

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Für das dargestellte Fachwerk sollen die beiden folgenden Belastungsfälle betrachtet werden:

Fall 1: $F = 0 \text{ kN}$, $G = 30\sqrt{2} \text{ kN}$, $H = 50 \text{ kN}$

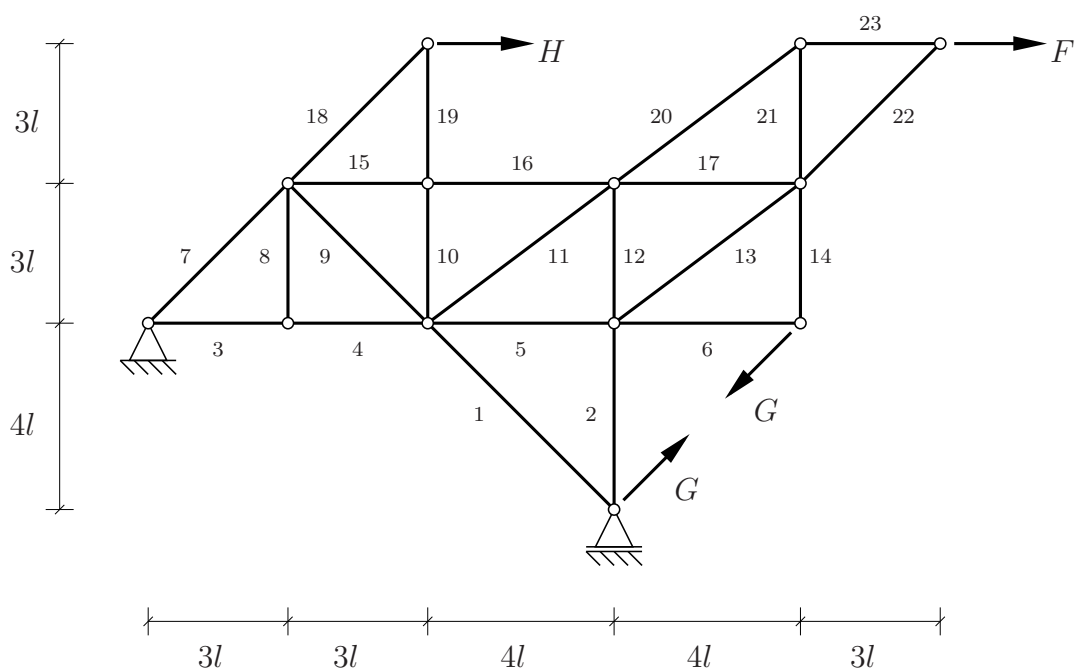
Fall 2: $F = 60 \text{ kN}$, $G = 0 \text{ kN}$, $H = 40 \text{ kN}$

1. Überprüfen Sie das System auf statische Bestimmtheit.
2. Bestimmen Sie sowohl für Fall 1 als auch für Fall 2 alle offensichtlichen Nullstäbe.

Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 5, 11 und 16

3. für den Fall 1 mit dem Knotenschnittverfahren,
4. für den Fall 2 mit Hilfe eines geeigneten Ritterschnittes.

Geg.: l , F , G , H .

**Lösung****1. Statische Bestimmtheit**

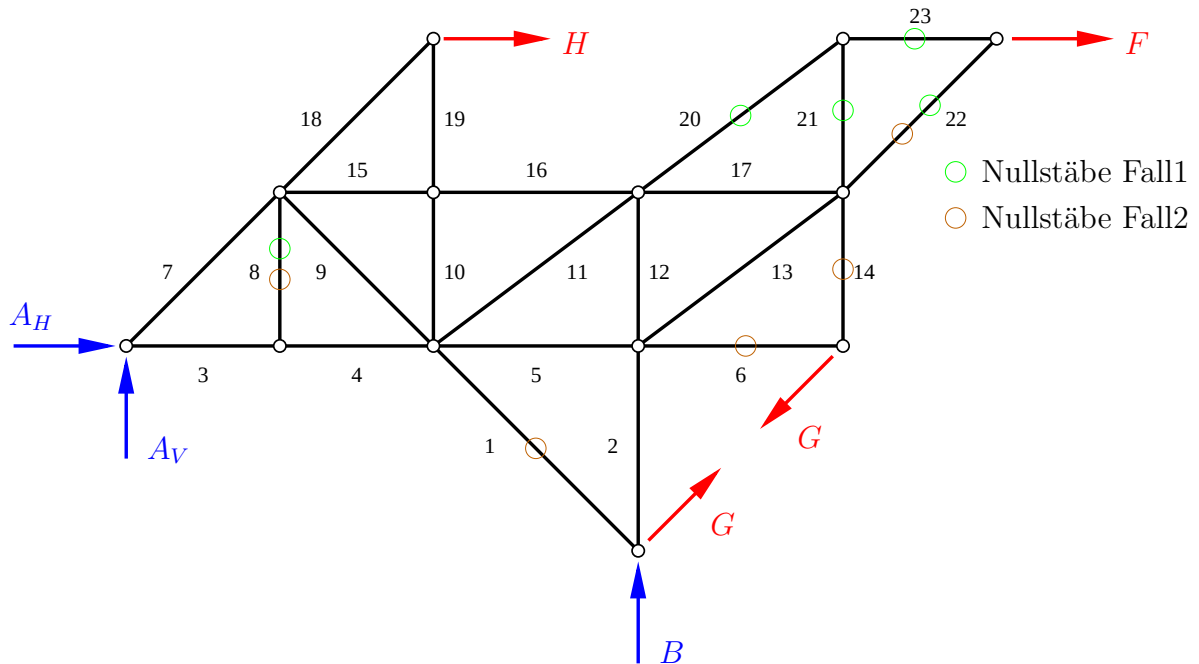
$$f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 13 - (3 + 23) = 26 - 26 = 0$$

$\Rightarrow$ Das System ist innerlich statisch bestimmt.

2. Offensichtliche Nullstäbe

Fall 1: $S_8 = S_{20} = S_{21} = S_{22} = S_{23} = 0 \text{ kN}$

Fall 2: $S_8 = S_1 = S_6 = S_{14} = S_{22} = 0 \text{ kN}$



3. Ermittlung der Kräfte in den Stäben 5, 11 und 16; Fall 1

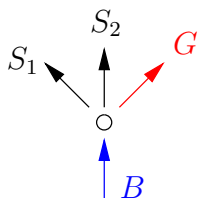
3.1 Auflagerreaktionen

$$\rightarrow \Sigma H : \quad A_H + H = 0 \quad \Rightarrow A_H = -50kN$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A : \quad B \cdot 10l - H \cdot 6l = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{6}{10}H = 30kN$$

$$\uparrow \Sigma V : \quad A_V + B = 0 \quad \Rightarrow A_V = -30kN$$

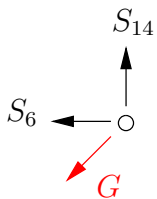
3.2 Knotengleichgewichte



$$\rightarrow \Sigma H : \quad -S_1 + G = 0$$

$$\rightarrow S_1 = 30\sqrt{2}kN$$

$$\uparrow \Sigma V : \quad B + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot G + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_1 + S_2 = 0 \quad \rightarrow S_2 = -90kN$$

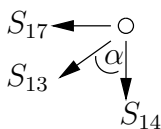


$$\uparrow \Sigma V : \quad S_{14} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot G = 0$$

$$\rightarrow S_{14} = 30kN$$

$$\rightarrow \Sigma H : \quad S_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot G = 0$$

$$\rightarrow S_6 = -30kN$$



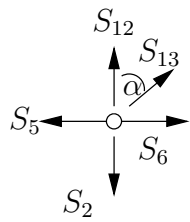
$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5}; \cos(\alpha) = \frac{3}{5}$$

$$\uparrow \Sigma V : \quad -S_{14} - \frac{3}{5} \cdot S_{13} = 0$$

$$\rightarrow S_{13} = -50kN$$

$$\rightarrow \Sigma H : \quad -S_{17} - \frac{4}{5} \cdot S_{13} = 0$$

$$\rightarrow S_{17} = 40kN$$

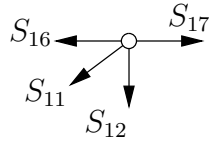


$$\uparrow \Sigma V : S_{12} + \frac{3}{5} \cdot S_{13} - S_2 = 0$$

$$\rightarrow S_{12} = -60kN$$

$$\rightarrow \Sigma H : -S_5 + S_6 + \frac{4}{5} \cdot S_{13} = 0$$

$$\rightarrow S_5 = -70kN$$



$$\uparrow \Sigma V : -S_{12} - \frac{3}{5} \cdot S_{11} = 0$$

$$\rightarrow S_{11} = 100kN$$

$$\rightarrow \Sigma H : S_{17} - S_{16} - \frac{4}{5} \cdot S_{11} = 0$$

$$\rightarrow S_{16} = -40kN$$

4. Ermittlung der Kräfte in den Stäben 5, 11 und 16; Fall 2

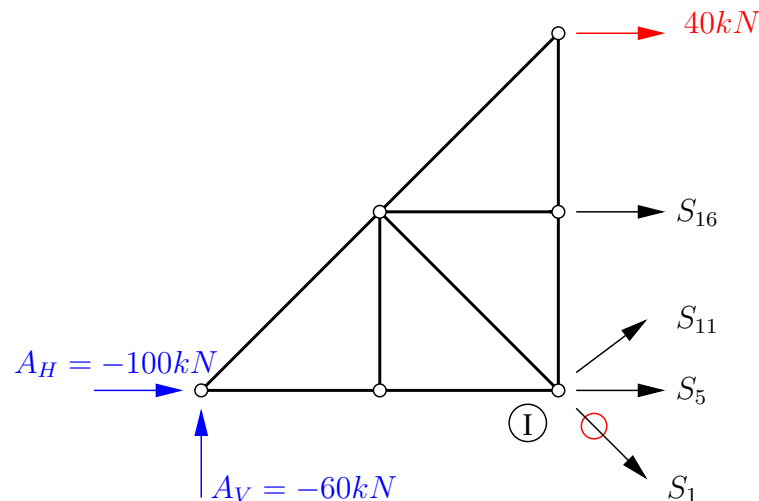
4.1 Auflagerreaktionen

$$\rightarrow \Sigma H : A_H + H + F = 0 \Rightarrow A_H = -100kN$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A : B \cdot 10l - H \cdot 6l - F \cdot 6l = 0 \Rightarrow B = \frac{6}{10}(H + F) = 60kN$$

$$\uparrow \Sigma V : A_V + B = 0 \Rightarrow A_V = -60kN$$

4.2 Ritterschnitt



$$\uparrow \Sigma V : A_V + \frac{3}{5} \cdot S_{11} = 0 \Rightarrow S_{11} = 100kN$$

$$\curvearrowright \Sigma M_I : -S_{16} \cdot 3l - H \cdot 6l - A_V \cdot 6l = 0 \Rightarrow S_{16} = 40kN$$

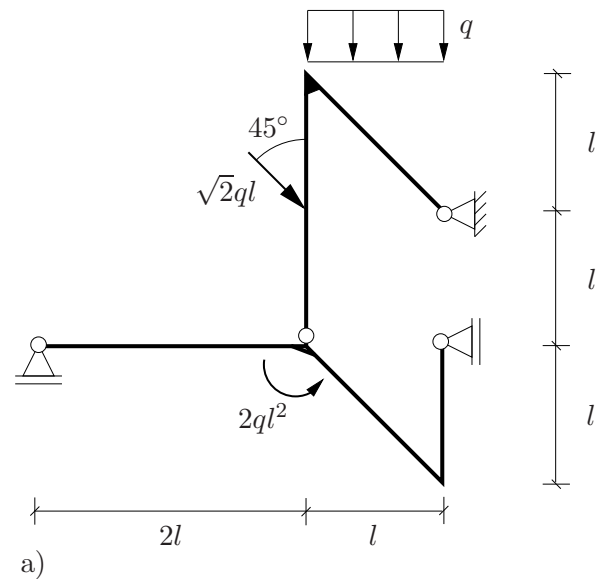
$$\rightarrow \Sigma H : A_H + S_5 + S_{16} + \frac{4}{5} \cdot S_{11} + H = 0 \Rightarrow S_5 = -60kN$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Das in a) dargestellte Tragwerk wird durch eine konstante Streckenlast q , eine Einzellast und ein Moment belastet.

1. Überprüfen Sie das Tragwerk auf statische Bestimmtheit.
2. Ermitteln Sie alle Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte.

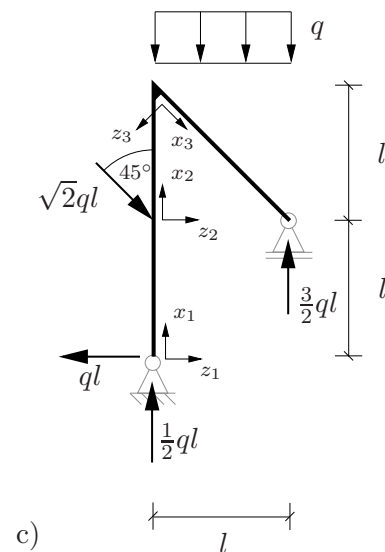
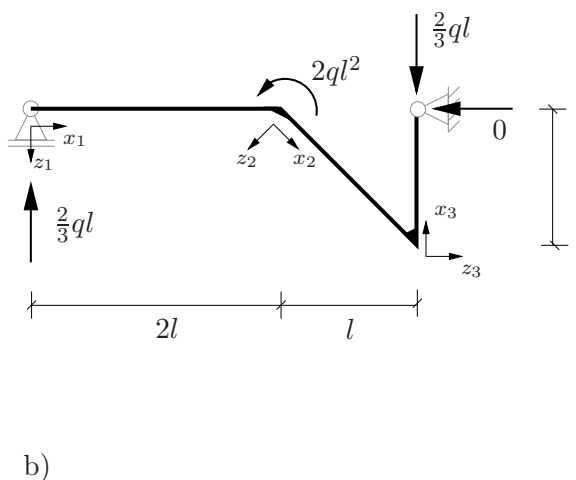
Geg.: q, l .



Die in b) und c) dargestellten Tragwerke werden durch ein Einzelmoment, eine Einzellast sowie durch eine konstante Streckenlast q belastet. Alle Auflagerreaktionen sind gegeben.

3. Bestimmen Sie sämtliche Schnittgrößen in beiden Tragwerken und stellen Sie diese unter Angabe aller Rand- und Extremwerte grafisch dar.

Geg.: q, l .

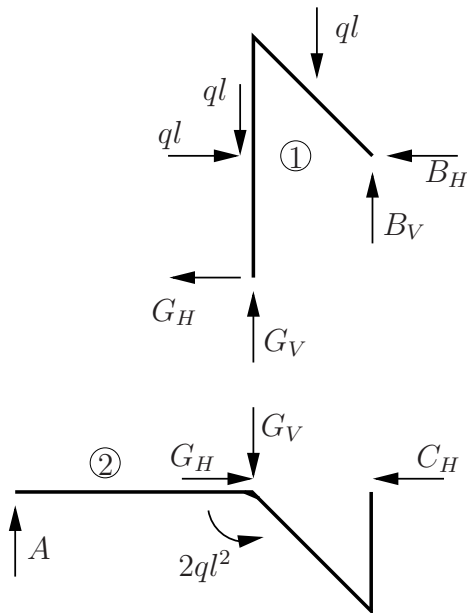
**Lösung****1. statische Bestimmtheit**

$$f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

→ Das System ist statisch bestimmt.

2. Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte

Freischnitt:



Teilsystem 2:

$$\curvearrowright \Sigma M_G : 2ql^2 - A \cdot 2l = 0 \quad \rightarrow \boxed{A = ql}$$

$$\uparrow: A_V - G_V = 0 \quad \rightarrow \boxed{G_V = ql}$$

$$\rightarrow: G_H - C_H = 0$$

Teilsystem 1:

$$\curvearrowright \Sigma M_B : -G_V \cdot l - G_H \cdot l + ql \cdot \frac{l}{2} + ql \cdot l = 0$$

$$-ql^2 + \frac{ql^2}{2} + ql^2 = G_H \cdot l$$

$$\rightarrow \boxed{G_H = \frac{ql}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{C_H = \frac{ql}{2}}$$

$$\leftarrow: G_H - ql + B_H = 0$$

$$-\frac{ql}{2} + ql = B_H$$

$$\rightarrow \boxed{B_H = \frac{ql}{2}}$$

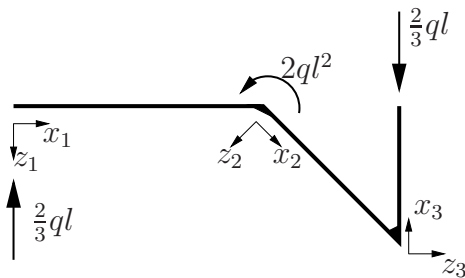
$$\uparrow: G_V - ql - ql + B_V = 0$$

$$ql - 2ql = -B_V$$

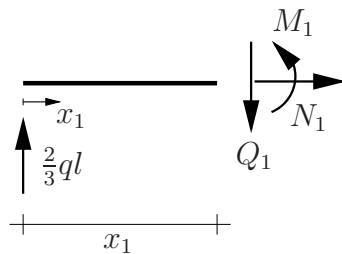
$$\rightarrow \boxed{B_V = ql}$$

3. Schnittgrößen

3.1 Tragwerk b)

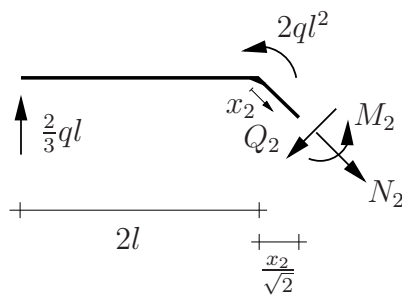


Bereich x_1 :



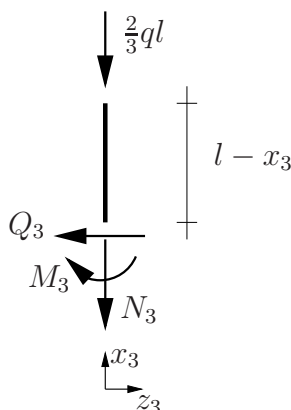
$$\begin{aligned} \uparrow: \quad & \boxed{Q_1 = \frac{2}{3}ql} \\ \rightarrow: \quad & \boxed{N_1 = 0} \\ \curvearrowright \Sigma M_S: \quad & \boxed{M_1(x_1) = \frac{2}{3}ql \cdot x_1} \\ & M_1(2l) = \frac{4}{3}ql^2 \end{aligned}$$

Bereich x_2 :



$$\begin{aligned} \nwarrow: \quad N_2 &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} ql \rightarrow \boxed{N_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} ql} \\ \nearrow: \quad Q_2 &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} ql \rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} ql} \\ \curvearrowright \Sigma M_S: \quad M_2(x_2) &= -2ql^2 + \frac{2}{3}ql \cdot (2l + \frac{x_2}{\sqrt{2}}) \\ &= -2ql^2 + \frac{4}{3}ql^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}ql \cdot x_2 \\ &\rightarrow \boxed{M_2(x_2) = -\frac{2}{3}ql^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}ql \cdot x_2} \\ M_2(0) &= -\frac{2}{3}ql^2 \\ M_2(\sqrt{2}l) &= 0 \end{aligned}$$

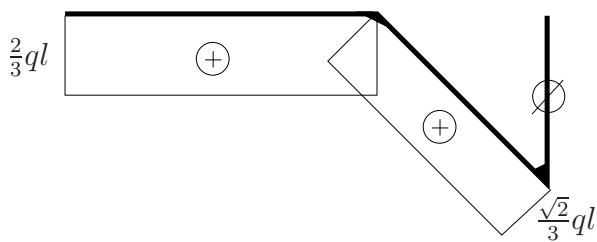
Bereich x_3 :



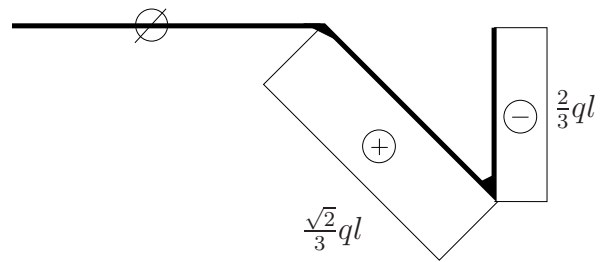
$$\begin{aligned} \uparrow: \quad & \boxed{N_3 = -\frac{2}{3}ql} \\ \rightarrow: \quad & \boxed{Q_3 = 0} \\ \curvearrowright \Sigma M_S: \quad & \boxed{M_3 = 0} \end{aligned}$$

Grafische Darstellung:

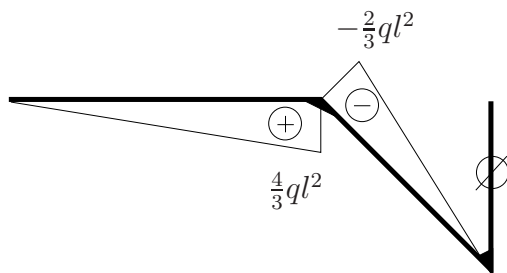
Querkraftverlauf



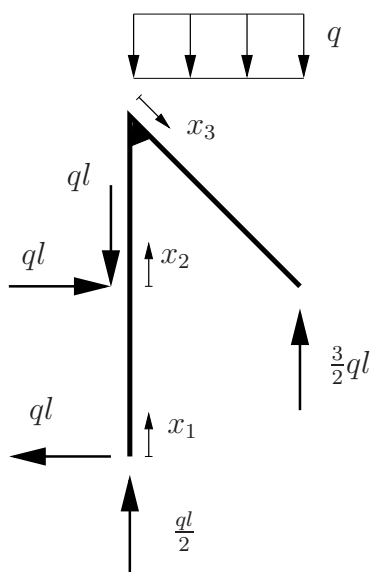
Normalkraftverlauf



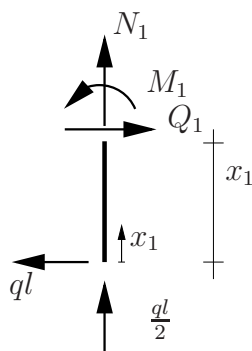
Momentenverlauf



3.2 Tragewerk c)



Bereich x_1 :



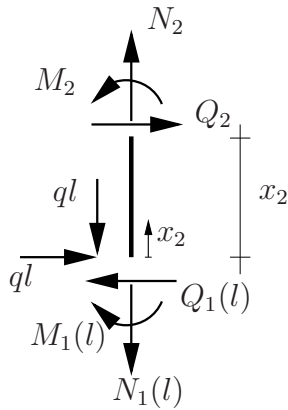
$$\rightarrow: \boxed{Q_1 = ql}$$

$$\uparrow: \boxed{N_1 = -\frac{ql}{2}}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: \boxed{M_1(x_1) = ql \cdot x_1}$$

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = ql^2$$

Bereich x_2 :

$$\downarrow: \quad N_2 = N_1(l) + ql = -\frac{ql}{2} + ql$$

$$\rightarrow \boxed{N_2 = \frac{ql}{2}}$$

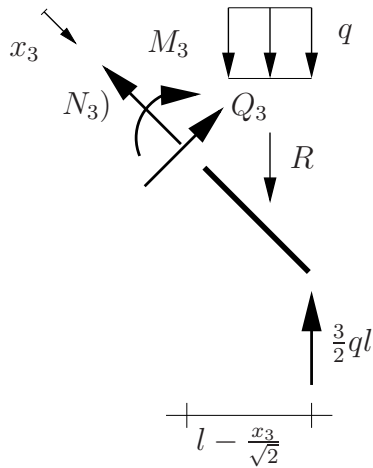
$$\leftarrow: \quad Q_2 = Q_1(l) - ql$$

$$\rightarrow \boxed{Q_2 = 0}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: \quad M_2(x_2) = M_1(l) + Q_1(l) \cdot x_2 - ql \cdot x_2$$

$$= ql^2 + ql \cdot x_2 - ql \cdot x_2$$

$$\rightarrow \boxed{M_2 = ql^2}$$

Bereich x_3 :

$$R = q \cdot \left(l - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\searrow: \quad N_3(x_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2}ql + \frac{1}{\sqrt{2}}R$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{4}ql + \frac{\sqrt{2}}{2}ql - \frac{q}{2}x_3$$

$$\rightarrow \boxed{N_3(x_3) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}ql - \frac{q}{2}x_3}$$

$$N_3(0) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}ql$$

$$N_3(\sqrt{2}l) = -\frac{3}{4}ql$$

$$\nearrow: \quad Q_3(x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2}ql$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}ql - \frac{q}{2}x_3 - \frac{3}{4}\sqrt{2}ql$$

$$\rightarrow \boxed{Q_3(x_3) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}ql - \frac{q}{2}x_3}$$

$$Q_3(0) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}ql$$

$$Q_3(\sqrt{2}l) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}ql$$

$$\curvearrowright \Sigma M_S: \quad M_3(x_3) = -R \cdot \frac{1}{2}\left(l - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2}ql\left(l - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{ql^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}qlx_3 - \frac{qx_3^2}{4} + \frac{3}{2}ql^2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}qlx_3$$

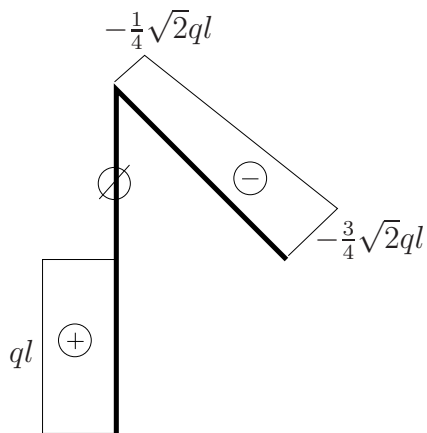
$$\rightarrow \boxed{M_3(x_3) = ql^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}qlx_3 - \frac{1}{4}qx_3^2}$$

$$M_3(0) = ql^2$$

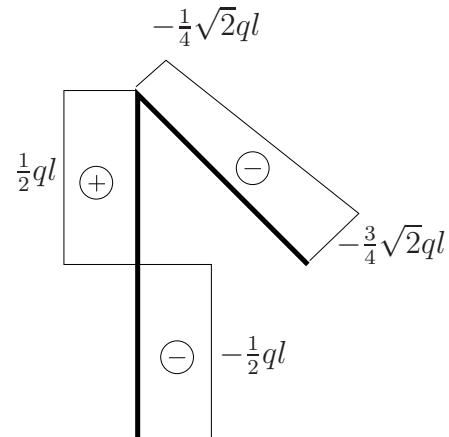
$$M_3(\sqrt{2}l) = 0$$

Grafische Darstellung:

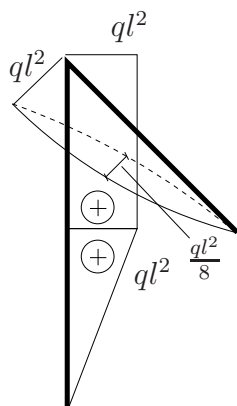
Querkraftverlauf



Normalkraftverlauf



Momentenverlauf



Aufgabe 3 (25 Punkte)

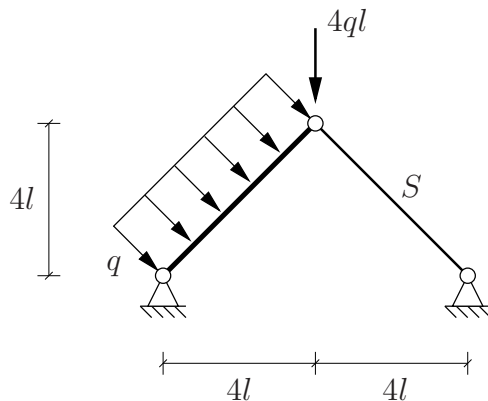
Gegeben sind die dargestellten drei Tragwerke.

- Überprüfen Sie alle Tragwerke auf statische Bestimmtheit.

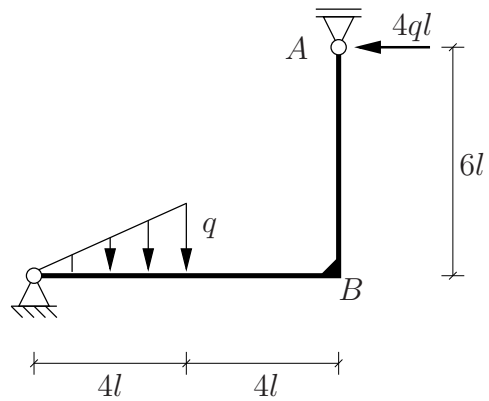
Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen

- für das Tragwerk in a) die Normalkraft im *Stab S*,
- für das Tragwerk in b) die Auflagerkraft in *A* und das Biegemoment in *B* sowie
- für das Tragwerk in c) die vertikale Auflagerkraft in *C*.

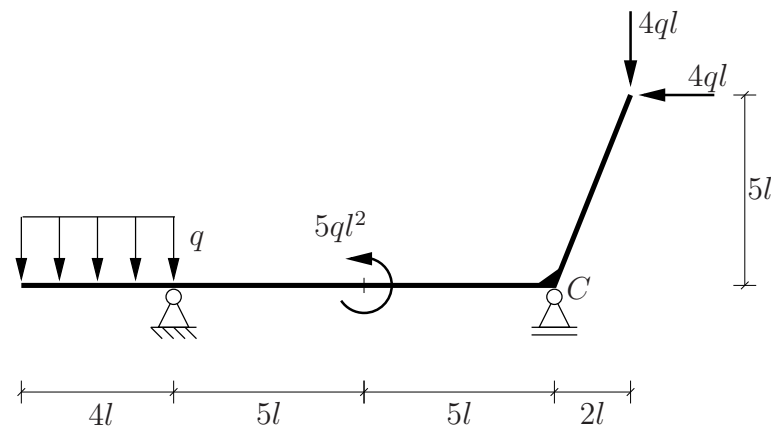
Geg.: l, q .



a)



b)



c)

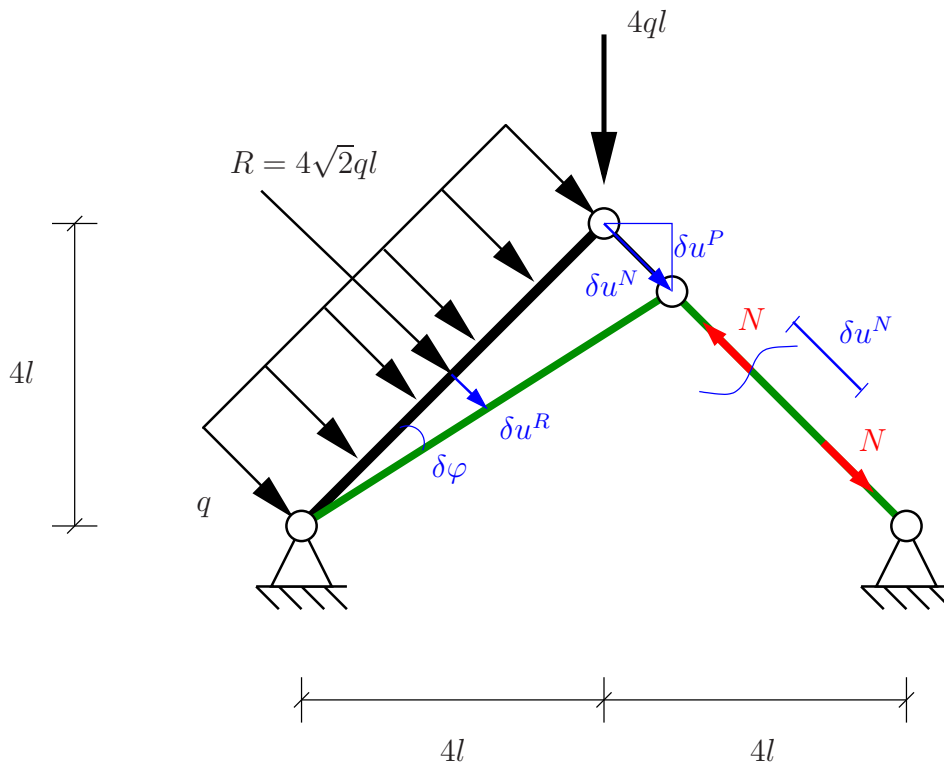
Lösung**1. Statische Bestimmtheit**

$$(a) \quad f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0 \quad \checkmark$$

$$(b) \quad f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0 \quad \checkmark$$

$$(c) \quad f = 3 \cdot n - (a + z) = 3 \cdot 1 - (3 + 0) = 0 \quad \checkmark$$

2. Tragwerk a: Normalkraft in Stab S



Kinematik:

$$\delta u^R = 2\sqrt{2}l \cdot \delta\varphi \quad \delta u^P = 4l \cdot \delta\varphi \quad \delta u^N = 4\sqrt{2}l \cdot \delta\varphi$$

PvA:

$$\delta A = N \cdot \delta u^N + 4ql \cdot \delta u^P + R \cdot \delta u^R = 0$$

$$N \cdot 4\sqrt{2}l \cdot \delta\varphi + 4ql \cdot 4l \cdot \delta\varphi + 4\sqrt{2}ql \cdot 2\sqrt{2}l \cdot \delta\varphi = 0$$

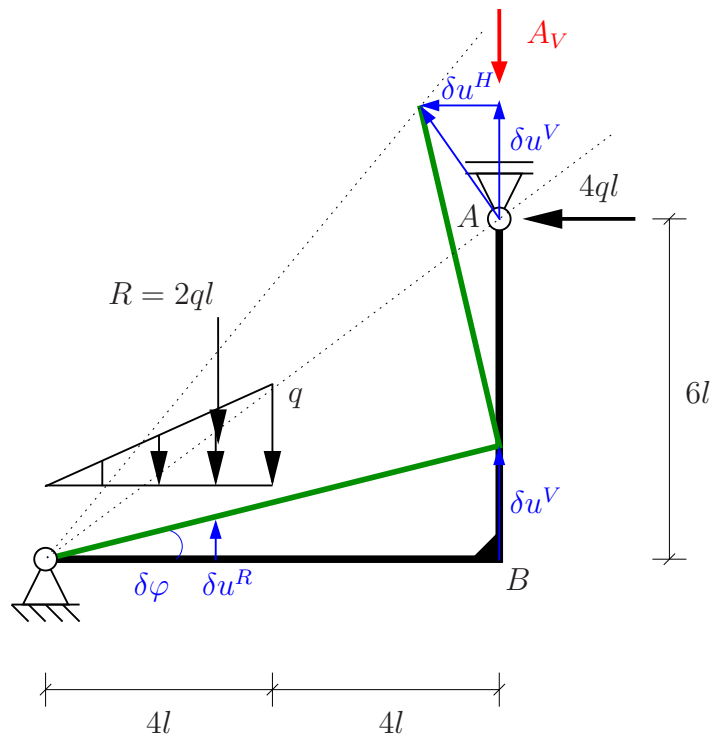
$$\delta\varphi(N \cdot 4\sqrt{2}l + 4ql \cdot 4l + 4\sqrt{2}ql \cdot 2\sqrt{2}l) = 0$$

für $\delta\varphi \neq 0$

$$N \cdot 4\sqrt{2}l + 4ql \cdot 4l + 4\sqrt{2}ql \cdot 2\sqrt{2}l = 0$$

$$\rightarrow \boxed{N = -4\sqrt{2}ql}$$

3. Tragwerk b: Vertikale Auflagerkraft in A



Kinematik:

$$\delta u^R = \frac{8}{3}l \cdot \delta\varphi \qquad \delta u^V = 8l \cdot \delta\varphi \qquad \delta u^H = 6l \cdot \delta\varphi$$

PvA:

$$\delta A = -A_V \cdot \delta u^V + 4ql \cdot \delta u^H - R \cdot \delta u^R = 0$$

$$-A_V \cdot 8l \cdot \delta\varphi + 4ql \cdot 6l \cdot \delta\varphi - 2ql \cdot \frac{8}{3}l \cdot \delta\varphi = 0$$

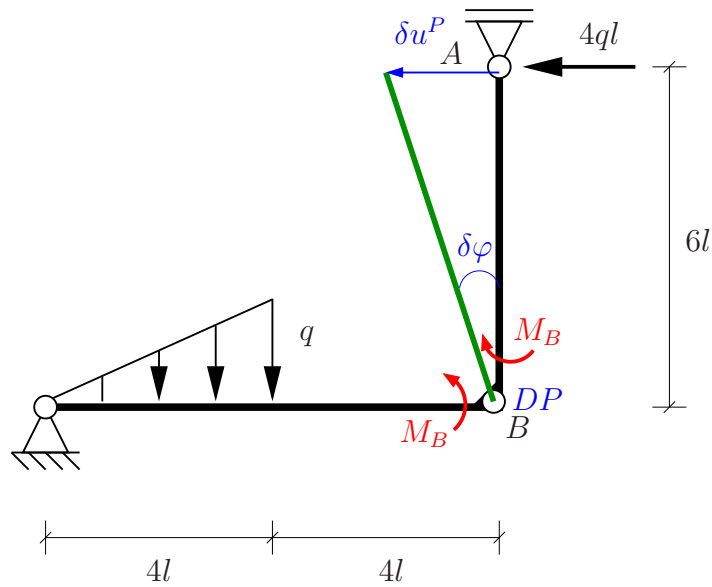
$$\delta\varphi(-8lA_V + 6l \cdot 4ql - \frac{16}{3}ql^2) = 0$$

für $\delta\varphi \neq 0$

$$-8lA_V + 6l \cdot 4ql - \frac{16}{3}ql^2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{A_V = \frac{7}{3}ql}$$

4. Tragwerk b: Biegemoment in B



Kinematik:

$$\delta u^P = 6l \cdot \delta \varphi$$

PvA:

$$\delta A = 4ql \cdot \delta u^P - M_B \cdot \delta \varphi = 0$$

$$4ql \cdot 6l \cdot \delta \varphi - M_B \cdot \delta \varphi = 0$$

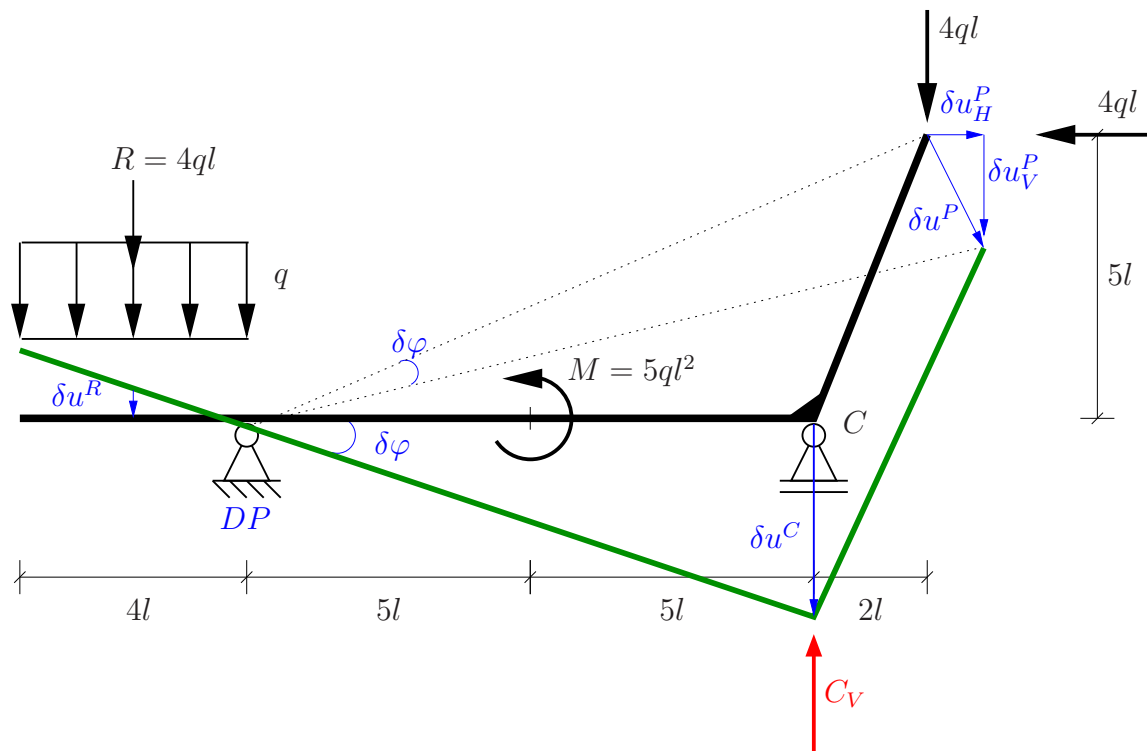
$$\delta \varphi (24ql^2 - M_B) = 0$$

für $\delta \varphi \neq 0$

$$24ql^2 - M_B = 0$$

$$\rightarrow \boxed{M_B = 24ql^2}$$

5. Tragwerk c: vertikale Auflagerkraft in C



Kinematik:

$$\delta u^R = 2l \cdot \delta \varphi \quad \delta u^C = 10l \cdot \delta \varphi$$

$$\delta u_V^P = 12l \cdot \delta \varphi \quad \delta u_H^P = 5l \cdot \delta \varphi$$

$$\delta u^P = 13l \cdot \delta \varphi$$

PvA:

$$\delta A = -C_V \cdot \delta u^C - M \cdot \delta \varphi - R \cdot \delta u^R - 4ql \cdot \delta u_H^P + 4ql \cdot \delta u_V^P = 0$$

$$-C_V \cdot 10l \cdot \delta \varphi - 5ql^2 \cdot \delta \varphi - 4ql \cdot 2l \cdot \delta \varphi - 4ql \cdot 5l \cdot \delta \varphi + 4ql \cdot 12l \cdot \delta \varphi = 0$$

$$\delta \varphi (-C_V \cdot 10l - 5ql^2 - 8ql^2 - 20ql^2 + 48ql^2) = 0$$

für $\delta \varphi \neq 0$

$$-C_V \cdot 10l - 5ql^2 - 8ql^2 - 20ql^2 + 48ql^2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{C_V = \frac{3}{2}ql}$$