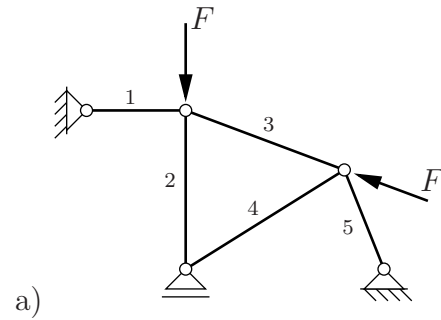
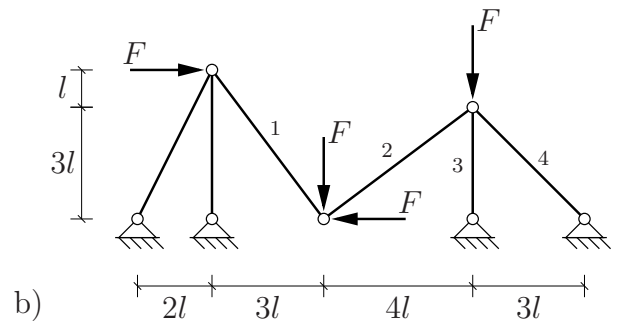


Aufgabe 1 (25 Punkte)

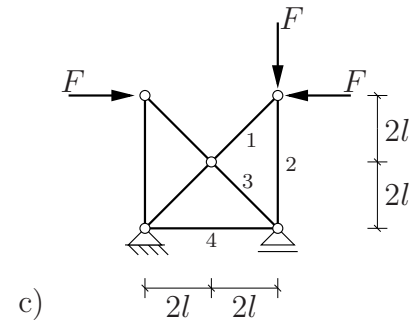
1. Geben Sie für das in Abbildung a) dargestellte Fachwerk alle Nullstäbe an.



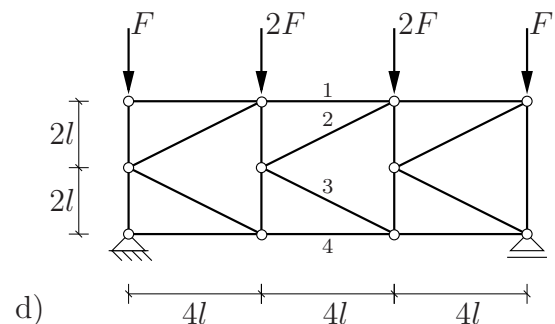
2. Berechnen Sie für das Fachwerk in Abbildung b) die Stabkräfte 1, 2, 3 und 4 mit dem *Knotenschnittverfahren*,



3. Bestimmen Sie für das System in Abbildung c) alle Auflagerreaktionen und die Stabkräfte 1, 2, 3 und 4 mit dem *Knotenschnittverfahren*,



4. Berechnen Sie für das Fachwerk in Abbildung d) die Stabkräfte 1, 2, 3 und 4 mit Hilfe von geeigneten Schnitten.



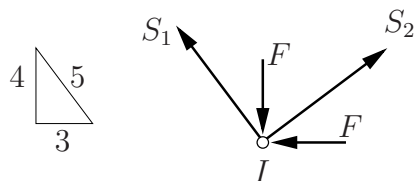
Geg.: F, l .

Lösung**1. Nullstäbe**

S_4 und S_5

2. Stabkräfte mit Knotenschnittverfahren

2.1 Knotengleichgewicht am Knoten I:

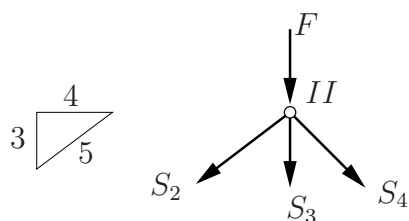


aus geschickter Geometrie folgt direkt für S_1 und S_2 :

$$\nearrow S_2 : S_2 - \frac{3}{5}F - \frac{4}{5}F = 0 \rightarrow \boxed{S_2 = \frac{7}{5}F}$$

$$\nwarrow S_1 : S_1 - \frac{4}{5}F + \frac{3}{5}F = 0 \rightarrow \boxed{S_1 = \frac{1}{5}F}$$

2.2 Knotengleichgewicht am Knoten II:

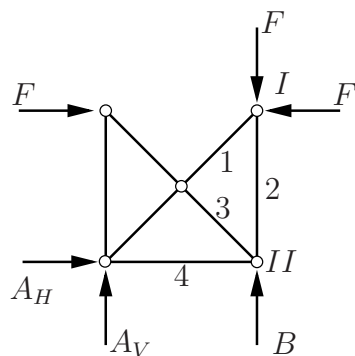


aus geschickter Geometrie folgt für S_3 und S_4 :

$$\rightarrow : -\frac{4}{5}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 = 0 \rightarrow \boxed{S_4 = \frac{56}{25\sqrt{2}}F}$$

$$\uparrow : -F - \frac{3}{5}S_2 - S_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = -\frac{74}{25}F}$$

3. Stabkräfte mit Knotenschnittverfahren



3.1 Auflagerreaktionen am GS:

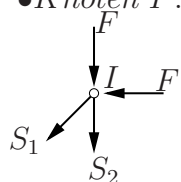
$$\curvearrowleft M_A : 4l \cdot B - 4l \cdot F + 4l \cdot F - 4l \cdot F = 0 \rightarrow \boxed{B = F}$$

$$\rightarrow : \boxed{A_H = 0}$$

$$\uparrow : \boxed{A_V = 0}$$

3.2 Stabkräfte

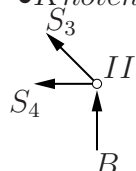
• Knoten I :



$$\leftarrow : F + \frac{\sqrt{2}}{2}S_1 = 0 \rightarrow \boxed{S_1 = -\sqrt{2}F}$$

$$\uparrow : -F - S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_1 = 0 \rightarrow \boxed{S_2 = 0}$$

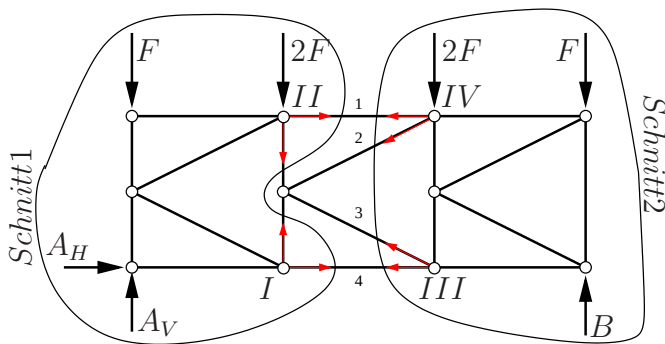
• Knoten II :



$$\uparrow : \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + F = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = -\sqrt{2}F}$$

$$\leftarrow : -\frac{\sqrt{2}}{2}S_3 - S_4 = 0 \rightarrow \boxed{S_4 = F}$$

4. Stabkräfte mit Schnittführung



Auflagerreaktionen:

$$\curvearrowleft M_A : 12l \cdot B = 4l \cdot 2F + 8l \cdot 2F + 12l \cdot F \rightarrow \boxed{B = 3F}$$

$$\rightarrow: \boxed{A_H = 0} \quad \uparrow: \boxed{A_V = 3F}$$

Schnitt 1:

$$\curvearrowleft M_I : -A_V \cdot 4l + F \cdot 4l - S_1 \cdot 4l = 0 \rightarrow \boxed{S_1 = -2F}$$

$$\curvearrowleft M_{II} : F \cdot 4l - A_V \cdot 4l + A_H \cdot 4l + S_4 \cdot 4l = 0 \rightarrow \boxed{S_4 = 2F}$$

Schnitt 2:

$$\curvearrowleft M_{III} : B \cdot 4l - F \cdot 4l + S_1 \cdot 4l + \frac{2}{\sqrt{5}} S_2 \cdot 4l = 0 \rightarrow \boxed{S_2 = 0}$$

$$\curvearrowleft M_{IV} : B \cdot 4l - F \cdot 4l - S_4 \cdot 4l - \frac{2}{\sqrt{5}} S_3 \cdot 4l = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = 0}$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

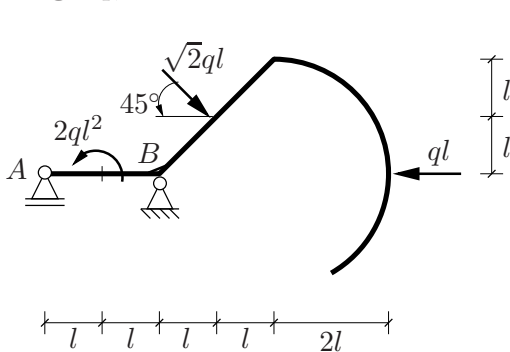
Das in Abbildung a) dargestellte Tragwerk wird durch zwei Einzellasten sowie ein Einzelmoment belastet.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen.

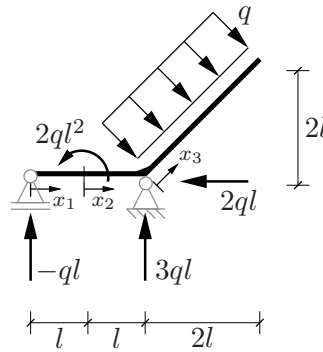
Die in Abbildung b) und c) dargestellten Tragwerke werden durch eine Einzellast, ein Einzelmoment, sowie die Gleichstreckenlast q belastet. Die Auflagerkräfte beider Systeme sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen in beiden Tragwerken und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

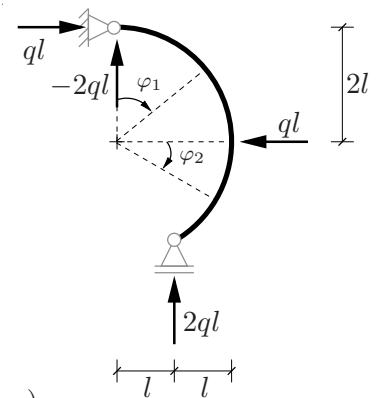
Geg.: q, l .



a)



b)



c)

Lösung**1. statische Bestimmtheit**

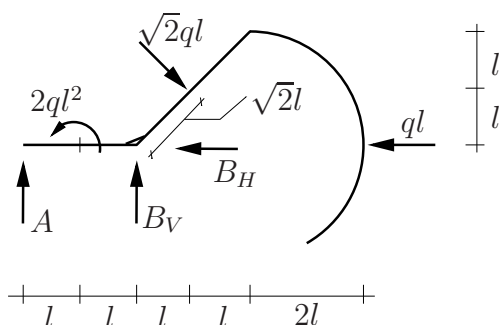
$$f = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0$$

2. Auflagerreaktionen

$$\rightarrow: \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}ql - ql - B_H = 0 \quad \rightarrow \boxed{B_H = 0}$$

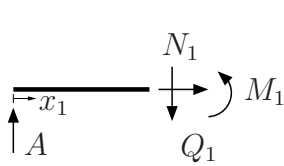
$$\curvearrowright \Sigma M_B: 2ql^2 - A \cdot 2l - \sqrt{2}ql \cdot \sqrt{2}l = 0 \quad \rightarrow A = \frac{(2-2)ql^2}{2l} \quad \rightarrow \boxed{A_V = 0}$$

$$\uparrow: A + B_V - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}ql = 0 \quad \rightarrow B_V = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}ql \quad \rightarrow \boxed{B_V = ql}$$



3. Schnittgrößen

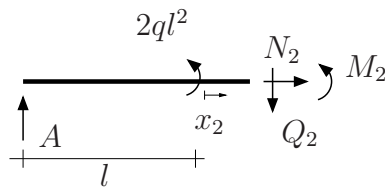
3.1 Tragewerk b)



$$\rightarrow N_1(x_1) = 0$$

$$Q_1(x_1) = A \rightarrow Q_1(x_1) = -ql$$

$$M_1(x_1) = A \cdot x_1 \rightarrow M_1(x_1) = -qlx_1$$

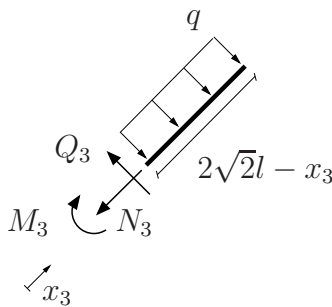


$$\rightarrow N_2(x_2) = 0$$

$$Q_2(x_2) = A \rightarrow Q_2(x_2) = -ql$$

$$M_2(x_2) = -2ql^2 + A(l + x_2) = -2ql^2 + (-ql) \cdot (l + x_2)$$

$$\rightarrow M_2(x_2) = -3ql^2 - qlx$$



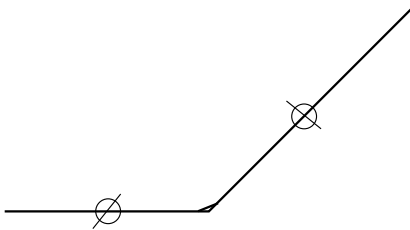
$$\rightarrow N_3(x_2) = 0$$

$$Q_3(x_2) = -q \cdot (2\sqrt{2}l - x_3) \rightarrow Q_3(x_2) = 2\sqrt{2}ql - qx_3$$

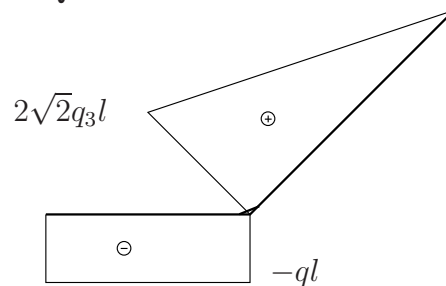
$$M_3(x_3) = -q \cdot (2\sqrt{2}l - x_3)^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}q(8l^2 - 4\sqrt{2}lx_3 + x_3^2)$$

$$\rightarrow M_3(x_3) = -4ql^2 + 2\sqrt{2}qlx_3 - \frac{1}{2}qx_3^2$$

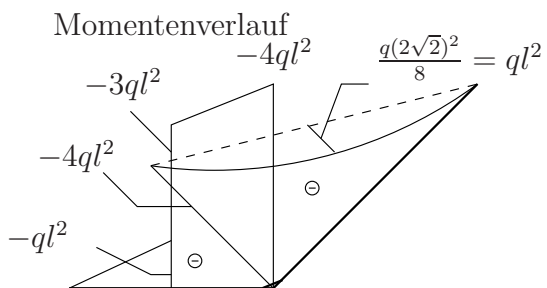
Normalkraftverlauf



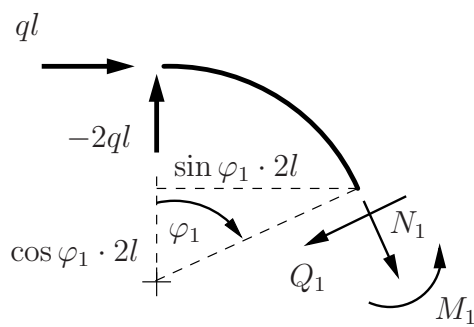
Querkraftverlauf



Momentenverlauf



3.2 Tragewerk c)



$$N_1(\varphi_1) = -2ql \cdot \sin \varphi_1 - ql \cdot \cos \varphi_1$$

$$\rightarrow \boxed{N_1(\varphi_1) = -ql(2 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)}$$

$$Q_1(\varphi_1) = -2ql \cdot \cos \varphi_1 + ql \cdot \sin \varphi_1$$

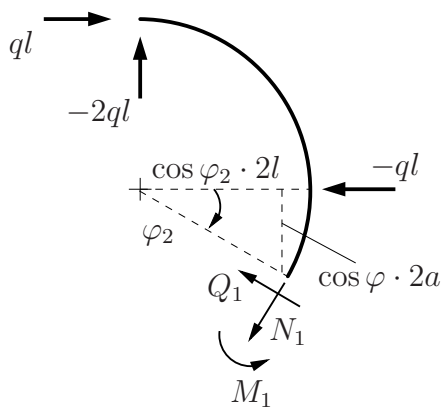
$$\rightarrow \boxed{Q_1(\varphi_1) = ql \cdot (-2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)}$$

$$M_1(\varphi_1) = -2ql \cdot \sin \varphi_1 2l + ql \cdot 2l + -ql \cdot 2l \cdot \cos \varphi_1$$

$$\rightarrow \boxed{M_1(\varphi_1) = 2ql^2 \cdot (1 - 2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1)}$$

Randwerte:

$$N_1(\varphi_1 = 90^\circ) = -2ql; \quad Q_1(\varphi_1 = 90^\circ) = ql; \quad M_1(\varphi_1 = 90^\circ) = -2ql^2$$



$$N_2(\varphi_2) = -ql \cdot \sin \varphi_2 - 2ql \cdot \cos \varphi_2 + ql \sin \varphi_2$$

$$\rightarrow \boxed{N_2(\varphi_2) = -2ql \cdot \cos \varphi_2}$$

$$Q_2(\varphi_2) = -ql \cdot \cos \varphi_2 + 2ql \sin \varphi_2 + ql \cdot \cos \varphi_2$$

$$\rightarrow \boxed{Q_2 = 2ql \sin \varphi_2}$$

$$M_2(\varphi_2) = -ql \cdot 2l \cdot \sin \varphi_2 + ql \cdot 2l$$

$$+ ql \cdot 2l \cdot \sin \varphi_2 - 2ql \cdot 2l \cdot \cos \varphi_2$$

$$\rightarrow \boxed{M_2(\varphi_2) = 2ql^2 - 4ql^2 \cdot \cos \varphi_2}$$

Randwerte:

$$N_2(\varphi_1 = 60^\circ) = -ql; \quad Q_2(\varphi_1 = 60^\circ) = \sqrt{3}ql; \quad M_2(\varphi_1 = 60^\circ) = 0$$

Extremwerte:

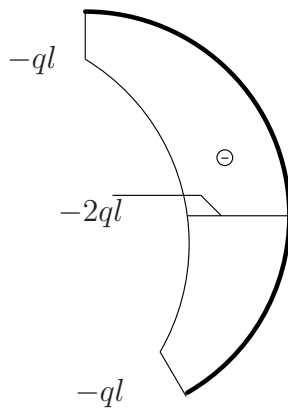
$$\text{Maximales Moment:} \quad M_1'(\varphi_1) = -4 \cdot ql^2 \cdot \cos \varphi + 2ql^2 \sin \varphi \stackrel{!}{=} 0$$

$$-2 \cos \varphi = -\sin \varphi$$

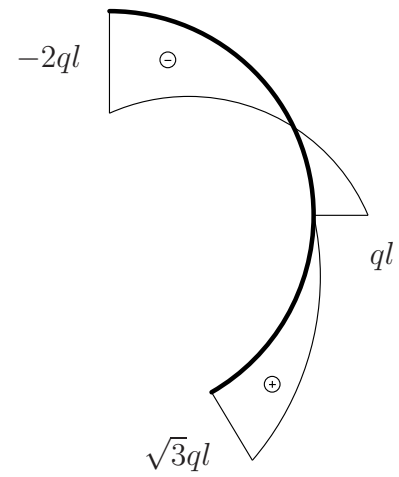
$$2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\rightarrow \varphi_{max} = 63,43^\circ \rightarrow \boxed{M_1(63,43^\circ) = -2,47 \cdot ql^2}$$

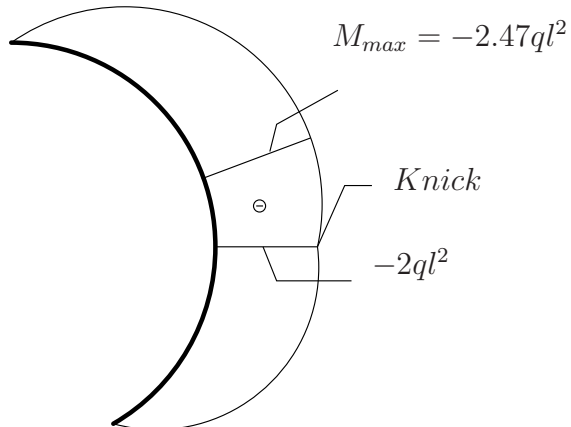
Normalkraftverlauf



Querkraftverlauf



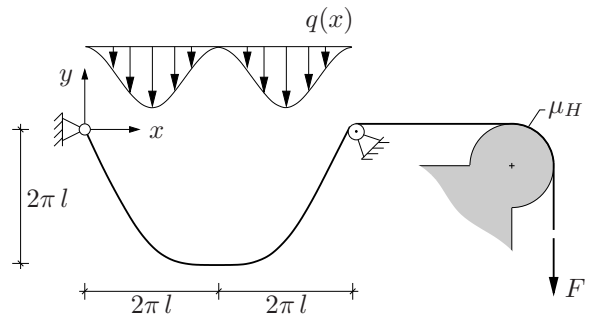
Momentenverlauf



Aufgabe 3 (25 Punkte)

Das dargestellte masselose Seil wird am linken Ende festgehalten. Auf der rechten Seite wird es zuerst über eine reibungsfreie Rolle und dann über eine raue Umlenkwalze (Haftreibungskoeffizient μ_H) geführt. Das Seil wird durch die Streckenlast $q(x)$ und am freien Ende durch die Kraft F belastet. Das Seil befindet sich in Ruhe. Bestimmen Sie

1. die Seilkurve $y(x)$ in Abhängigkeit des Horizontalzugs H ,
2. den Horizontalzug H ,
3. den Verlauf der Seilkraft $S(x)$ und die Seilkraft $\bar{S}$ zwischen der Rolle und der Umlenkwalze, sowie
4. den Haftreibungskoeffizient μ_H , so daß F halb so groß ist wie die Seilkraft $\bar{S}$.



Geg.: $l, q_0, q(x) = -\frac{q_0}{2} \cos\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{q_0}{2}$.

Lösung**1. Seilkurve**

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{1}{H} \cdot q(x) = \frac{q_0}{2H} \cdot (1 - \cos \frac{x}{l}) \\ y'(x) &= \frac{q_0}{2H} \cdot (x - l \cdot \sin \frac{x}{l} + C_1) \\ y(x) &= \frac{q_0}{2H} \cdot (\frac{1}{2}x^2 + l^2 \cdot \cos \frac{x}{l} + C_1 \cdot x + C_2) \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \rightarrow \frac{q_0}{2H} \cdot (l^2 + C_2) = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = -l^2} \\ y(x=4\pi l) &= 0 \rightarrow \frac{q_0}{2H} \cdot (8\pi^2 l^2 + l^2 + 4\pi l \cdot C_1 - l^2) = \frac{q_0}{2H} \cdot (8\pi^2 l^2 + 4\pi l \cdot C_1) = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = -2\pi l} \\ \rightarrow \boxed{y(x) = \frac{q_0}{2H} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + l^2 \cdot \cos \frac{x}{l} - 2\pi l x - l^2\right)} \end{aligned}$$

2. Horizontalzug H

Es gilt: $\eta_{max} = y(x=2\pi l) = 2\pi l$ (siehe Zeichnung Aufgabenstellung)

$$\begin{aligned} \eta = -y(x) &\rightarrow \eta_{max} = y(x=2\pi l) = -\frac{q_0}{2H} \cdot \left(\frac{1}{2}(2\pi l)^2 + \underbrace{l^2 \cdot \cos 2\pi}_{l^2} - 2\pi l \cdot 2\pi l - l^2\right) \\ &= -\frac{q_0}{2H} \cdot (2\pi^2 l^2 - 4\pi^2 l^2) \\ &= \frac{q_0 \cdot \pi^2 \cdot l^2}{H} \stackrel{!}{=} 2\pi l \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2} q_0 \pi l}$$

3. SeilkraftSeilkraft $S(x)$:

$$S(x) = H \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$= \boxed{\frac{q_0}{2} \pi l \cdot \sqrt{1 + \frac{q_0^2}{4H^2} \cdot \left(x - l \cdot \sin \frac{x}{l} - 2\pi l\right)^2}}$$

Seilkraft zwischen Rolle und Umlenkwalze:

$$\begin{aligned} \bar{S} = S(x = 4\pi l) &= \frac{q_0}{2} \pi l \cdot \sqrt{1 + \frac{q_0^2}{4H^2} \cdot \left(4\pi l - l \cdot \underbrace{\sin 4\pi}_{=0} - 2\pi l\right)^2} \\ &= \frac{q_0}{2} \pi l \cdot \sqrt{1 + \frac{q_0^2 \cdot \pi^2 \cdot l^2 \cdot 4}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} q_0 \cdot \pi \cdot l\right)^2}} = \frac{q_0}{2} \pi l \sqrt{1 + 4} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} q_0 \pi l} \end{aligned}$$

4. Haftreibungskoeffizient

$$S = F \cdot e^{\mu_H \cdot \alpha} \quad \text{mit } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S}{F} = e^{\mu_H \cdot \alpha}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{S}{F} \stackrel{!}{=} 2$$

$$2 = e^{\mu_H \cdot \alpha}$$

$$\rightarrow \ln(2) = \mu_H \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\mu_H = \frac{2}{\pi} \ln(2) \approx 0,4413}$$

