : A_V = -C_V + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F$$

$$A_V = 2ql + ql$$

$$\rightarrow \boxed{A_V = 3ql}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A : M_A = 2ql \cdot l + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F \cdot \left(\frac{1}{2}l - \frac{3}{2}l\right) + C_H \cdot l - C_V \cdot l$$

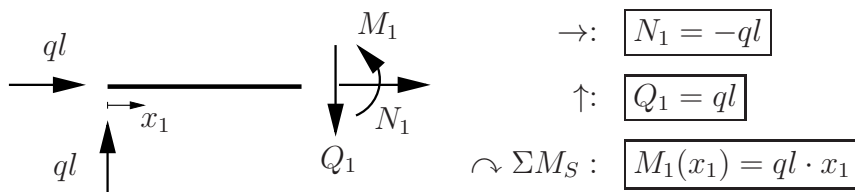
$$M_A = 2ql^2 - ql^2 + 2ql^2$$

$$\rightarrow \boxed{M_A = 3ql^2}$$

3. Schnittgrößen

3.1 Tragwerk b)

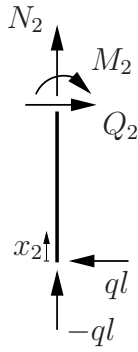
Bereich x_1 :



$$\rightarrow : \boxed{N_1 = -ql}$$

$$\uparrow : \boxed{Q_1 = ql}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S : \boxed{M_1(x_1) = ql \cdot x_1}$$

Bereich x_2 :

$$\uparrow: \boxed{N_2 = ql}$$

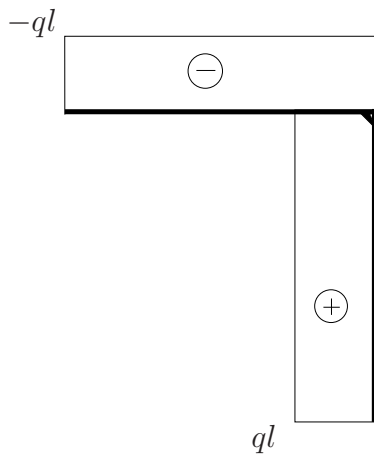
$$\rightarrow: \boxed{Q_2 = ql}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: M_2(x_2) = -ql \cdot (l - x_2)$$

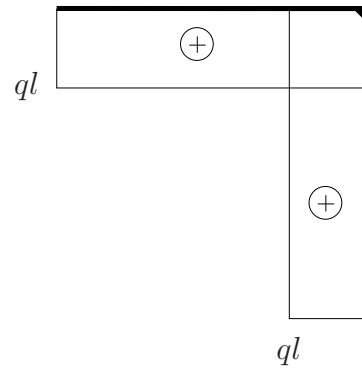
$$\rightarrow \boxed{M_2(x_2) = ql \cdot x_2 - ql^2}$$

Grafische Darstellung:

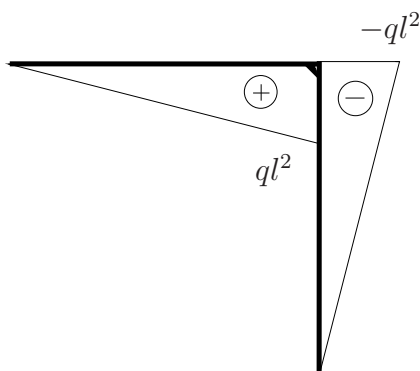
Normalkraftverlauf



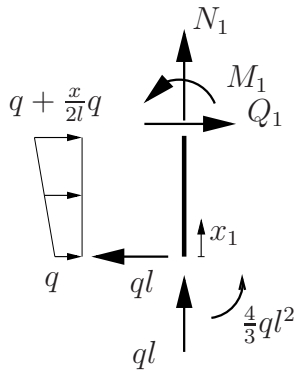
Querkraftverlauf



Momentenverlauf



3.2 Tragewerk c)

Bereich x_1 :

$$\uparrow: N_1 = -A_v$$

$$\rightarrow \boxed{N_1 = -ql}$$

$$\rightarrow: Q_1 = ql - q \cdot x_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{2l} \right) q \cdot x_1$$

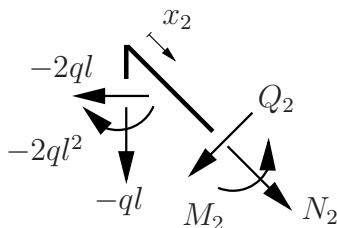
$$\rightarrow \boxed{Q_1 = -\frac{1}{4} \frac{q}{l} \cdot x_1^2 - q \cdot x_1 + ql}$$

$$Q_1(2l) = -2ql$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: M_1(x_1) = -\frac{4}{3}ql^2 + ql \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{2l} \right) q \cdot x_1 \cdot \frac{1}{3}x_1$$

$$\rightarrow \boxed{M_1(x_1) = -\frac{1}{12} \frac{q}{l} \cdot x_1^3 - \frac{1}{2} q \cdot x_1^2 + ql \cdot x_1 - \frac{4}{3}ql^2}$$

$$M_1(2l) = -2ql^2$$

Bereich x_2 :

$$\searrow: N_2 = -2ql \frac{\sqrt{2}}{2} - (-ql) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql}$$

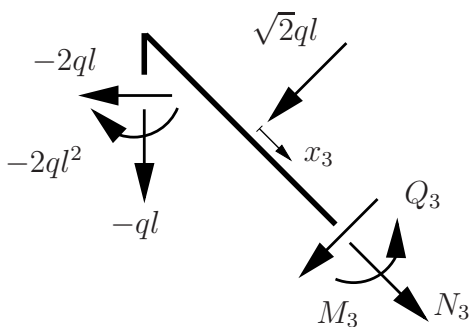
$$\swarrow: Q_2 = -(-2ql) \frac{\sqrt{2}}{2} - (-ql) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}ql}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: M_2(x_2) = -2ql^2 - (-2ql) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 - (-ql) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2$$

$$\rightarrow \boxed{M_2(x_2) = \frac{3}{2}\sqrt{2}ql \cdot x_2 - 2ql^2}$$

$$M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right) = -\frac{1}{2}ql^2$$

Bereich x_3 :

$$\searrow: N_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql$$

$$\rightarrow \boxed{N_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql}$$

$$\swarrow: Q_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}ql - \sqrt{2}ql$$

$$\rightarrow \boxed{Q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}ql}$$

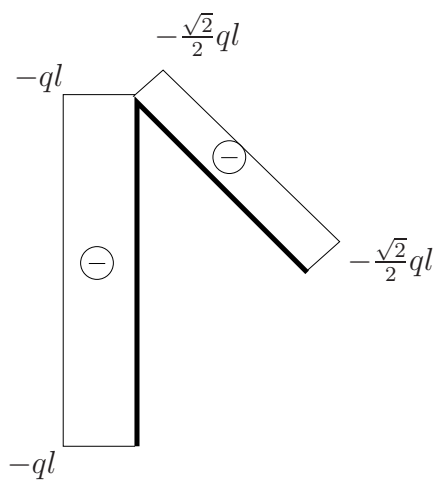
$$\curvearrowright \Sigma M_S: M_3(x_3) = -2ql^2 - (-2ql) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_3 + \frac{l}{2} \right) - (-ql) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_3 + \frac{l}{2} \right) - \sqrt{2}ql \cdot x_3$$

$$\rightarrow \boxed{M_3(x_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}ql \cdot x_3 - \frac{1}{2}ql^2}$$

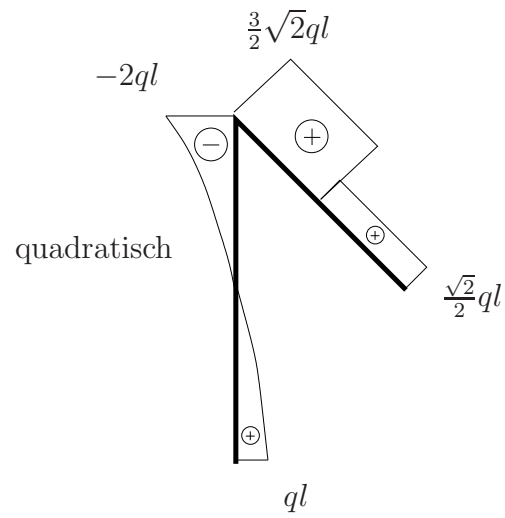
$$M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right) = 0$$

Grafische Darstellung:

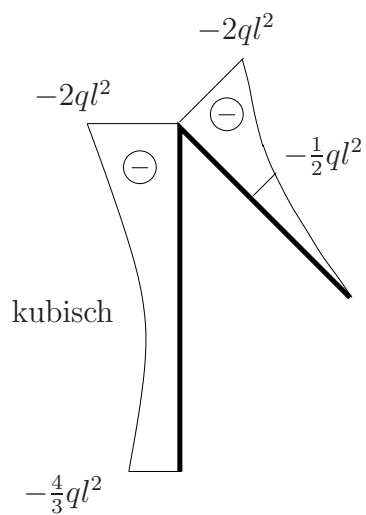
Normalkraftverlauf



Querkraftverlauf



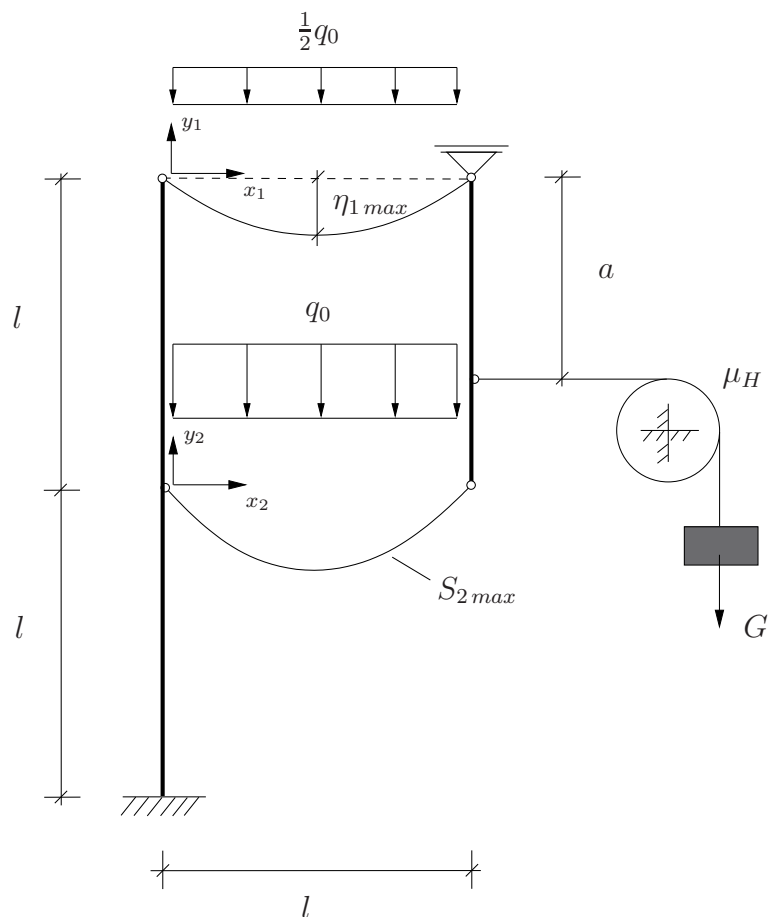
Momentenverlauf



Aufgabe 3 (25 Punkte)

Das dargestellte statische System besteht aus einem vertikalen Kragarm, einem vertikalen, horizontal verschieblich gelagertem Pendelstab und zwei Seilen mit unterschiedlicher konstanter Belastung. Am Pendelstab angeschlossen ist ein weiteres Seil, das über eine raue, nicht drehbare Umlenkwalze (Haftreibungskoeffizient μ_H) geführt und mit einem Gewicht (Gewichtskraft G) verbunden ist. Das System befindet sich in der gezeigten Ruhelage, Seile und Stäbe sind als masselos anzunehmen.

1. Bestimmen Sie die Seillinien y_1 und y_2 als Funktionen in Abhängigkeit der jeweiligen Horizontalzüge.
2. Berechnen Sie die Horizontalzüge H_1 und H_2 . Verwenden Sie hierzu die gegebenen Größen $\eta_{1max} = \frac{1}{10}l$ und $S_{2max} = 2q_0l$.
3. Berechnen Sie die Auflagerkräfte des Kragarms in Abhängigkeit der Größen l und q_0 .
4. Bestimmen Sie den Abstand a sowie Ober- und Untergrenze der Gewichtskraft G .



Geg.: q_0 , μ_H , l , $S_{2max} = 2q_0l$, $\eta_{1max} = \frac{1}{10}l$

Lösung**1. Seillinien y_1 und y_2**

q ist bei beiden Seilen konstant, Randbedingungen sind identisch.

$$y''(x) = \frac{q_0}{H}$$

$$y'(x) = \frac{q_0}{H} \cdot x + C_1$$

$$y(x) = \frac{q_0}{2H} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Randbedingungen:

$$y(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{C_2 = 0}$$

$$y(x=l) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q_0}{2H} \cdot l^2 + C_1 \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{C_1 = -\frac{q_0 l}{2H}}$$

$$\rightarrow \boxed{y(x) = \frac{q_0}{2H} \cdot x^2 - \frac{q_0 l}{2H} \cdot x}$$

$$\boxed{y_1(x_1) = \frac{q_0}{4H_1} \cdot x_1^2 - \frac{q_0 l}{4H_1} \cdot x_1}$$

$$\boxed{y_2(x_2) = \frac{q_0}{2H_2} \cdot x_2^2 - \frac{q_0 l}{2H_2} \cdot x_2}$$

2. Horizontalzüge H_1 und H_2

$$\begin{aligned} \text{Seil 1: } y_{1_{max}} &= \frac{l}{10} = \frac{\frac{1}{2}q_0 l^2}{8H_1} \\ &\rightarrow \boxed{H_1 = \frac{5}{8}q_0 l} \end{aligned}$$

$$\text{Seil 2: } S_{2_{max}} = 2q_0 l$$

$$S_{2_{max}} = H_2 \sqrt{1 + y_2'(x_2)_{max}}$$

$$y_2'(x_2) = \frac{q_0}{H_2} \cdot x_2 - \frac{q_0 l}{2H_2} \rightarrow \text{linear, daher maximal für Randwerte}$$

$$y_2'(0) = -\frac{q_0 l}{2H_2}, \quad y_2'(l) = \frac{q_0 l}{2H_2}$$

$$\Rightarrow H_2 \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 l}{2H_2}\right)^2} = 2q_0 l$$

$$H_2^2 \left(1 + \left(\frac{q_0 l}{2H_2}\right)^2\right) = 4q_0^2 l^2$$

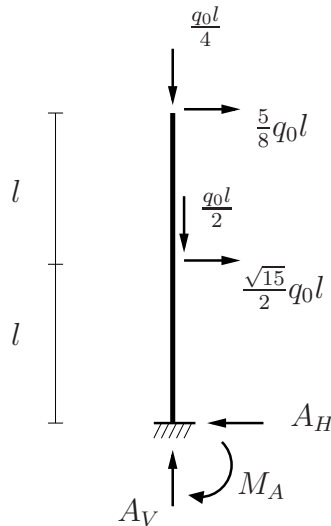
$$H_2^2 + \frac{q_0^2 l^2}{4} = 4q_0^2 l^2$$

$$\rightarrow \boxed{H_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}q_0 l}$$

3. Auflagerkräfte des Kragarms

$$V_1(0) = H_1 \cdot y_1'(0) = \frac{5}{8}q_0l \cdot \left(-\frac{q_0l}{4 \cdot \frac{5}{8}q_0l}\right) = -\frac{q_0l}{4}$$

$$V_2(0) = H_2 \cdot y_2'(0) = \frac{\sqrt{15}}{2}q_0l \cdot \left(-\frac{q_0l}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}q_0l}\right) = -\frac{q_0l}{2}$$



$$\rightarrow \Sigma H : \quad \frac{5}{8}q_0l + \frac{\sqrt{15}}{2}q_0l - A_H = 0$$

$$\rightarrow \boxed{A_H = \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8}q_0l}$$

$$\downarrow \Sigma V : \quad \frac{q_0l}{4} + \frac{q_0l}{2} - A_V = 0$$

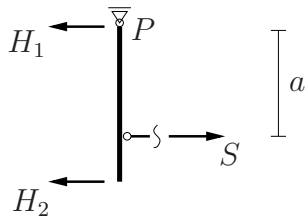
$$\rightarrow \boxed{A_V = \frac{3}{4}q_0l}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A : \quad \frac{5}{8}q_0l \cdot 2l + \frac{\sqrt{15}}{2}q_0l \cdot l + M_A = 0$$

$$-M_A = \frac{5}{4}q_0l^2 + \frac{2\sqrt{15}}{4}q_0l^2$$

$$\rightarrow \boxed{M_A = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{4}q_0l^2}$$

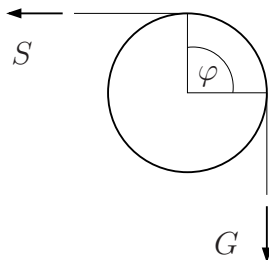
4. Abstand a und Unter-/Obergrenze der Gewichtskraft G



$$\Sigma H = 0 \Rightarrow S = H_1 + H_2 = \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8}q_0l$$

$$\curvearrowright \Sigma P = 0 \Rightarrow H_2 \cdot l - S \cdot a = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{H_2l}{S} = \dots = \frac{4\sqrt{15}}{4\sqrt{15} + 5}l \approx 0.76l$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$1. \text{ Fall: } S > G \Rightarrow G = S \cdot e^{-\mu_H \varphi} = \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8} \cdot e^{-\mu_H \frac{\pi}{2}} \cdot q_0l$$

$$2. \text{ Fall: } S < G \Rightarrow G = S \cdot e^{\mu_H \varphi} = \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8} \cdot e^{\mu_H \frac{\pi}{2}} \cdot q_0l$$

$$\rightarrow \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8} \cdot e^{-\mu_H \frac{\pi}{2}} \cdot q_0l < G < \frac{5 + 4\sqrt{15}}{8} \cdot e^{\mu_H \frac{\pi}{2}} \cdot q_0l$$