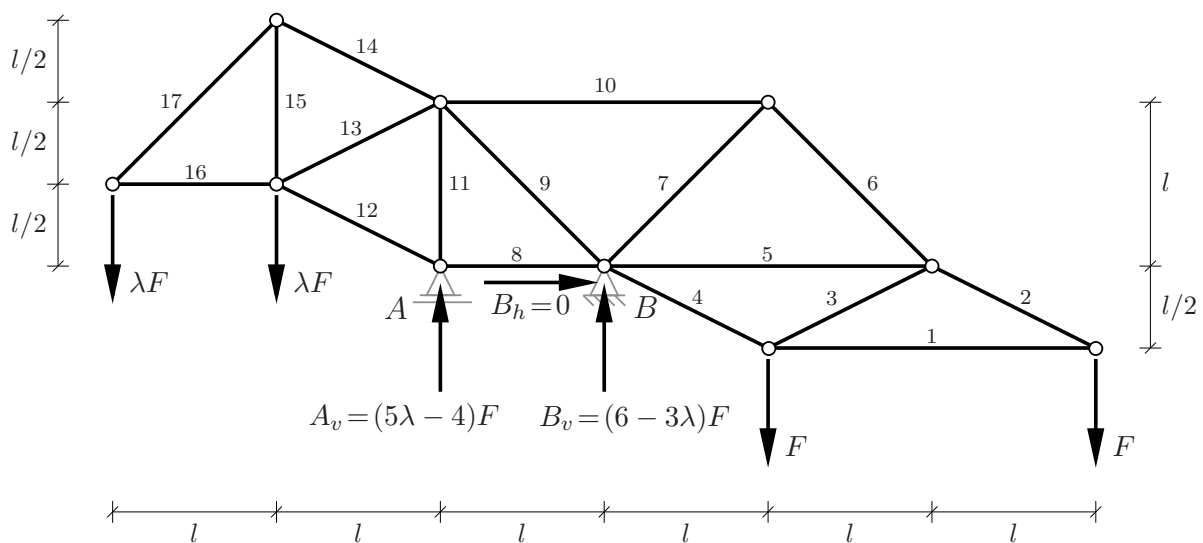


Aufgabe 1 (25 Punkte)

Das dargestellte Fachwerk wird wie gezeigt durch vier Einzelkräfte belastet. Die Auflagerkräfte in A und B sind gegeben.

1. Überprüfen Sie das gegebene Fachwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Berechnen Sie die Stabkräfte in den Stäben 1, 2, 3, 4, 5 und 6 mit Hilfe des *Knotenpunktverfahrens*.
3. Berechnen Sie die Stabkräfte in den Stäben 8, 9 und 10 mit Hilfe des *Ritterschnittverfahrens*.
4. Berechnen Sie die Stabkräfte in den Stäben 17, 16, 15, 14, 13 und 12 mit Hilfe des *Knotenpunktverfahrens*.
5. Was ist der zulässige Wertebereich für λ , wenn das Auflager in A nur auf Druck belastet werden darf und die maximal zulässige Druckkraft in Stab 12 den Wert $-3\sqrt{5}F$ hat?

Geg.: l, F, λ .

**Lösung****1. Statische Bestimmtheit**

äußere: $f = 3n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0$

innere: $f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 10 - (3 + 17) = 20 - 20 = 0$

$\Rightarrow$ Das System ist äußerlich und innerlich statisch bestimmt.

2. Ermittlung Stabkräfte 1-6 mit dem Knotenpunktverfahren

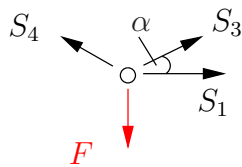
$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\uparrow \Sigma V : \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_2 - F = 0$

$\rightarrow S_2 = \sqrt{5} \cdot F$

$\leftarrow \Sigma H : \quad S_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_2 = 0$

$\rightarrow S_1 = -2 \cdot F$



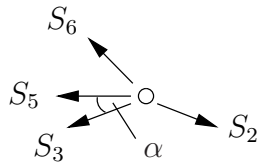
$$\rightarrow \Sigma H : \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_3 + S_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_4 = 0$$

$$\rightarrow S_3 = S_4 + \sqrt{5} \cdot F$$

$$\downarrow \Sigma V : \quad F - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_4 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_3 = 0$$

$$\rightarrow S_4 = 0$$

$$\rightarrow S_3 = \sqrt{5} \cdot F$$

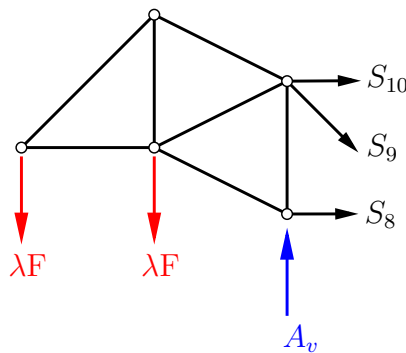


$$\downarrow \Sigma V : \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_6 = 0$$

$$\rightarrow S_6 = 2\sqrt{2} \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : \quad -S_5 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_6 + \frac{2}{\sqrt{5}} S_2 - \frac{2}{\sqrt{5}} S_3 = 0 \rightarrow S_5 = -2 \cdot F$$

3. Ermittlung der Kräfte in den Stäben 8, 9 und 10 mit geeignetem Ritterschnitt

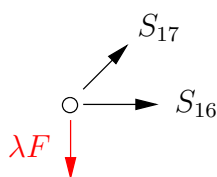


$$\curvearrowright \Sigma M_{VII} : \quad l \cdot \lambda \cdot F + 2l \cdot \lambda \cdot F + l \cdot S_8 = 0 \Rightarrow S_8 = -3\lambda \cdot F$$

$$\downarrow \Sigma V : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} S_9 + 2 \cdot \lambda F - (5\lambda - 4) \cdot F = 0 \Rightarrow S_9 = \sqrt{2} \cdot (3\lambda - 4) \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : \quad S_{10} + S_8 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_9 = 0 \Rightarrow S_{10} = 4F$$

4. Ermittlung der Stabkräfte 12-17 mit dem Knotenpunktverfahren

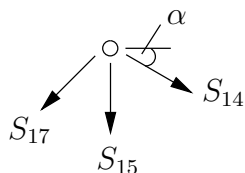


$$\uparrow \Sigma V : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{17} - \lambda \cdot F = 0$$

$$\rightarrow S_{17} = \sqrt{2} \lambda \cdot F$$

$$\rightarrow \Sigma H : \quad S_{16} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{17} = 0$$

$$\rightarrow S_{16} = -\lambda \cdot F$$

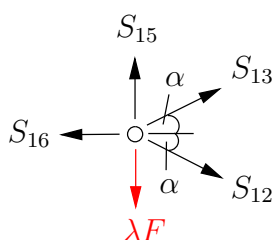


$$\rightarrow \Sigma H : \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{17} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{14} = \frac{\sqrt{5}}{2} \lambda \cdot F$$

$$\downarrow \Sigma V : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{17} + S_{15} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{14} = 0$$

$$\rightarrow S_{15} = -\frac{3}{2} \lambda \cdot F$$



$$\rightarrow \Sigma H : \quad -S_{16} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} = 0$$

$$\rightarrow S_{13} = -S_{12} - \frac{\sqrt{5}}{2} \lambda F$$

$$\downarrow \Sigma V : \quad \lambda \cdot F + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{12} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot S_{13} - S_{15} = 0$$

$$\rightarrow S_{12} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot F$$

$$\rightarrow S_{13} = \sqrt{5} \lambda \cdot F$$

5. zulässiger Wertebereich für λ

$$(5\lambda - 4) \cdot F \geq 0 \quad \rightarrow \lambda \geq \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{5} \cdot \lambda \cdot F \geq -3\sqrt{5} \cdot F \quad \rightarrow \lambda \leq 2F$$

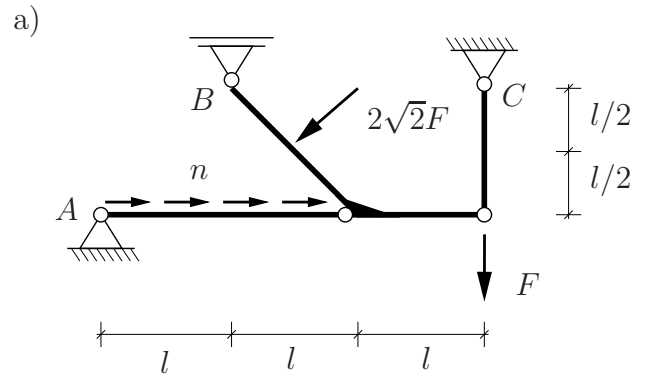
$$\Rightarrow \lambda \in \left[\frac{4}{5}, 2\right]$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Das in a) dargestellte Tragwerk wird durch zwei Einzellasten sowie eine konstante Gleichstreckenlast in Stabrichtung beansprucht.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen in den Punkten A, B und C.

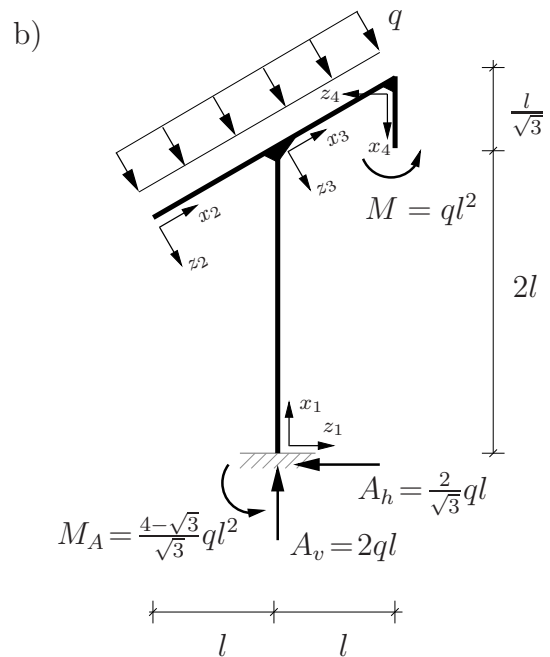
Geg.: $F, l, n = F/l$.



Das in b) dargestellte System wird durch ein Einzelmoment und eine konstante Streckenlast beansprucht. Die Auflagerreaktionen sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen im Tragwerk und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

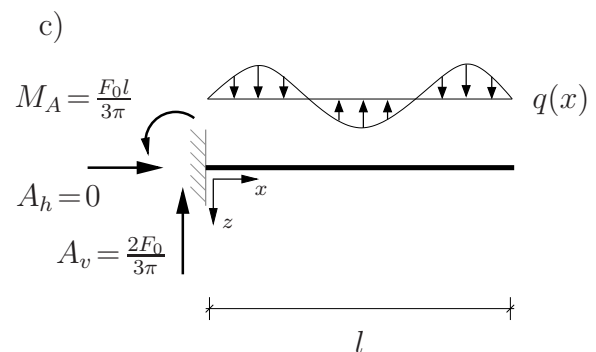
Geg.: $q, l, M = ql^2$.



Der in c) abgebildete Kragarm wird von einer veränderlichen Streckenlast $q(x)$ senkrecht zur Stabachse beansprucht. Die Auflagerreaktionen sind gegeben.

4. Bestimmen Sie die Querkraft als Funktion von x .

Geg.: $F_0, l, q(x) = \frac{F_0}{l} \sin\left(3\pi \frac{x}{l}\right)$.



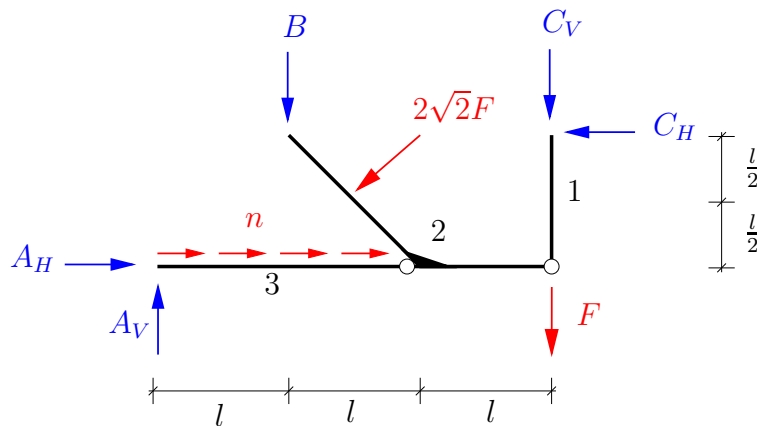
Lösung**1. statische Bestimmtheit**

$$f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$$

→ Das System ist statisch bestimmt.

2. Auflagerreaktionen in den Punkten A, B und C

Freischnitt:



Teilsystem 1:

$$\curvearrowright \Sigma M_G : -C_H \cdot l = 0 \quad \rightarrow \boxed{C_H = 0}$$

Gesamtsystem:

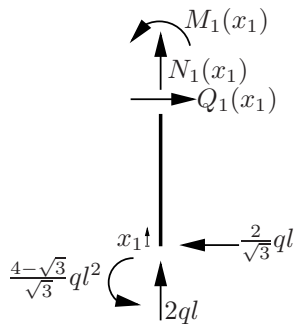
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma H : n \cdot 2l - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot F - C_H + A_H &= 0 \\ \Leftrightarrow A_H &= 2 \cdot F - 2 \cdot l \cdot n \end{aligned} \quad \rightarrow \boxed{A_H = 0}$$

Teilsystem 3:

$$\rightarrow \Sigma M_G : A_V \cdot 2l = 0 \quad \rightarrow \boxed{A_V = 0}$$

Gesamtsystem:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma M_B : -n \cdot 2l \cdot l + F \cdot 2l + C_V \cdot 2l + 2\sqrt{2}F \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{l}{2} &= 0 \quad \rightarrow \boxed{C_V = -F} \\ \downarrow \Sigma V : B_V + C_V - A_V + F + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot F &= 0 \\ \Leftrightarrow B_V &= -(-F) - F - 2F \end{aligned} \quad \rightarrow \boxed{B_V = -2F}$$

3. Schnittgrößen im Tragwerk b)**3.1 Teilsystem 1**

$$\uparrow: N_1(x_1) + 2ql = 0$$

$$\boxed{N_1(x_1) = -2ql}$$

$$\rightarrow: Q_1(x_1) - \frac{2}{\sqrt{3}}ql = 0$$

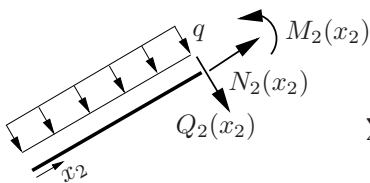
$$\boxed{Q_1(x_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}ql}$$

$$\Sigma M_S: M_1(x_1) + \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}ql - \frac{2}{\sqrt{3}}qlx_1 = 0$$

$$\boxed{M_1(x_1) = -\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}ql + \frac{2}{\sqrt{3}}ql \cdot x_1}$$

$$M_1(x_1 = 0) = -\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}ql^2$$

$$M_1(x_1 = 2l) = ql^2$$

3.2 Teilsystem 2

$$\nearrow: N_2(x_2) = 0$$

$$\boxed{N_2(x_2) = 0}$$

$$\searrow: q \cdot x_2 + Q_2(x_2) = 0$$

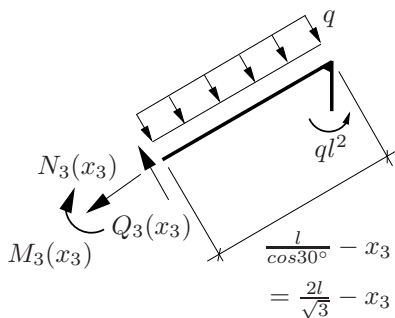
$$\boxed{Q_2(x_2) = -q \cdot x_2}$$

$$\Sigma M_S: M_2(x_2) + \frac{1}{2} \cdot q \cdot x_2^2 = 0$$

$$\boxed{M_2(x_2) = -\frac{1}{2} q \cdot x_2^2}$$

$$M_2(x_2 = 0) = 0$$

$$M_2(x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}l) = -\frac{2}{3}ql^2$$

3.3 Teilsystem 3

$$\swarrow: N_3(x_3) = 0$$

$$\boxed{N_3(x_3) = 0}$$

$$\nwarrow: -q(\frac{2l}{\sqrt{3}} - x_3) + Q_2(x_2) = 0$$

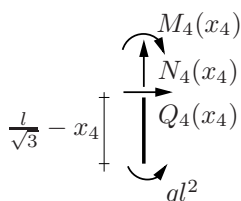
$$\boxed{Q_3(x_3) = q(\frac{2l}{\sqrt{3}} - x_3)}$$

$$\Sigma M_S: ql^2 - M_3 - \frac{1}{2} q(\frac{2l}{\sqrt{3}} - x_3)^2 = 0$$

$$\boxed{M_3(x_3) = \frac{1}{3}ql^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}qx_3 - \frac{1}{2}qx_3^2}$$

$$M_3(x_3 = 0) = \frac{1}{3}ql^2$$

$$M_3(x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}) = ql^2$$

3.4 Teilsystem 4

$$\rightarrow: Q_4(x_4) = 0$$

$$\boxed{Q_4(x_4) = 0}$$

$$\uparrow: N_4(x_4) = 0$$

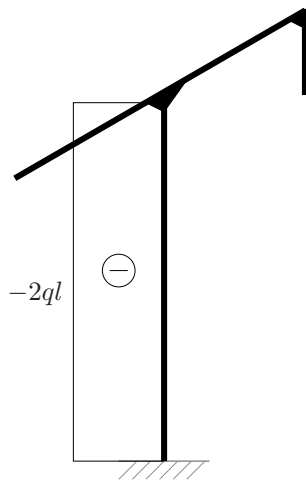
$$\boxed{N_4(x_4) = 0}$$

$$\Sigma M_S: ql^2 - M_4(x_4) = 0$$

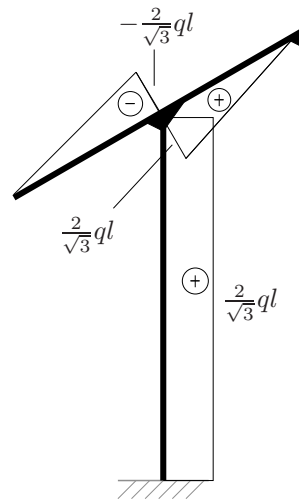
$$\boxed{M_4(x_4) = ql^2}$$

3.5 Grafische Darstellung

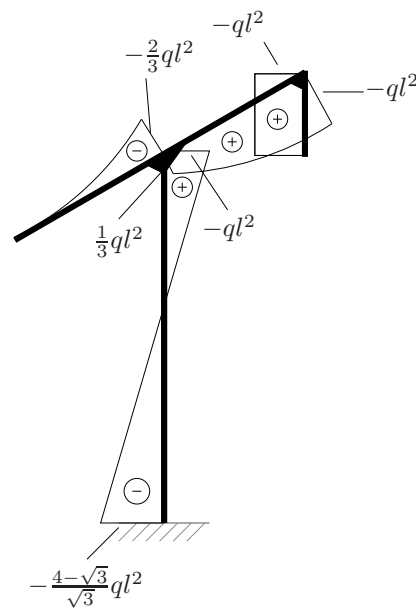
Normalkraftverlauf



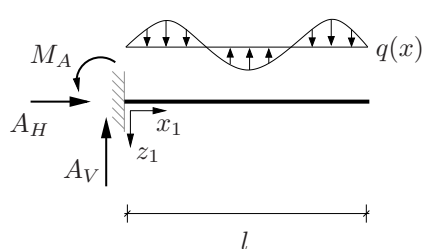
Querkraftverlauf



Momentenverlauf



4. Querkraft in Tragwerk c)



$$Q(x) = - \int q(x) dx = - \int \frac{F_0}{l} \cdot \sin(3\pi \cdot \frac{x}{l}) dx$$

$$Q(x) = \frac{F_0}{l} \cdot \frac{l}{3\pi} \cdot \cos(3\pi \cdot \frac{x}{l}) + C_1 = \frac{F_0}{3\pi} \cdot \cos(3\pi \cdot \frac{x}{l}) + C_1$$

$$RB : Q(x=l) = 0 \Leftrightarrow \frac{F_0}{3\pi} \cdot \cos(3\pi \cdot \frac{l}{l}) + C_1 = 0$$

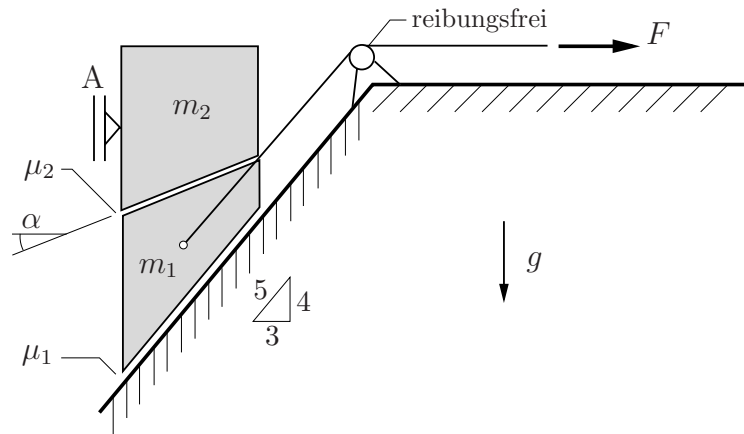
$$\Rightarrow C_1 = -\frac{F_0}{3\pi}$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{F_0}{3\pi} \cdot \cos(3\pi \cdot \frac{x}{l}) - \frac{F_0}{3\pi}$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

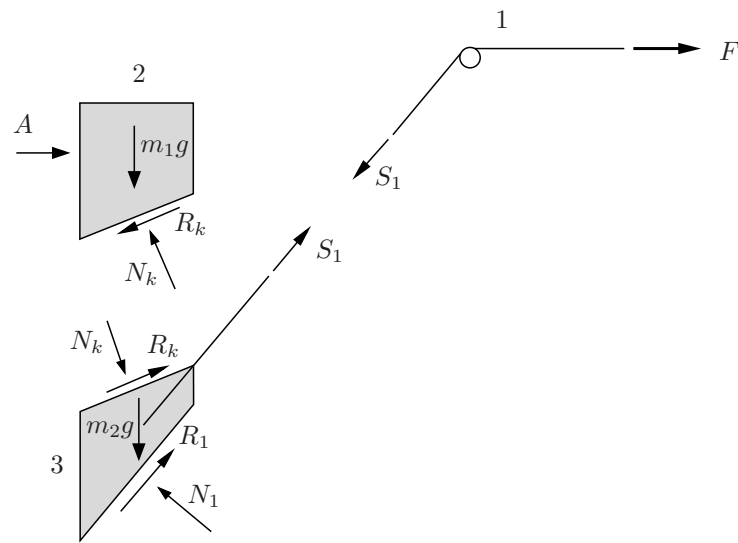
Das dargestellte System besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 und einem masselosen dehnstarren Seil, das reibungsfrei über eine Umlenkrolle geleitet wird. Das Seil ist reibungsfrei mit der Masse m_1 in dessen Schwerpunkt verbunden. Das Seil verläuft parallel zum Untergrund. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Masse m_1 und dem Untergrund beträgt μ_1 , der Haftreibungskoeffizient zwischen den Massen m_1 und m_2 beträgt μ_2 . Das System befindet sich in der gezeigten Ruhelage. Gehen Sie davon aus, dass für beide Reibflächen der Grenzfall der Haftreibung gleichzeitig erreicht wird.

1. Schneiden Sie das komplette System frei und zeichnen Sie sämtliche wirkenden Kräfte an. Betrachten Sie hierzu eine mögliche Bewegungsrichtung der Masse m_1 nach links unten. Berechnen Sie alle Kräfte in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Wie groß muss F mindestens sein, damit das System gerade in Ruhe bleibt?
2. Betrachten Sie nun die mögliche Bewegungsrichtung der Masse m_1 nach rechts oben: Zeichnen Sie einen Freischnitt mit sämtlichen Kräften und geben Sie für den Grenzfall die Reibkräfte in Abhängigkeit der Kontaktkräfte an.
3. Das Auflager in Punkt A wird jetzt entfernt. Berechnen Sie μ_2 in Abhängigkeit von α , sodass die Masse m_2 gerade in Ruhe bleibt. Berechnen Sie auch die Kontakt- und Reibkraft.



Geg.: $m_1, m_2, g, \mu_1, \mu_2, \alpha, F$

Lösung

1. Bewegungsrichtung der Masse m_1 nach links unten

TS 1:

$$\boxed{S_1 = F}$$

TS 2:

Grenzfall Bewegung nach links: $\boxed{R_k = \mu_2 \cdot N_k}$

$$\rightarrow: A = R_k \cdot \cos(\alpha) + N_k \cdot \sin(\alpha) = \mu_2 \cdot N_k \cdot \cos(\alpha) + N_k \cdot \sin(\alpha)$$

$$\uparrow: m_2 \cdot g = N_k \cdot \cos(\alpha) - R_k \cdot \sin(\alpha) = N_k \cdot \cos(\alpha) - N_k \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\boxed{N_k = \frac{m_2 \cdot g}{\cos(\alpha) - \mu_2 \cdot \sin(\alpha)}}$$

$$\boxed{A = \frac{\sin(\alpha) + \mu_2 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu_2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot m_2 \cdot g}$$

TS 3:

Grenzfall Bewegung nach links: $\boxed{R_1 = \mu_1 \cdot N_1}$

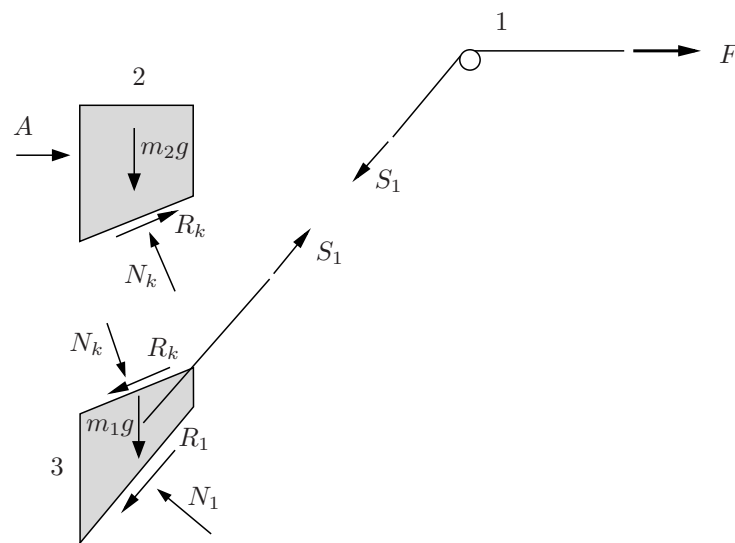
$$\uparrow: N_1 \cdot \frac{3}{5} + R_1 \cdot \frac{4}{5} + S_1 \cdot \frac{4}{5} = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g$$

$$\Leftrightarrow N_1 \cdot \frac{3}{5} + N_1 \cdot \mu_1 \cdot \frac{4}{5} + F \cdot \frac{4}{5} = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g - F \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \mu_1}}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: & -\frac{4}{5} \cdot N_1 + \frac{3}{5} \cdot R_1 + S_1 \cdot \frac{3}{5} + A = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \mu_1\right) \cdot \left(\frac{(m_1 + m_2) \cdot g - F \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \mu_1}\right) + F \cdot \frac{3}{5} + A = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}\mu_1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mu_1}\right) \cdot F = -\frac{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \mu_1}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \mu_1} \cdot (m_1 + m_2) \cdot g - A \\
 \Rightarrow & \boxed{F = \frac{\frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mu_1}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mu_1} \cdot (m_1 + m_2) \cdot g - A}{\frac{3}{5} + \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mu_1}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mu_1} \cdot \frac{4}{5}}}
 \end{aligned}$$

2. Bewegungsrichtung der Masse m_1 nach rechts oben



Grenzfall Bewegung nach rechts oben:

$$\begin{aligned}
 R_k &= \mu_2 \cdot N_k \\
 R_1 &= \mu_1 \cdot N_1
 \end{aligned}$$

3. Masse m_2 bleibt in Ruhe

Grenzfall: $R = \mu_2 \cdot N$

$$\uparrow: N \cdot \cos(\alpha) + N \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha) = m_2 \cdot g$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{m_2 \cdot g}{\cos(\alpha) - \mu_2 \cdot \sin(\alpha)}}$$

$$\rightarrow: N \cdot \sin(\alpha) - N \cdot \mu_2 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha) - \mu_2 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu_2 \cdot \sin(\alpha)} \cdot m_2 \cdot g = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) - \mu_2 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_2 = \tan(\alpha)}$$

