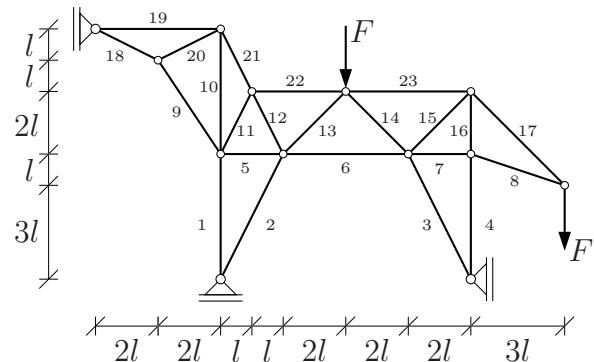


Aufgabe 1

Das dargestellte Fachwerk wird durch zwei Einzellasten beansprucht.

1. Überprüfen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
2. Geben Sie offensichtliche Nullstäbe an.
3. Berechnen Sie die Auflagerreaktionen.
4. Bestimmen Sie die Stabkräfte S_6 , S_{13} und S_{22} mit Hilfe eines geeigneten Ritterschnitts und alle anderen Stabkräfte mit Hilfe des Knotenpunktverfahrens.



Geg.: F, l .

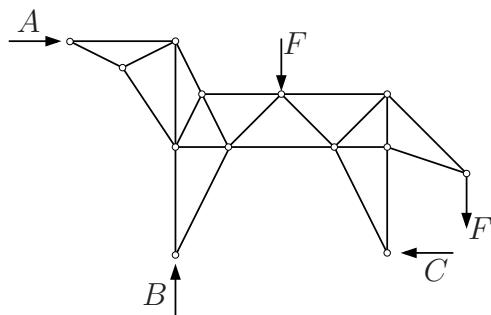
Lösung**1. Statische Bestimmtheit**

$$\text{innere: } f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 13 - (3 + 23) = 0$$

$$\text{äußere: } f = 3n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0$$

2. Offensichtliche Nullstäbe

$$S_2 = 0, \quad S_9 = 0, \quad S_{18} = 0, \quad S_{20} = 0$$

3. Auflagerkräfte

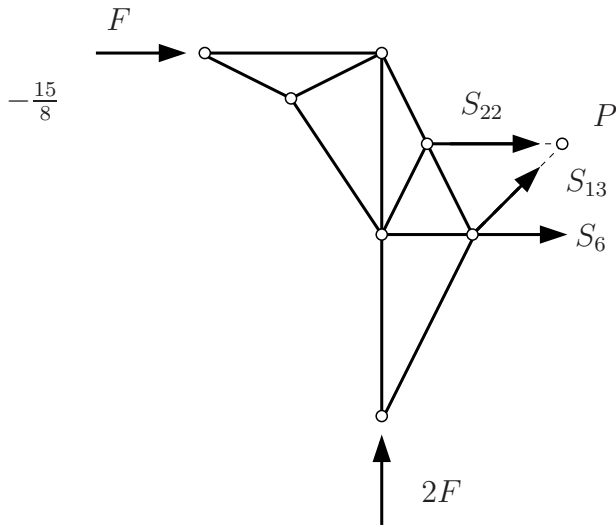
$$\uparrow: B - 2F = 0 \quad \rightarrow \quad B = 2F$$

$$\curvearrowright C: -F \cdot 3l - B \cdot 8l + F \cdot 4l - A \cdot 8l = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{15}{8} F$$

$$\rightarrow: A - C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\frac{15}{8} F$$

4. Stabkräfte

4.1 Ritterschnitt durch S_6 , S_{13} , S_{22}



$$\curvearrowright P: -A \cdot 2l - B \cdot 4l + S_6 \cdot 2l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_6 = \frac{17}{8} F}$$

$$\uparrow: B + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{13} = -2\sqrt{2} F}$$

$$\rightarrow: A + S_6 + S_{22} + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{22} = \frac{7}{4} F}$$

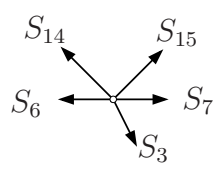
4.2 Knotenpunktverfahren

$$\uparrow: B + S_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_1 = -2F}$$

$$\begin{aligned} \uparrow: \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} + \frac{2}{\sqrt{5}} S_{12} &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{12} = \sqrt{5} F} \\ \rightarrow: S_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} - S_5 - \frac{1}{\sqrt{5}} S_{12} &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_5 = -\frac{7}{8} F} \end{aligned}$$

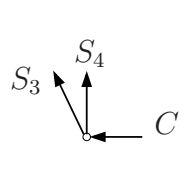
$$\begin{aligned} \rightarrow: S_5 + \frac{1}{\sqrt{5}} S_{11} &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{11} = \frac{7\sqrt{5}}{8} F} \\ \uparrow: S_{10} + \frac{2}{\sqrt{5}} S_{11} - S_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{10} = -\frac{15}{4} F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow: -S_{10} - \frac{2}{\sqrt{5}} S_{21} &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{21} = \frac{15\sqrt{5}}{8} F} \\ \rightarrow: -S_{19} + \frac{1}{\sqrt{5}} S_{21} &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{19} = \frac{15}{8} F} \end{aligned}$$



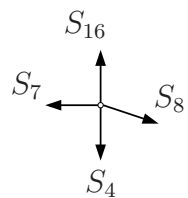
$$\rightarrow: -S_6 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{14} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{15} + S_7 + \frac{1}{\sqrt{5}}S_3 = 0 \rightarrow \boxed{S_7 = -\frac{3}{2}F}$$

$$\uparrow: \frac{1}{\sqrt{2}}S_{14} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{15} - \frac{2}{\sqrt{5}}S_3 = 0 \rightarrow \boxed{S_{15} = \frac{11\sqrt{2}}{4}F}$$



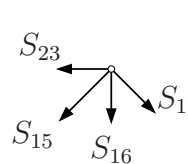
$$\rightarrow: -C - \frac{1}{\sqrt{5}}S_3 = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = \frac{15\sqrt{5}}{8}F}$$

$$\uparrow: S_4 + \frac{2}{\sqrt{5}}S_3 = 0 \rightarrow \boxed{S_4 = -\frac{15}{4}F}$$

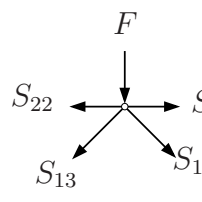


$$\rightarrow: -S_7 + \frac{3}{\sqrt{10}}S_8 = 0 \rightarrow \boxed{S_8 = -\frac{\sqrt{10}}{2}F}$$

$$\uparrow: S_{16} - S_4 - \frac{1}{\sqrt{10}}S_8 = 0 \rightarrow \boxed{S_{16} = -\frac{17}{4}F}$$



$$\rightarrow: -S_{23} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{15} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{17} = 0 \rightarrow \boxed{S_{17} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F}$$



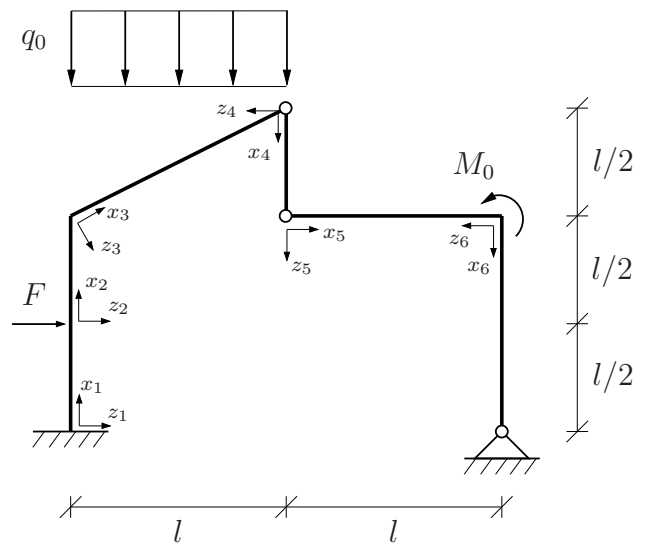
$$\uparrow: -F - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{13} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{14} = 0 \rightarrow \boxed{S_{14} = \sqrt{2}F}$$

$$\rightarrow: -S_{22} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{13} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{14} + S_{23} = 0 \rightarrow \boxed{S_{23} = -\frac{5}{4}F}$$

Aufgabe 2

Das dargestellte Tragwerk wird durch die Streckenlast q_0 , die Einzelkraft F sowie das Einzelmoment M_0 belastet.

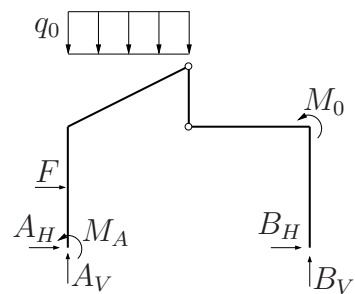
1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen.
3. Bestimmen Sie den Schnittgrößenverlauf im gesamten Tragwerk unter Verwendung der lokalen Koordinatensysteme und stellen Sie die Ergebnisse unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.



Geg.: l , $q_0 = F/l$, F , $M_0 = Fl$.

Lösung**1. Statische Bestimmtheit**

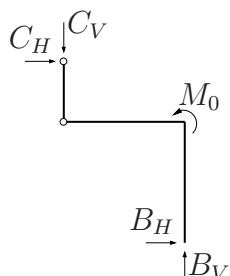
$$f = 3 \cdot 3 - 3 - 2 - 2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \text{statisch bestimmt}$$

2. Auflagerreaktionen

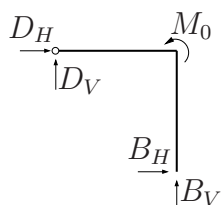
$$\rightarrow : F + A_H + B_H = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow : q_0 l = A_V + B_V \quad (2)$$

$$\curvearrowleft A : M_A + M_0 + 2B_V l - \frac{1}{2}Fl - \frac{1}{2}q_0 l^2 = 0 \quad (3)$$



$$\curvearrowleft C : M_0 + \frac{3}{2}B_H l + B_V l = 0 \quad (4)$$



$$\curvearrowleft D : M_0 + B_H l + B_V l = 0 \quad (5)$$

$$(4) - (5) : \quad \frac{1}{2}B_H l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_H = 0} \quad (6)$$

$$(6) \text{ in } (5) : \quad \boxed{B_V = -\frac{M_0}{l} = -F} \quad (7)$$

$$(6) \text{ in } (1) : \quad \boxed{A_H = -F} \quad (8)$$

$$(7) \text{ in } (2) : \quad A_V = q_0 l - B_V \quad \rightarrow \quad \boxed{A_V = \frac{M_0}{l} + q_0 l = 2F} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (7) \text{ in } (3) : \quad M_A &= -M_0 - 2B_V l + \frac{1}{2}Fl + \frac{1}{2}q_0 l^2 \\ &= -M_0 + 2M_0 + \frac{1}{2}Fl + \frac{1}{2}q_0 l^2 \\ &\rightarrow \quad \boxed{M_A = M_0 + \frac{1}{2}Fl + \frac{1}{2}q_0 l^2 = 2Fl} \end{aligned} \quad (10)$$

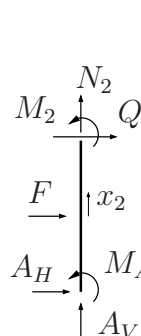
3. Schnittgrößen

3.1 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$



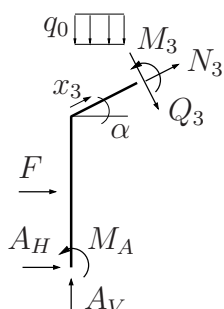
$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= -A_V & \rightarrow \quad \boxed{N_1(x_1) = -2F} \\ Q_1(x_1) &= -A_H & \rightarrow \quad \boxed{Q_1(x_1) = F} \\ M_1(x_1) &= -M_A - x_1 A_H & \rightarrow \quad \boxed{M_1(x_1) = -2Fl + Fx_1} \end{aligned}$$

3.2 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$



$$\begin{aligned} N_2(x_2) &= -A_V & \rightarrow \quad \boxed{N_2(x_2) = -2F} \\ Q_2(x_2) &= -A_H - F & \rightarrow \quad \boxed{Q_2(x_2) = 0} \\ M_2(x_2) &= -M_A + F \left(x_2 + \frac{l}{2} \right) - Fx_2 \\ &= -2Fl + \frac{Fl}{2} & \rightarrow \quad \boxed{M_2(x_2) = -\frac{3}{2}Fl} \end{aligned}$$

3.3 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_3 \leq \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}}$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$N_3(x_3) = q_0 \sin \alpha \cdot x_3 \cos \alpha - F \cos \alpha - A_H \cos \alpha - A_V \sin \alpha$$

$$= \frac{F}{\sqrt{5}l} x_3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2F}{\sqrt{5}} + \frac{2F}{\sqrt{5}} - \frac{2F}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{F}{\sqrt{5}} \left(\frac{2x_3}{\sqrt{5}l} - 2 \right)$$

$$\rightarrow \boxed{N_3(x_3) = \frac{2F}{\sqrt{5}} \left(\frac{x_3}{\sqrt{5}l} - 1 \right)}$$

$$Q_3(x_3) = -q_0 \cos \alpha \cdot x_3 \cos \alpha - F \sin \alpha - A_H \sin \alpha + A_V \cos \alpha$$

$$= -\frac{F}{l} \cdot \frac{4}{5} x_3 - \frac{F}{\sqrt{5}} + \frac{F}{\sqrt{5}} + \frac{2F \cdot 2}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \boxed{Q_3(x_3) = \frac{4F}{\sqrt{5}} \left(-\frac{x_3}{\sqrt{5}l} + 1 \right)}$$

$$M_3(x_3) = -\frac{q_0 \cdot x_3^2 \cos^2 \alpha}{2} - F \left(\frac{l}{2} + x_3 \sin \alpha \right) - A_H (l + x_3 \sin \alpha) + A_V (x_3 \cos \alpha) - M_A$$

$$= -\frac{F}{2l} \cdot \frac{4}{5} x_3^2 - \frac{Fl}{2} - \frac{F}{\sqrt{5}} x_3 + Fl - \frac{F}{\sqrt{5}} x_3 + \frac{4F}{\sqrt{5}} x_3 - 2Fl$$

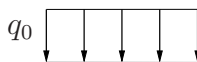
$$= -\frac{2F}{5l} x_3^2 + \frac{2F}{\sqrt{5}} x_3 - \frac{3}{2} Fl$$

$$\rightarrow \boxed{M_3(x_3) = Fl \left(-\frac{2}{5} \left(\frac{x_3}{l} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{x_3}{l} \right) - \frac{3}{2} \right)}$$

3.4 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_4 \leq l$

$$N_4(x_4) = A_V - q_0 l$$

$$= 2F - F \rightarrow \boxed{N_4(x_4) = F}$$



$$Q_4(x_4) = F + A_H \rightarrow \boxed{Q_4(x_4) = 0}$$

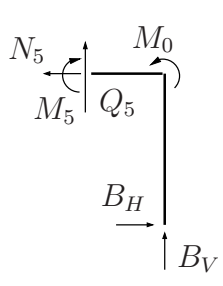
$$M_4(x_4) = -\frac{q_0 l^2}{2} - (l - x_4) F - \left(\frac{3l}{2} - x_4 \right) A_H$$

$$= -\frac{1}{2} Fl - (l - x_4) F + \left(\frac{3l}{2} - x_4 \right) F$$

$$= Fl \left(-\frac{1}{2} - 1 + \frac{x_4}{l} + \frac{3}{2} - \frac{x_4}{l} \right) F$$

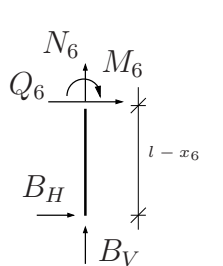
$$\rightarrow \boxed{M_4(x_4) = 0}$$

3.5 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_5 \leq l$



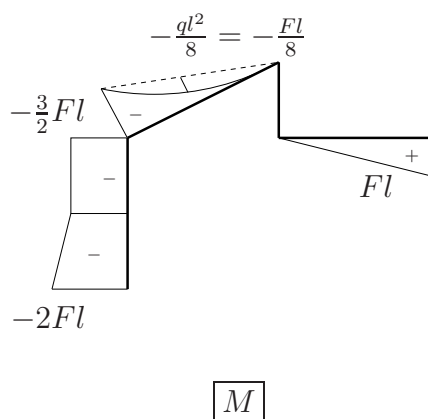
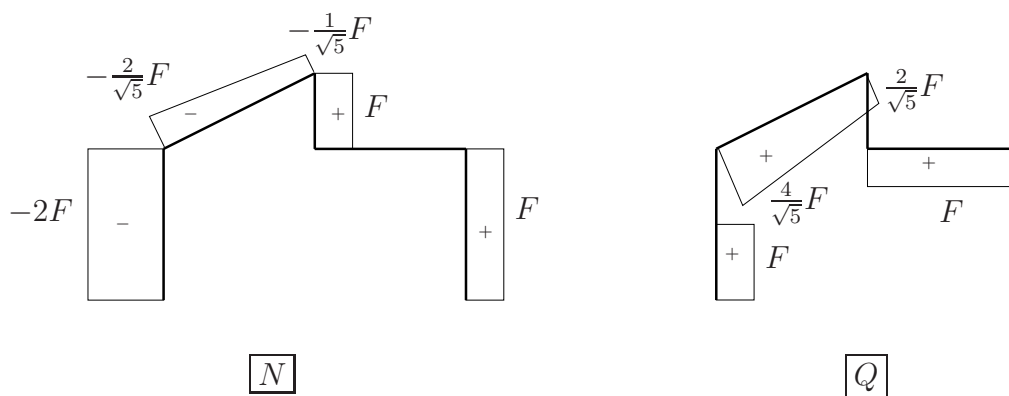
$$\begin{aligned}
 N_5(x_5) &= B_H && \rightarrow \boxed{N_5(x_5) = 0} \\
 Q_5(x_5) &= -B_V && \rightarrow \boxed{Q_5(x_5) = F} \\
 M_5(x_5) &= M_0 + lB_H + (l - x_5)B_V \\
 &= Fl + 0 - \left(1 - \frac{x_5}{l}\right)Fl && \rightarrow \boxed{M_5(x_5) = \frac{x_5}{l}Fl}
 \end{aligned}$$

3.6 Lokales Koordinatensystem $0 \leq x_6 \leq l$



$$\begin{aligned}
 N_6(x_6) &= -B_V && \rightarrow \boxed{N_6(x_6) = F} \\
 Q_6(x_6) &= -B_H && \rightarrow \boxed{Q_6(x_6) = 0} \\
 M_6(x_6) &= (l - x_6)B_H && \rightarrow \boxed{M_6(x_6) = 0}
 \end{aligned}$$

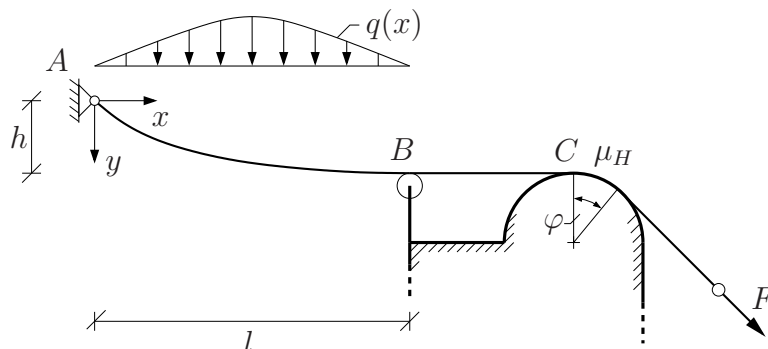
3.7 Schnittgrößenverläufe



Aufgabe 3

Das dargestellte masselose Seil wird in B über eine reibungsfreie Rolle sowie in C über einen reibungsbehafteten Zylinder geführt. Das Seil wird durch eine veränderliche Streckenlast $q(x)$ und eine Einzelkraft F beansprucht.

1. Bestimmen Sie die Seilkurve $y(x)$ im Bereich A - B , so dass das Seil in Punkt B horizontal über die Rolle läuft.
2. Berechnen Sie die Auflagerkräfte im Lager A .
3. Bestimmen Sie den minimalen Umschlingungswinkel φ , so dass das System in Ruhe bleibt.



Geg.: $h, l, \mu_H, F = 2 q_0 l^2 / (\pi h), q_0, q(x) = q_0 \sin(x\pi/l)$.

Lösung**1. Seilkurve**

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= -\frac{1}{H}q(x) = -\frac{1}{H}q_0 \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \\
 y'(x) &= \frac{1}{H} \cdot q_0 \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right) \cdot \frac{l}{\pi} + C_1 \\
 y(x) &= \frac{1}{H} \cdot q_0 \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) + C_1 x + C_2
 \end{aligned}$$

Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 y(x=0) &= 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\
 y(x=l) &= h = \frac{1}{H} \cdot q_0 \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{l}{l}\right) + C_1 \cdot l \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{h}{l} \\
 \rightarrow \quad y(x) &= \frac{q_0 l^2}{H \pi^2} \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) + \frac{h}{l} \cdot x
 \end{aligned}$$

Randbedingung für Horizontalzug

$$\begin{aligned}
 y'(x=l) &= 0 = \frac{1}{H} \cdot q_0 \cos\left(\pi \frac{l}{l}\right) \cdot \frac{l}{\pi} + \frac{h}{l} \\
 \rightarrow \quad H &= \frac{q_0 l^2}{\pi h} \\
 \rightarrow \quad \boxed{y(x) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) + \frac{h}{l} \cdot x}
 \end{aligned}$$

2. Auflagerkräfte in A

$$\rightarrow: A_H + S_H = A_H + H = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_H = -H = -\frac{q_0 l^2}{\pi h}}$$

$$\curvearrowright B: A_V \cdot l + A_H \cdot h - \left| \int_{x=0}^l q(x) dx \right| \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$A_V \cdot l - \frac{q_0 l^2}{\pi} - \left| \int_{x=0}^l q_0 \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) dx \right| \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$A_V \cdot l - \frac{q_0 l^2}{\pi} - \left| \left[-q_0 \frac{l}{\pi} \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right) \right]_{x=0}^l \right| \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$A_V \cdot l - \frac{q_0 l^2}{\pi} - \left(q_0 \frac{l}{\pi} + q_0 \frac{l}{\pi} \right) \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{A_V = \frac{2q_0 l}{\pi}}$$

3. Minimaler Umschlingungswinkel φ

$$F \geq S = H \quad \rightarrow \quad F = S \cdot e^{\mu_H \cdot \varphi}$$

$$\frac{F}{H} = \frac{2q_0 \frac{l^2}{\pi h}}{\frac{q_0 l^2}{\pi h}} = 2 = e^{\mu_H \cdot \varphi}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{1}{\mu_H} \cdot \ln 2}$$