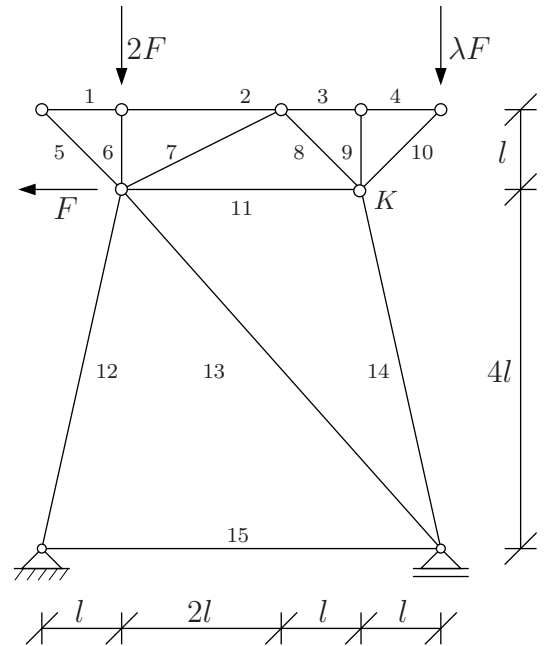


Aufgabe 1

Der dargestellte Fachwerkturm wird durch drei Einzellasten belastet.

1. Überprüfen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle offensichtlichen Nullstäbe.
3. Bestimmen Sie die Kräfte in den Stäben 12, 13, 14 durch einen Ritterschnitt und in den am Knoten K angeschlossenen Stäben durch Knotenpunktverfahren. Kennzeichnen Sie die berechneten Stabkräfte als Zug- bzw. Druckstäbe.
4. Berechnen Sie die Größe von λ , damit eine maximale Druckkraft von $5F$ in den ermittelten Stäben nicht überschritten wird.



Geg.: $l, F, \lambda > 0$.

Lösung

1. Statische Bestimmtheit

äußere: $f = 3n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0$

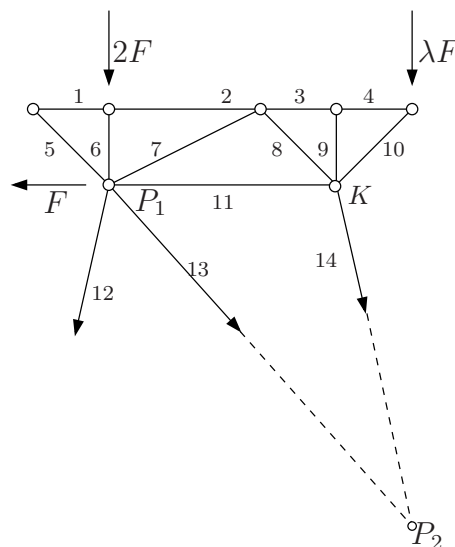
innere: $f = 3k - (a + s) = 2 \cdot 9 - (3 + 15) = 0$

2. Offensichtliche Nullstäbe

$$S_1 = 0, \quad S_5 = 0, \quad S_9 = 0, \quad S_2 = 0$$

3. Stabkräfte

3.1 Ritterschnitt



$$\curvearrowleft P_1: -\lambda F \cdot 4l - \frac{4}{\sqrt{17}} S_{14} \cdot 3l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{14} = -\frac{\sqrt{17}}{3} \lambda F} \quad (\text{Druck})$$

$$\curvearrowleft P_2: 2F \cdot 4l + F \cdot 4l + \frac{1}{\sqrt{17}} S_{12} \cdot 4l + \frac{4}{\sqrt{17}} S_{12} \cdot 4l = 0$$

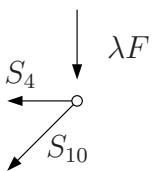
$$\rightarrow \quad \boxed{S_{12} = -\frac{3\sqrt{17}}{5} F} \quad (\text{Druck})$$

$$\rightarrow: -F - \frac{1}{\sqrt{17}} S_{12} + \frac{1}{\sqrt{17}} S_{14} + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} = 0$$

$$-F + \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{3\sqrt{17}}{5} F - \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{\sqrt{17}}{3} \lambda F + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{13} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{13} = \sqrt{2} \left(\frac{2}{5} F + \frac{1}{3} \lambda F \right)} \quad (\text{Zug})$$

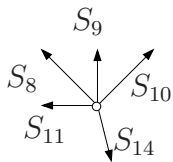
3.2 Knotenpunktverfahren



$$\uparrow: -\lambda F - \frac{1}{\sqrt{2}} S_{10} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{10} = -\sqrt{2} \lambda F} \quad (\text{Druck})$$

$$\uparrow: \frac{1}{\sqrt{2}} S_{10} + \frac{1}{\sqrt{2}} S_8 - \frac{4}{\sqrt{17}} S_{14} = 0$$

$$-\lambda F + \frac{1}{\sqrt{2}} S_8 + \frac{4}{3} \lambda F = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_8 = -\sqrt{2} \frac{1}{3} \lambda F} \quad (\text{Druck})$$



$$\rightarrow: \frac{1}{\sqrt{2}} S_{10} - \frac{1}{\sqrt{2}} S_8 - S_{11} + \frac{1}{\sqrt{17}} S_{14} = 0$$

$$-\lambda F + \frac{1}{3} \lambda F - S_{11} - \frac{1}{3} \lambda F = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{11} = -\lambda F} \quad (\text{Druck})$$

4. zulässiges λ

Druckstäbe sind S_8 , S_{10} , S_{11} , S_{12} , S_{14}

$$S_8 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \lambda F > -5F \quad \rightarrow \quad \lambda < 10.61$$

$$S_{10} = -\sqrt{2} \lambda F > -5F \quad \rightarrow \quad \lambda < 3.54$$

$$S_{11} = -\lambda F > -5F \quad \rightarrow \quad \lambda < 5$$

$$S_{12} = -\frac{3 \cdot \sqrt{17}}{5} F = -2,47F > -5F$$

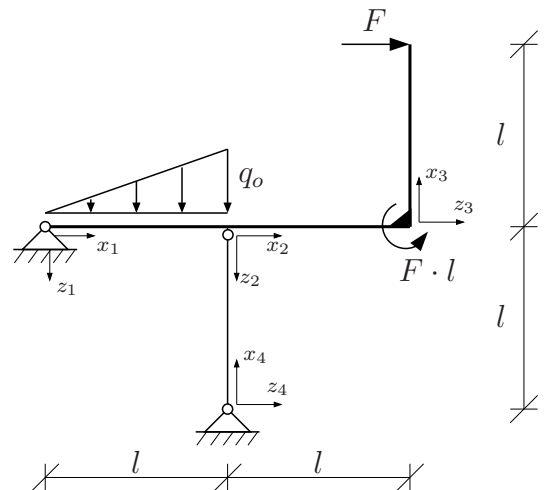
$$S_{14} = -\frac{\sqrt{17}}{3} \lambda F > -5F \quad \rightarrow \quad \lambda < 3.64$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda_{\text{zul}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.54}$$

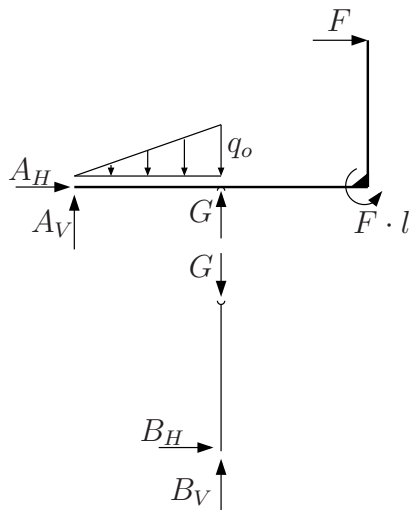
Aufgabe 2

Das dargestellte System wird durch eine Streckenlast, eine Einzelkraft und ein Einzelmoment belastet.

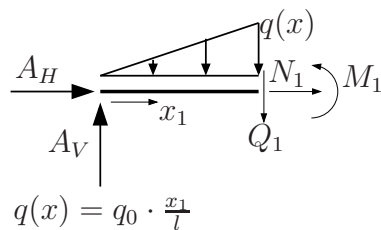
1. Berechnen Sie alle Auflager- und Gelenkreaktionen im System.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der elementaren Schnittmethode alle Schnittgrößen und stellen Sie deren Verläufe unter Angabe von Rand- und Extremwerten graphisch dar.
3. Überprüfen Sie die Ergebnisse aus 2. für $0 \leq x_1 \leq l$ mit Hilfe der Integration der Schnittgrößendifferentialgleichung.



Geg.: l, q_0, F .

Lösung**1. Auflager- und Gelenkreaktionen**

$$\begin{aligned}
 \curvearrowright G^{PS}: \quad & \boxed{B_H = 0} \\
 \rightarrow: \quad & A_H + F = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_H = -F} \\
 \curvearrowright A^{GS}: \quad & Fl - Fl + \frac{1}{2}q_0 l \frac{2}{3}l - B_V l = 0 \\
 \rightarrow \quad & \boxed{B_V = \frac{1}{3}q_0 l} \\
 \uparrow^{GS}: \quad & B_V + A_V - \frac{1}{2}q_0 l = 0 \\
 \rightarrow \quad & \boxed{A_V = \frac{1}{6}q_0 l} \\
 \uparrow^{PS}: \quad & B_V - G = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \frac{1}{3}q_0 l}
 \end{aligned}$$

2. Schnittgrößen**2.1 Bereich 1**

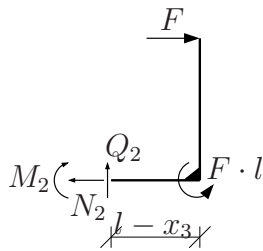
$$q(x) = q_0 \cdot \frac{x_1}{l}$$

$$\begin{aligned}
 N_1(x_1) &= F \\
 Q_1(x_1) &= \frac{1}{6}q_0 l - \frac{1}{2}q(x_1)x_1 \\
 &= \frac{1}{6}q_0 l - \frac{1}{2}q_0 \frac{x_1^2}{l} \\
 M_1(x_1) &= \frac{1}{6}q_0 l x_1 - \frac{1}{2}q(x_1)x_1 \frac{1}{3}x_1 \\
 &= \frac{1}{6}q_0 l x_1 - \frac{1}{6}q_0 \frac{x_1^3}{l}
 \end{aligned}$$

maximales Moment:

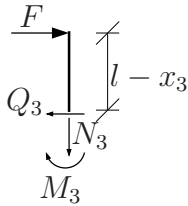
$$M'_1(x_1) = \frac{1}{6}q_0 l - \frac{1}{2}q_0 \frac{x_1^2}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.2 Bereich 2



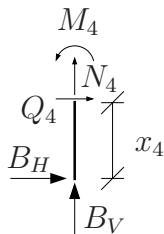
$$\begin{aligned} N_2(x_2) &= F \\ Q_2(x_2) &= 0 \\ M_2(x_2) &= Fl - Fl = 0 \end{aligned}$$

2.3 Bereich 3



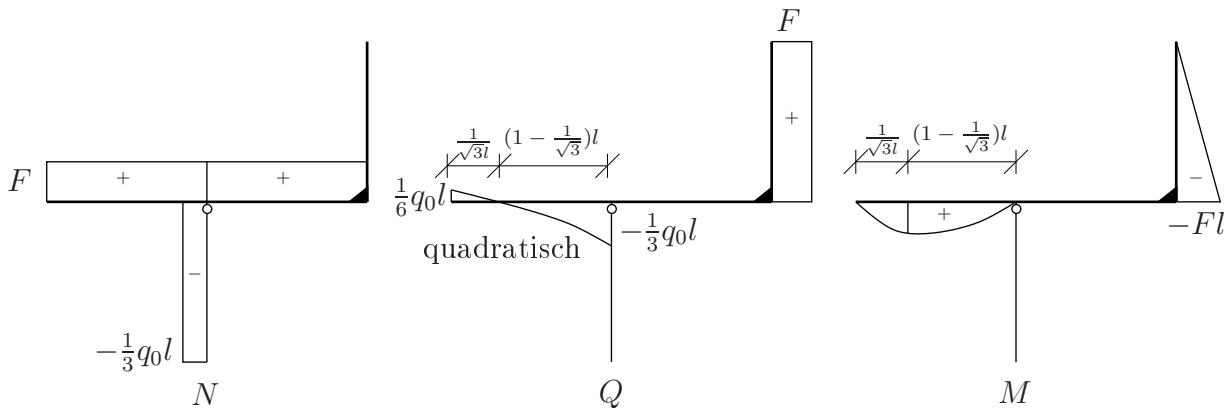
$$\begin{aligned} N_3(x_3) &= 0 \\ Q_3(x_3) &= F \\ M_3(x_3) &= -F(l - x_3) \end{aligned}$$

2.4 Bereich 4



$$\begin{aligned} N_4(x_4) &= -\frac{1}{3}q_0l \\ Q_4(x_4) &= 0 \quad (\text{Pendelstab}) \\ M_4(x_4) &= 0 \quad (\text{Pendelstab}) \end{aligned}$$

2.5 graphische Darstellung



3. Schnittgrößen-Differentialgleichungen

$$Q_1(x_1) = -\int q(x_1)dx_1, \quad q_1(x_1) = q_0 \cdot \frac{x_1}{l} \rightarrow Q_1(x_1) = -\frac{1}{2}q_0 \frac{x_1^2}{l} + C_1$$

$$M_1(x_1) = -\int Q(x_1)dx_1 \rightarrow M_1(x_1) = -\frac{1}{6}q_0 \frac{x_1^3}{l} + C_1 x_1 + C_2$$

$$N_1(x_1) = -\int n(x_1)dx_1, \quad n(x_1) = 0 \rightarrow N_1(x_1) = C_3$$

Randbedingungen und Lösungen

$$Q_1(x_1 = 0) = A_V \rightarrow C_1 = \frac{1}{6}q_0l \rightarrow \boxed{Q_1(x_1) = -\frac{1}{2}q_0 \frac{x_1^2}{l} + \frac{1}{6}q_0l}$$

$$M_1(x_1 = 0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow \boxed{M_1(x_1) = -\frac{1}{6}q_0 \frac{x_1^3}{l} + \frac{1}{6}q_0l x_1}$$

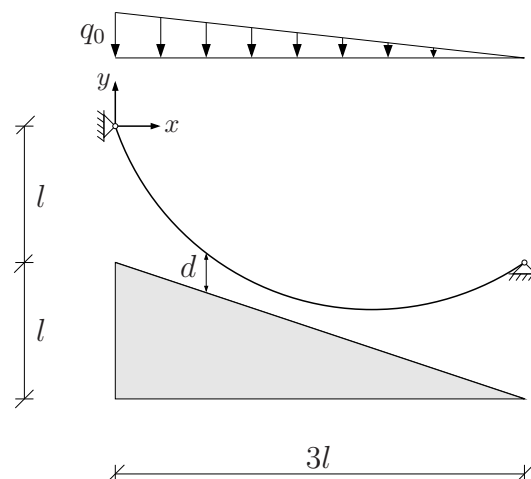
$$N_1(x_1 = 0) = -A_H \rightarrow C_3 = F \rightarrow \boxed{N_1(x_1) = F}$$

Aufgabe 3

Das dargestellte Seil ist durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet und besitzt den Horizontalzug H .

1. Bestimmen Sie die Funktion $q(x)$ der Streckenlast.
2. Ermitteln Sie die Seilkurve $y(x)$ und deren Abstand $d(x)$ zur Ebene.
3. Berechnen Sie die Stelle x , an der der Abstand $d(x)$ minimal ist.
4. Bestimmen Sie den Horizontalzug H^* für welchen das Seil die Ebene in einem Punkt berührt.

Geg.: q_0, l, H .

**Lösung****1. Funktion der Streckenlast $q(x)$**

$$q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{3l} \right)$$

2. Seilkurve und Abstand d zur Ebene

$$y''(x) = \frac{1}{H} q(x) = \frac{q_0}{H} \left(1 - \frac{x}{3l} \right)$$

$$y'(x) = \frac{q_0}{H} \left(x - \frac{x^2}{6l} \right) + C_1$$

$$y(x) = \frac{q_0}{H} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18l} \right) + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen:

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$y(3l) = -l \rightarrow C_1 = -\frac{1}{3} - \frac{q_0}{H} l$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{q_0}{H} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18l} \right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{q_0}{H} l \right) x$$

Abstand: Geradengleichung der Ebene

$$g(x) = mx + c \quad \text{mit RB} \quad g(0) = -l, \quad g(3l) = -2l$$

$$\rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x - l$$

$$d(x) = -\frac{1}{3}x - l - y(x) = -\frac{q_0}{H} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18l} \right) + \frac{q_0}{H} lx - l$$

$$\rightarrow \boxed{d(x) = -\frac{q_0}{H} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18l} - lx \right) - l}$$

3. Geringster Abstand

$$\begin{aligned} d'(x) = 0 : \quad d'(x) &= -\frac{q_0}{H} \left(x - \frac{x^2}{6l} - l \right) \\ &= \frac{q_0}{H} (x^2 - 6lx + 6l^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{6l}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{36l^2 - 4 \cdot 6l^2} \\ &= 3l \pm \frac{1}{2} \sqrt{12}l \\ &= (3 \pm \sqrt{3})l \end{aligned}$$

$$x_1 = (3 + \sqrt{3})l > 3l$$

$$x_2 = (3 - \sqrt{3})l \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = (3 - \sqrt{3})l}$$

4. Horizontalzug H^*

$$d(x) = 0 : \quad \text{für } x_2 = (3 - \sqrt{3})l$$

$$-\frac{q_0}{H^*} \left(\frac{((3 - \sqrt{3})l)^2}{2} - \frac{((3 - \sqrt{3})l)^3}{18l} - l \cdot (3 - \sqrt{3})l \right) - l = 0$$

$$-\frac{q_0}{H^*} l^2 \left(\frac{(3 - \sqrt{3})^2}{2} - \frac{(3 - \sqrt{3})^3}{18} - (3 - \sqrt{3}) \right) - l = 0$$

$$\frac{q_0}{H^*} = \frac{l}{l^2 \left(\frac{(3 - \sqrt{3})^3}{18} - \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{2} + (3 - \sqrt{3}) \right)} = \frac{\sqrt{3}}{l}$$

$$\rightarrow \boxed{H^* = \frac{q_0 l}{\sqrt{3}}}$$