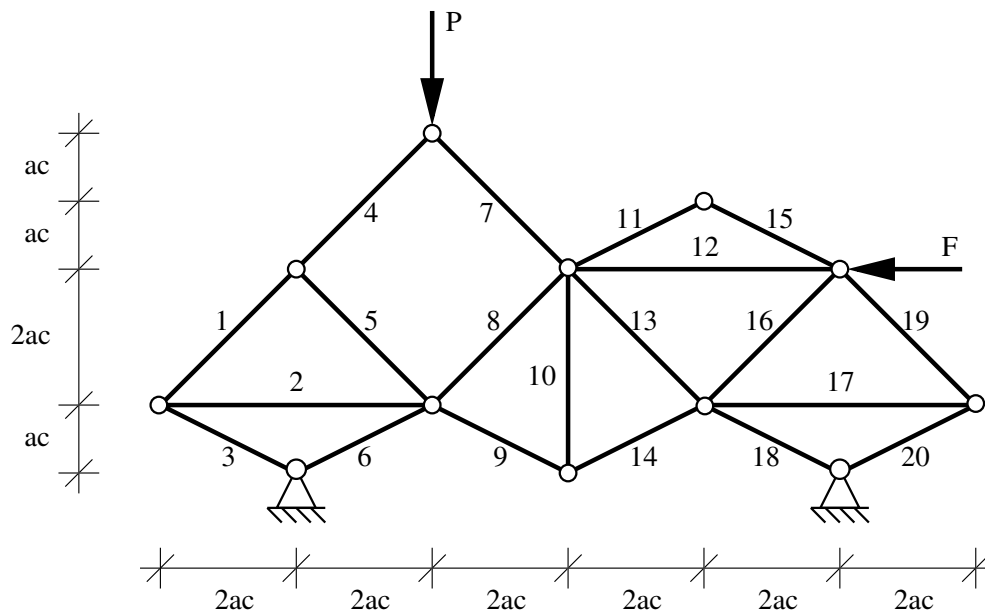


Aufgabe 2 (25 Punkte)

Das dargestellte Fachwerk wird durch zwei Einzellasten F und P beansprucht.

1. Überprüfen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
2. Geben Sie alle direkt ersichtlichen Nullstäbe an.
3. Bestimmen Sie sämtliche Auflagerreaktionen, indem Sie zunächst die Stabkräfte 4 und 7 berechnen.
4. Berechnen Sie die Stabkräfte 1, 2, 3, 5 und 6 mit dem *Knotenpunktverfahren*.
5. Bestimmen Sie die Stabkräfte 12, 13 und 14 mit Hilfe eines geeigneten Schnitts.

Geg.: l , F , P .

**Lösung****1. statische Bestimmtheit**

$$f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 12 - (4 + 20) = 24 - 24 = 0$$

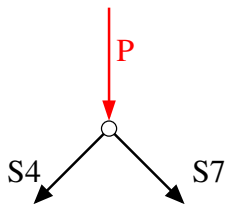
$\Rightarrow$ Das System ist statisch bestimmt.

2. offensichtliche Nullstäbe

$$S_5, S_{11}, S_{15}$$

3. Auflagerreaktionen

Teilsystem 1:



$$\uparrow: -P - S_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\rightarrow: S_4 = S_7$$

$$\Rightarrow \boxed{S_4 = S_7 = -\frac{P}{\sqrt{2}}}$$

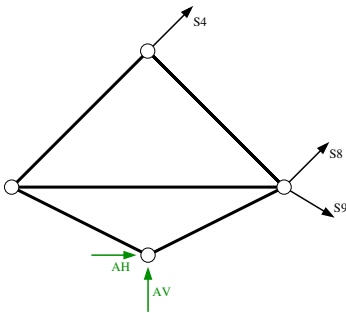
Gesamtsystem:

$$\curvearrowright \Sigma M_A: -P \cdot 2a + F \cdot 3a + B_V \cdot 8a = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B_V = \frac{1}{4}P - \frac{3}{8}F}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_B: F \cdot 3a + P \cdot 6a - A_V \cdot 8a = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A_V = \frac{3}{8}F + \frac{3}{4}P}$$

$$\uparrow: A_H + B_H - F = 0 \quad \Rightarrow B_H = F - A_H$$

Teilsystem 2:



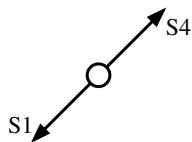
$$\curvearrowright \Sigma M_A: -S_4 \cdot 2a \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} - A_V \cdot 2a - A_H \cdot a = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}F - \frac{3}{2}P - A_H = 0$$

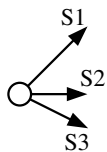
$$\Rightarrow \boxed{A_H = \frac{3}{4}F - \frac{1}{2}P}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_H = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}F}$$

4. Stabkräfteberechnung durch Knotenpunktverfahren



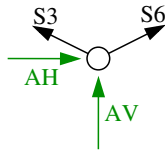
$$\nearrow: S_1 = S_4 \quad \Rightarrow \boxed{S_1 = -\frac{P}{\sqrt{2}}}$$



$$\uparrow: S_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - S_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{S_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}P}$$

$$\rightarrow: S_2 + S_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + S_3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow S_2 = \frac{P}{2} + P \quad \Rightarrow \boxed{S_2 = \frac{3}{2}P}$$



$$\uparrow: A_V + S_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + S_6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow S_6 = \frac{\sqrt{5}}{2}P - \sqrt{5} \left(\frac{3}{8}F + \frac{3}{4}P \right) \Rightarrow \boxed{S_6 = -\frac{\sqrt{5}}{4}P - \frac{3\sqrt{5}}{8}F}$$

5. Stabkräfteberechnung durch geeigneten Schnitt

$$\curvearrowleft \Sigma M_C: B_V \cdot 4a + B_H \cdot 3a - S_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2a - S_{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow S_{14} = \frac{\sqrt{5}}{6} \left(P - \frac{3}{2}F + \frac{3}{2}P + \frac{3}{4}F \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{14} = \frac{\sqrt{5}}{6} \left(\frac{5}{2}P - \frac{3}{4}F \right)}$$

$$\uparrow: B_V - S_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - S_{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

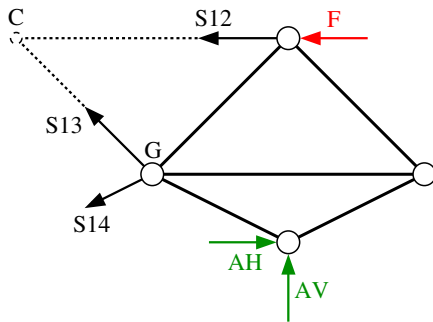
$$S_{13} = \sqrt{2} \left(\frac{5}{12}P - \frac{1}{8}F - \frac{1}{4}P + \frac{3}{8}F \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{13} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{6}P + \frac{1}{4}F \right)}$$

$$\leftarrow: B_H - F - S_{12} - S_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - S_{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}F - F - \frac{5}{4}P + \frac{3}{8}F + \frac{1}{4}P - \frac{3}{8}F$$

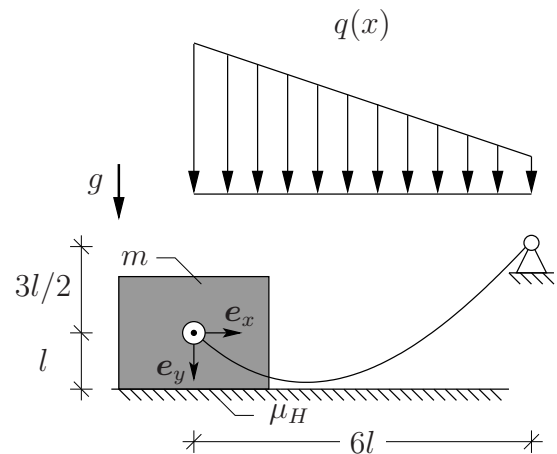
$$\Rightarrow \boxed{S_{12} = -\frac{1}{2}P - \frac{3}{4}F}$$



Aufgabe 2 (25 Punkte)

Das dargestellte dehnstarre Seil ist am linken Ende im Schwerpunkt eines Körpers (Masse m) befestigt. Am rechten Ende befindet sich ein Auflager. Das Seil wird durch die lineare Streckenlast $q(x)$ beansprucht. Das System befindet sich in der gezeichneten Ruhelage. Bestimmen Sie

1. die Seilkurve $y(x)$ in Abhängigkeit des Horizontalzugs H ,
2. den Wert des Horizontalzugs im Grenzfall der Haftreibung, indem Sie zunächst den Körper freischneiden, sowie
3. den minimalen Abstand des Seils zur Ebene.



Geg.: l , q_0 , $m = 6q_0l/g$, $\mu_H = 4/5$, g , $q(x) = q_0(8 - x/l)$.

Lösung**1. Seilkurve $y(x)$**

$$y''(x) = -\frac{q(x)}{H} = -\frac{q_0}{H}\left(8 - \frac{x}{l}\right)$$

$$y'(x) = -\frac{q_0}{H}\left(8x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_1$$

$$y(x) = -\frac{q_0}{H}\left(4x^2 - \frac{x^3}{6l}\right) + C_1x + C_2$$

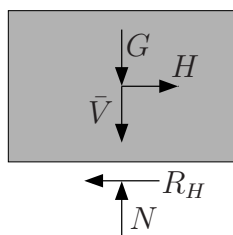
Randbedingungen:

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$y(x=6l) = -\frac{3}{2}l \Rightarrow -\frac{q_0}{H}(144l^2 - 36l^2) + C_1 \cdot 6l = -\frac{3}{2}l$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{18q_0l}{H} - \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{q_0}{H}\left(4x^2 - \frac{x^3}{6l}\right) + \left(\frac{18q_0l}{H} - \frac{1}{4}\right)x}$$

2. Horizontalzug H

$$\uparrow: -G - \bar{V} + N = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow: R_H = H$$

Gewichtskraft:

$$G = m \cdot g = 6q_0l$$

Grenzfall der Haftreibung:

$$R_H = \mu \cdot N \Leftrightarrow H = \mu_H \cdot N \Rightarrow \boxed{N = \frac{H}{\mu_H}}$$

Vertikalzug:

$$V(x) = H \cdot y'(x) = -q_0 \cdot \left(8x - \frac{x^2}{2l}\right) + 18q_0l - \frac{1}{4}H$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = V(x=0) = 18q_0l - \frac{1}{4}H}$$

Einsetzen in (1):

$$-G - \bar{V} + N = 0 \Leftrightarrow 6q_0l - 18q_0l + \frac{1}{4}H + \frac{H}{\mu_H} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\mu_H}\right)H = 24q_0l$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}H = 24q_0l$$

$$\Rightarrow \boxed{H = 16q_0l}$$

3. Abstand zur Ebene

Abstand d mit $d(x) = l - y(x) \Rightarrow d'(x) = -y'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned}
 d'(x) &= \frac{q_0}{H} \cdot \left(8x - \frac{x^2}{2l}\right) - \left(\frac{18q_0 l}{H} - \frac{1}{4}\right) \\
 &= -\frac{q_0}{2Hl}x^2 + \frac{8q_0}{H}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{18q_0 l}{H}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{-\frac{8q_0}{H} \pm \sqrt{\frac{64q_0^2}{H^2} + \frac{2q_0}{Hl} \left(\frac{1}{4} - \frac{18q_0 l}{H}\right)}}{-\frac{q_0}{Hl}} \\
 &= 8l \pm l \cdot \sqrt{\frac{H^2}{q_0^2} \left(\frac{64q_0^2}{H^2} + \frac{2q_0}{Hl} \left(\frac{1}{4} - \frac{18q_0 l}{H}\right)\right)} \\
 &= 8l \pm l \cdot \sqrt{64 + \frac{1}{2} \frac{H}{q_0 l} - 36} \\
 &= 8l \pm l \cdot \sqrt{28 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16q_0 l}{q_0 l}} \\
 &= 8l \pm l \cdot \sqrt{36} \\
 &= 8l \pm 6l
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 14l \quad \text{Außerhalb des Bereichs!}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2l \quad \Rightarrow \text{Minimaler Abstand bei } \boxed{x = 2l}$$

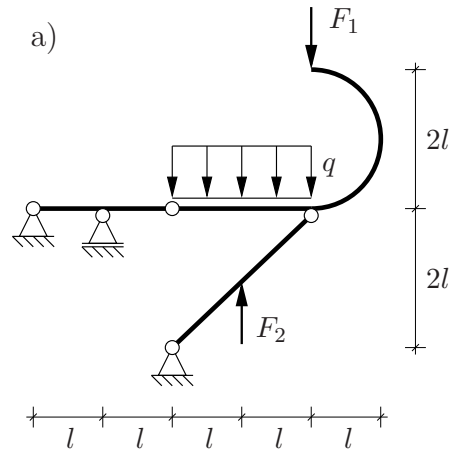
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Minimaler Abstand } d_{\min} = d(x = 2l) &= l + \frac{q_0}{16q_0 l} (4 \cdot (2l)^2 - \frac{(2l)^3}{6l}) - \left(\frac{18q_0 l}{16q_0 l} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2l \\
 &= l + l - \frac{1}{12}l - \frac{9}{8}l + \frac{1}{2}l \\
 &\Rightarrow \boxed{d_{\min} = \frac{1}{6}l}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Das in a) dargestellte Tragwerk wird durch zwei Einzellasten sowie durch eine konstante Streckenlaste beansprucht.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen.

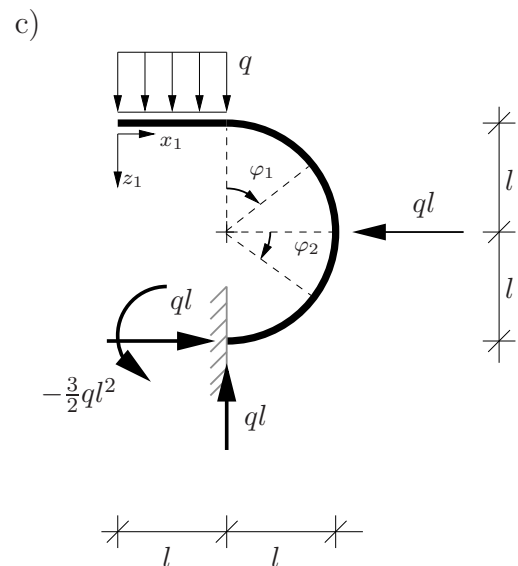
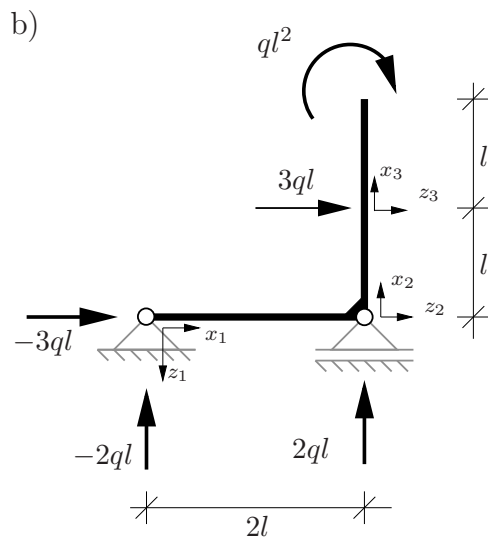
Geg.: l, q, F_1, F_2 .



Die in b) und c) dargestellten Systeme werden durch Einzelmoment und Einzelkraft sowie Streckenlast und Einzelkraft beansprucht. Alle Auflagerreaktionen sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen in beiden Tragwerken und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

Geg.: l, q .



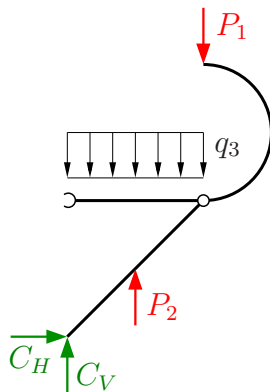
Lösung**1. Statische Bestimmtheit**

$$f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$$

$\Rightarrow$ Das System ist statisch bestimmt

2. Auflagerkräfte

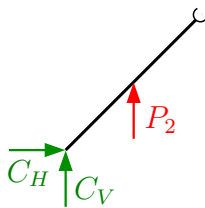
Teilsystem 1:



$$\curvearrowright \Sigma M_D : P_2 \cdot l + C_V \cdot 0 + C_H \cdot 2l - 2q_3 l \cdot l - P_1 \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow C_H = P_1 + q_3 l - \frac{P_2}{2}$$

Teilsystem 2:



$$\curvearrowright \Sigma M_E : -P_2 \cdot l - C_V \cdot 2l + C_H \cdot 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow C_V = P_1 + q_3 l - \frac{P_2}{2} - \frac{P_2}{2}$$

$$\Rightarrow C_V = P_1 + q_3 l - P_2$$

Gesamtsystem:

$$\rightarrow: A_H = -C_H$$

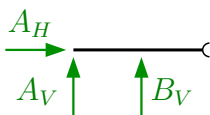
$$\Rightarrow A_H = \frac{P_2}{2} - P_1 - q_3 l$$

$$\uparrow: C_V + A_V + P_2 - 2q_3 l - P_1 + B_V = 0$$

$$\Leftrightarrow A_V + B_V = P_1 + 2q_3 l - P_2 - (P_1 + q_3 l - P_2)$$

$$\Rightarrow A_V + B_V = q_3 l \quad (1)$$

Teilsystem 3:



$$\curvearrowright \Sigma M_E : -A_V \cdot 2l - B_V \cdot l = 0$$

$$\Leftrightarrow B_V = -2A_V$$

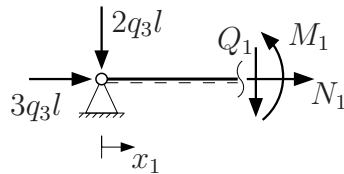
$$\text{einsetzen in (1): } A_V - 2A_V = q_3 l$$

$$\Rightarrow A_V = -q_3 l$$

$$\Rightarrow B_V = 2q_3 l$$

3. Schnittgrößen

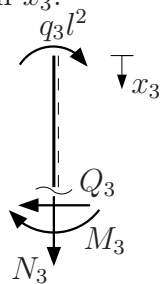
Aufgabenteil b)

Verlauf von x_1 :

$$\Rightarrow N_1(x_1) = 3q_3l$$

$$\Rightarrow Q_1(x_1) = -2q_3l$$

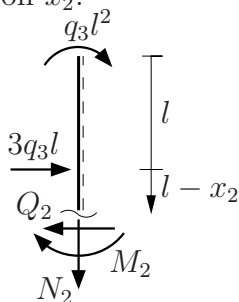
$$\Rightarrow M_1(x_1) = -2q_3l \cdot x_1$$

Verlauf von x_3 :

$$\Rightarrow N_3(x_3) = 0$$

$$\Rightarrow Q_3(x_3) = 0$$

$$\Rightarrow M_3(x_3) = -q_3l^2$$

Verlauf von x_2 :

$$\Rightarrow N_2(x_2) = 0$$

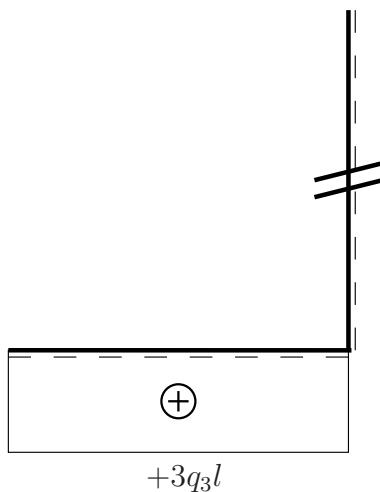
$$\Rightarrow Q_2(x_2) = 3q_3l$$

$$\Rightarrow M_2(x_2) = -q_3l^2$$

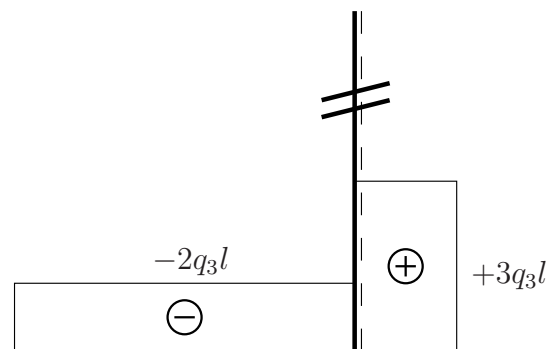
$$M_2 + q_3l^2 + 3q_3l(l - x_2) = 0$$

Verläufe zu b):

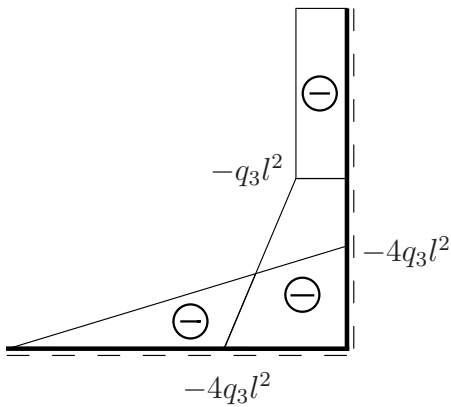
Normalkraftverlauf



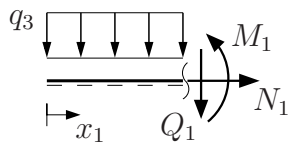
Querkraftverlauf



Momentenverlauf



Aufgabenteil c)

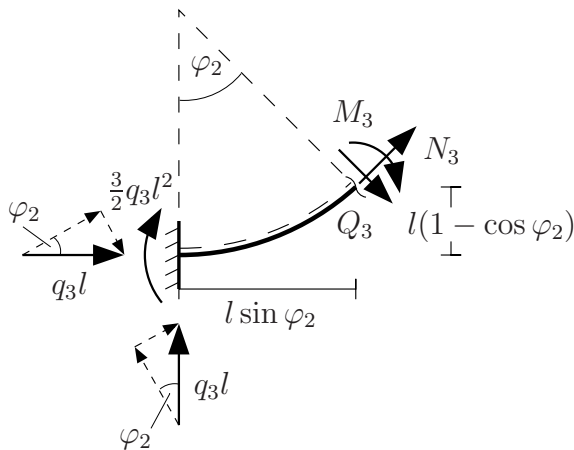
Verlauf von x_1 :

$$M_1 + q_3 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N_1(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow Q_1(x_1) = -q_3 x_1$$

$$\Rightarrow M_1(x_1) = -\frac{1}{2} q_3 x_1^2$$

Verlauf von φ_2 : $\curvearrowright \Sigma M :$

$$-M_3 + q_3 l \cdot l(1 - \cos \varphi_2) - q_3 l \cdot l \cdot \sin \varphi_2 - \frac{3}{2} q_3 l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow M_3 = q_3 l^2 (1 - \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 - \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow M_3(\varphi_2) = -q_3 l^2 (\frac{1}{2} + \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2)$$

 $\searrow \Sigma F_{\text{radial}} :$

$$Q_3 - q_3 l \cdot \cos \varphi_2 + q_3 l \cdot \sin \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow Q_3(\varphi_2) = q_3 l (\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2)$$

 $\nearrow \Sigma F_{\text{tangential}} :$

$$N_3 + q_3 l \cdot \cos \varphi_2 + q_3 l \cdot \sin \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow N_3(\varphi_2) = -q_3 l (\cos \varphi_2 + \sin \varphi_2)$$

$$\rightarrow M_3(0) = -q_3 l^2 (\frac{1}{2} + 1) = -\frac{3}{2} q_3 l^2$$

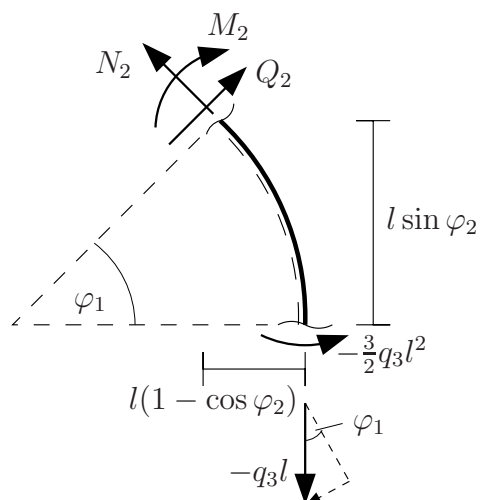
$$\rightarrow M_3(\frac{\pi}{2}) = -q_3 l^2 (\frac{1}{2} + 1) = -\frac{3}{2} q_3 l^2$$

$$\rightarrow Q_3(0) = q_3 l$$

$$\rightarrow Q_3(\frac{\pi}{2}) = -q_3 l$$

$$\rightarrow N_3(0) = -q_3 l$$

$$\rightarrow N_3(\frac{\pi}{2}) = -q_3 l$$

Verlauf von φ_1 :

$$\curvearrowright \Sigma M : \quad -M_2 - \frac{3}{2}q_3l^2 - (-q_3l) \cdot l(1 - \cos \varphi_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow M_2 = q_3l^2(1 - \frac{3}{2} - \cos \varphi_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_2(\varphi_1) = -q_3l^2(\frac{1}{2} + \cos \varphi_2)}$$

$$\nearrow \Sigma F_{\text{radial}} : \quad Q_2 - (-q_3l) \cdot \sin \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_2(\varphi_1) = -q_3l \sin \varphi_2}$$

$$\nwarrow \Sigma F_{\text{tangential}} : \quad N_2 - (-q_3l) \cdot \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2(\varphi_1) = -q_3l \cos \varphi_2}$$

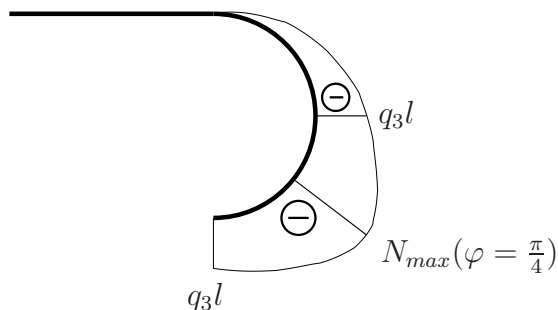
$$\rightarrow M_2(0) = -\frac{3}{2}q_3l^2 \quad \rightarrow M_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}q_3l^2$$

$$\rightarrow Q_2(0) = 0 \quad \rightarrow Q_2(\frac{\pi}{2}) = -q_3l$$

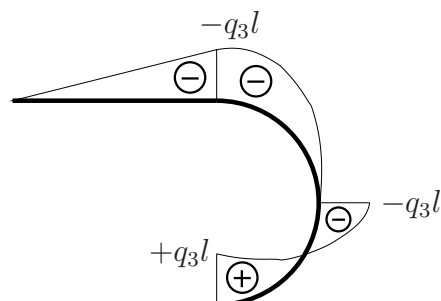
$$\rightarrow N_2(0) = -q_3l \quad \rightarrow N_2(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Verläufe zu c):

Normalkraftverlauf



Querkraftverlauf



Momentenverlauf

