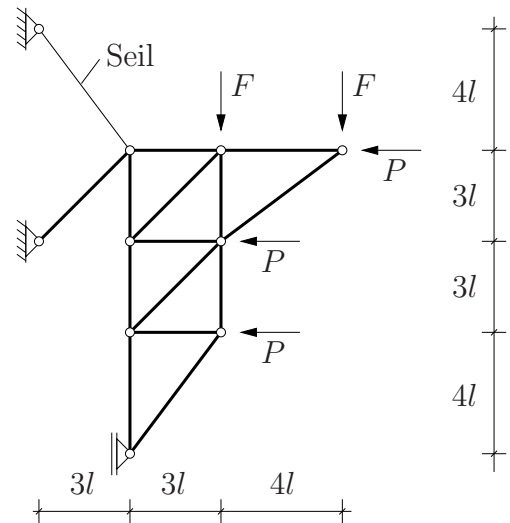


Aufgabe 1 (25 Punkte)

Das dargestellte Fachwerk wird durch einen Stab und ein dehnstarres Seil abgehängt sowie durch die Einzelkräfte F und P belastet.

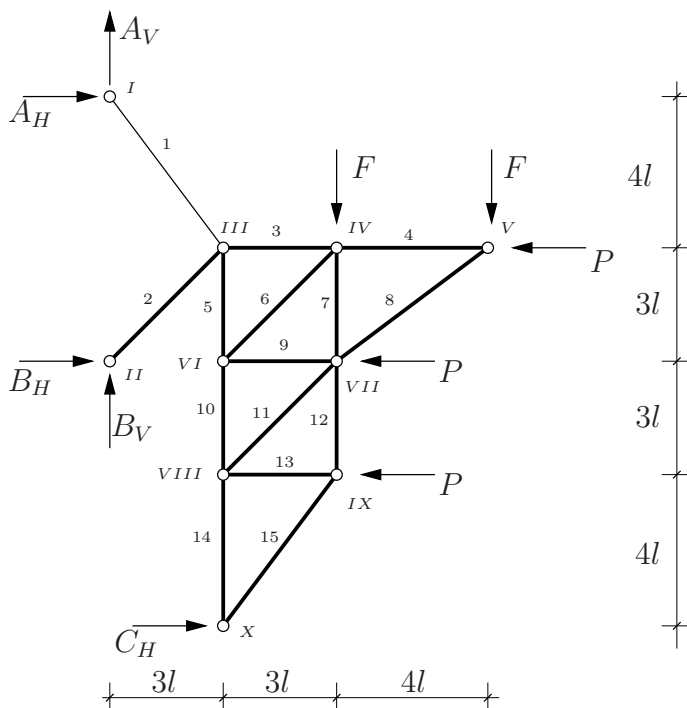
1. Überprüfen Sie das System auf äußere und innere statische Bestimmtheit.
2. Berechnen Sie die Auflagerkräfte.
3. Bestimmen Sie alle Stabkräfte. Verwenden Sie hierzu sowohl einen geeigneten Ritterchnitt als auch das Knotenpunktverfahren.
4. Bestimmen Sie die Kraft P so, dass das System nicht kinematisch wird.

Geg.: F, l .

Lösung**1. Statische Bestimmtheit**

$$f = 3n - (a + z) = 3 - 3 - (5 + 4) = 0$$

$$f = 2k - (a + s) = 2 \cdot 10 - (5 + 15) = 0$$

2. Auflagerkräfte

$$\curvearrowright_{III}^{TS3}: C_H \cdot 10l - P \cdot 6l - P \cdot 3l - F \cdot 7l - F \cdot 3l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{C_H = \frac{9}{10}P + F}$$

$$\curvearrowright_I^{GS}: B_H \cdot 7l + C_H \cdot 14l - P \cdot 7l - P \cdot 10l - P \cdot 4l - F \cdot 10l - F \cdot 6l = 0$$

$$B_H = -\frac{1}{7}\left(\frac{63}{5}P - 21P - 16F + 14F\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{B_H = \frac{6}{5}P + \frac{2}{7}F}$$

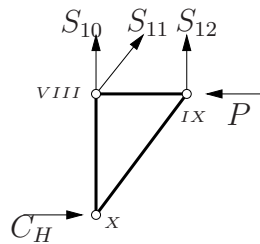
$$\rightarrow^{GS}: A_H + B_H + C_H - 3P = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_H = \frac{9}{10}P - \frac{9}{7}F}$$

$$\curvearrowright_{III}^{TS1}: A_H \cdot 4l + A_V \cdot 3l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_V = \frac{12}{7}F - \frac{6}{5}P}$$

$$\curvearrowright_{III}^{TS2}: B_H = B_V \quad \rightarrow \quad \boxed{B_V = \frac{6}{5}P + \frac{2}{7}F}$$

3. Stabkräfte

3.1 S_{10} , S_{11} , S_{12} mit Ritterschnittverfahren



$$\rightarrow: \frac{1}{\sqrt{2}}S_{11} - P + C_H = 0$$

$$S_{11} = \sqrt{2}(P - C_H)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{11} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{10}P - F\right)}$$

$$\curvearrowright_{VIII}: C_H \cdot 4l + S_{12} \cdot 3l = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{12} = -\frac{6}{5}P - \frac{4}{3}F}$$

$$\uparrow: S_{10} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{11} + S_{12} = 0$$

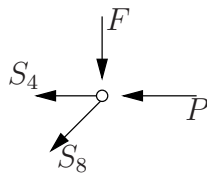
$$S_{10} = -\left(\frac{1}{10}P - F\right) - \left(-\frac{6}{5}P - \frac{4}{3}F\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{10} = \frac{11}{10}P + \frac{7}{3}F}$$

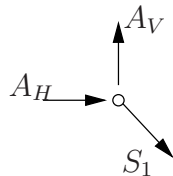
3.2 Stabkräfte mittels Knotenpunktverfahren

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{c} S_{14} \\ \uparrow \\ \text{Knoten} \\ \nearrow S_{15} \\ \leftarrow C_H \end{array} & \rightarrow: \quad \frac{3}{5}S_{15} + C_H = 0 & \rightarrow \quad \boxed{S_{15} = -\frac{3}{2}P - \frac{5}{3}F} \\ & \uparrow: \quad S_{14} + \frac{4}{5}S_{15} = 0 & \rightarrow \quad \boxed{S_{14} = \frac{6}{5}P + \frac{4}{3}F} \end{array}$$

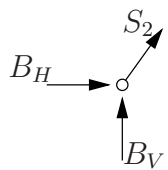
$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{c} S_{12} \\ \uparrow \\ \text{Knoten} \\ \nwarrow S_{13} \\ \swarrow S_{15} \\ \leftarrow P \end{array} & \rightarrow: \quad -S_{13} - P - \frac{3}{5}S_{15} = 0 & \\ & S_{13} = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}P + \frac{5}{3}F\right) - P & \rightarrow \quad \boxed{S_{13} = -\frac{1}{10}P + F} \end{array}$$



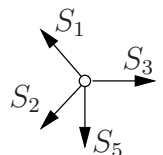
$$\begin{aligned} \uparrow: -F - \frac{3}{5}S_8 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_8 = -\frac{5}{3}F} \\ \rightarrow: -S_4 - P - \frac{4}{5}S_8 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_4 = \frac{4}{3}F - P} \end{aligned}$$



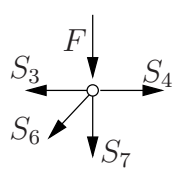
$$\uparrow: A_V - \frac{4}{5}S_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_1 = \frac{15}{7}F - \frac{3}{2}P}$$



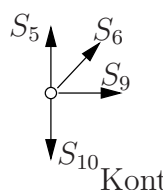
$$\uparrow: B_V + \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_2 = -\sqrt{2}\left(\frac{6}{5}P + \frac{2}{7}F\right)}$$



$$\begin{aligned} \uparrow: \frac{4}{5}S_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 - S_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_5 = 2F} \\ \rightarrow: S_3 - \frac{3}{5}S_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_3 = F - \frac{21}{10}P} \end{aligned}$$

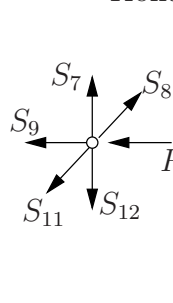


$$\begin{aligned} \rightarrow: -S_3 + S_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_6 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}F + \frac{11}{10}P\right)} \\ \uparrow: -F - S_7 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 &= 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_7 = -\frac{4}{3}F - \frac{11}{10}P} \end{aligned}$$



$$\rightarrow: S_9 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_9 = -\frac{1}{3}F - \frac{11}{10}P}$$

Kontrolle:



$$\begin{aligned} \uparrow: S_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 - S_{10} &= 2F + \frac{1}{3}F + \frac{11}{10}P - \frac{11}{10}P - \frac{7}{3}F = 0 \\ \uparrow: S_7 + \frac{3}{5}S_8 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{11} - S_{12} &= 0 \\ -\frac{4}{3}F - \frac{11}{10}P - F - \frac{1}{10}P + F + \frac{6}{5}P + \frac{4}{3}F &= 0 \\ \rightarrow: -S_9 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{11} + \frac{4}{5}S_8 - P &= \frac{1}{3}F + \frac{11}{10}P - \frac{1}{10}P + F - \frac{4}{3}F - P = 0 \end{aligned}$$

4. Kinematikbedingung

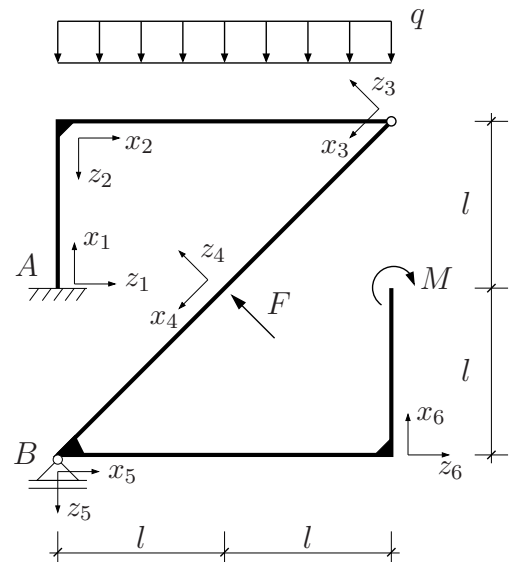
$$S_1 > 0 \quad ; \quad \frac{15}{7}F - \frac{3}{2}P > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{P < \frac{10}{7}F}$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

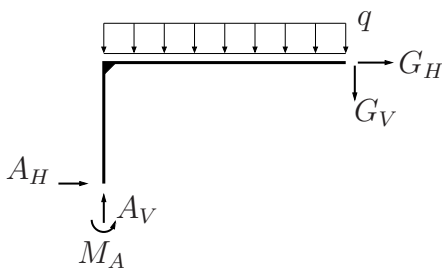
Das dargestellte Rahmentragwerk wird durch eine Streckenlast q , eine Einzelkraft F und ein Einzelmoment M belastet.

1. Zeichnen Sie einen vollständigen Freischnitt des Systems und bestimmen Sie alle Auflager- und Gelenkkräfte.
2. Berechnen Sie den Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf in Abhängigkeit der Koordinaten $\{x_i\}_{i=1,\dots,6}$ in allen Bereichen.
3. Stellen Sie diese Verläufe unter Angabe von Rand- und Extremwerten grafisch dar.

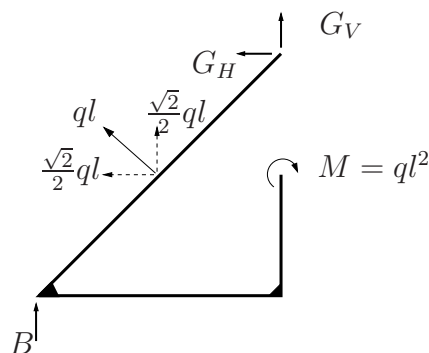
Geg.: $l, q, F = ql, M = ql^2$.

**Lösung****1. Freischnitt, Auflager- und Gelenkreaktionen****1.1 Freischnitt:**

Teilsystem 1:



Teilsystem 2:

**1.2 Auflager- und Gelenkkräfte**

Teilsystem 2:

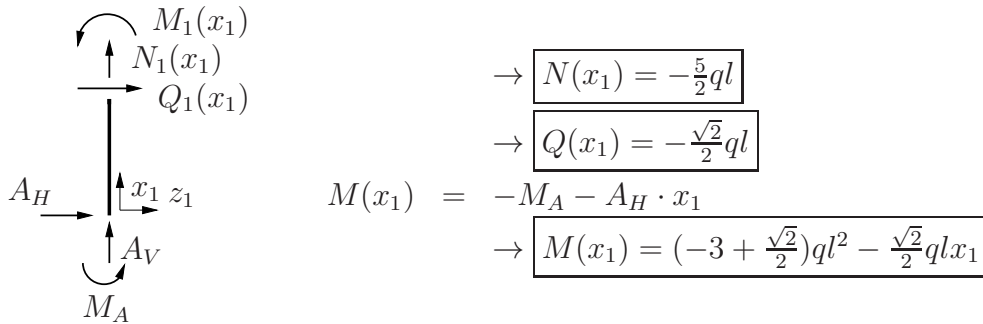
$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_G : -ql^2 - B \cdot 2l - ql \cdot \sqrt{2}l &= 0 \rightarrow \boxed{B = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)ql} \\ \uparrow : B + G_V + \frac{\sqrt{2}}{2}ql &= 0 \rightarrow \boxed{G_V = \frac{1}{2}ql} \\ \rightarrow : -G_H - \frac{\sqrt{2}}{2}ql &= 0 \rightarrow \boxed{G_H = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql} \end{aligned}$$

Teilsystem 1:

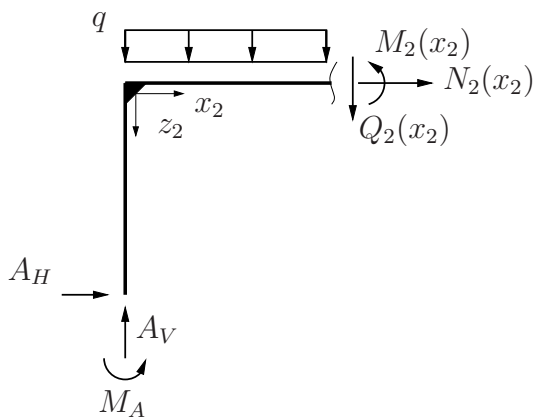
$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_A : M_A - 2ql \cdot l - \frac{1}{2}ql \cdot 2l + \frac{\sqrt{2}}{2}ql \cdot l &= 0 \rightarrow \boxed{M_A = 3ql^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}ql^2} \\ \rightarrow : A_H - \frac{\sqrt{2}}{2}ql &= 0 \rightarrow \boxed{A_H = \frac{\sqrt{2}}{2}ql} \\ \uparrow : A_V - 2ql - \frac{1}{2}ql &= 0 \rightarrow \boxed{A_V = \frac{5}{2}ql} \end{aligned}$$

2. Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf

2.1 Bereich $x_1 \in [0, l]$

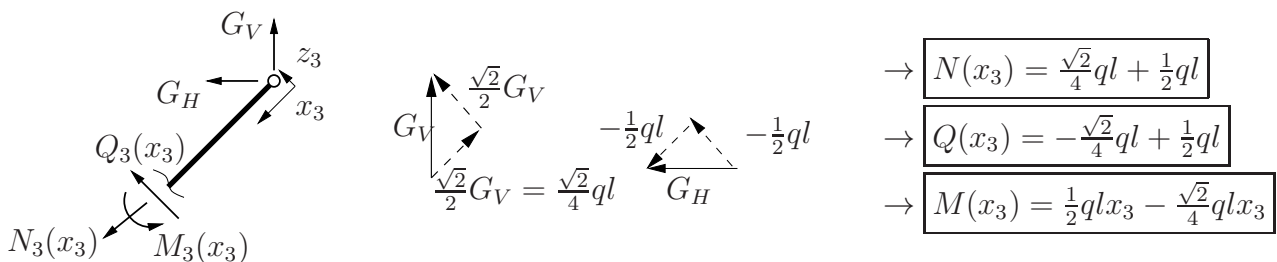


2.2 Bereich $x_2 \in [0, 2l]$

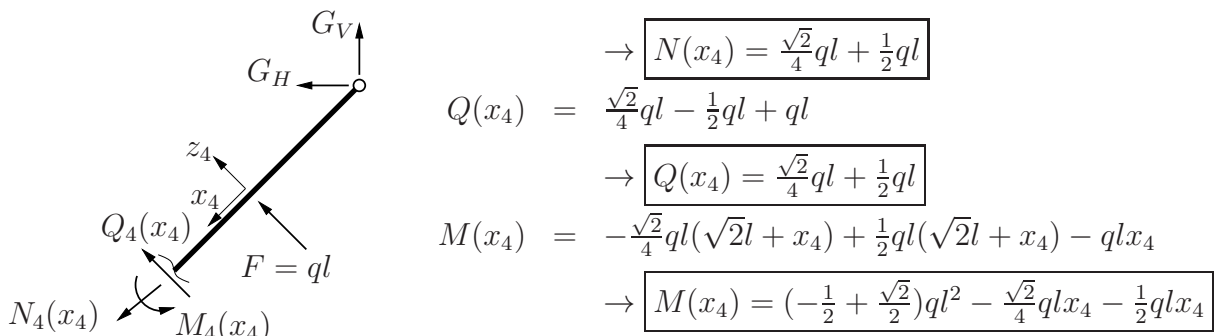


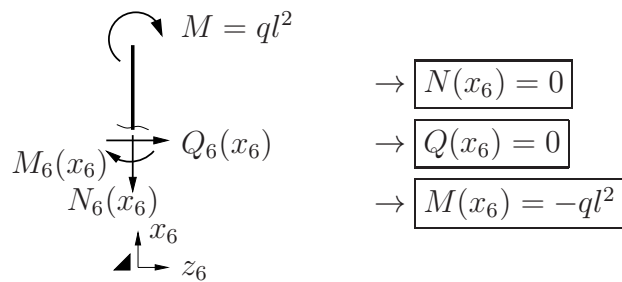
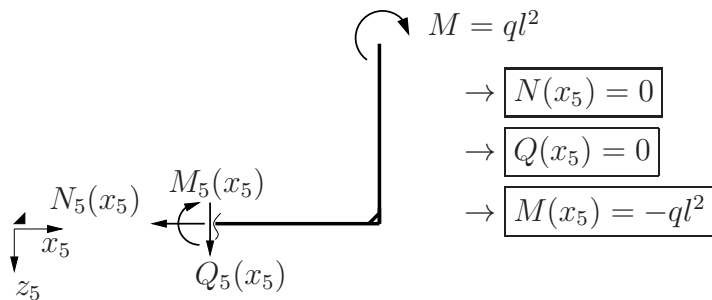
$$\begin{aligned}
 N(x_2) &= -A_H && \rightarrow \boxed{N(x_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql} \\
 Q(x_2) &= A_V - qx_2 && \rightarrow \boxed{Q(x_2) = \frac{5}{2}ql - qx_2} \\
 M(x_2) &= -3ql^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}ql^2 + \frac{5}{2}qlx_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}ql^2 - qx_2\frac{x_2}{2} && \rightarrow \boxed{M(x_2) = -3ql^2 + \frac{5}{2}qlx_2 - q\frac{x_2^2}{2}}
 \end{aligned}$$

2.3 Bereich $x_3 \in 0, \sqrt{2}l$

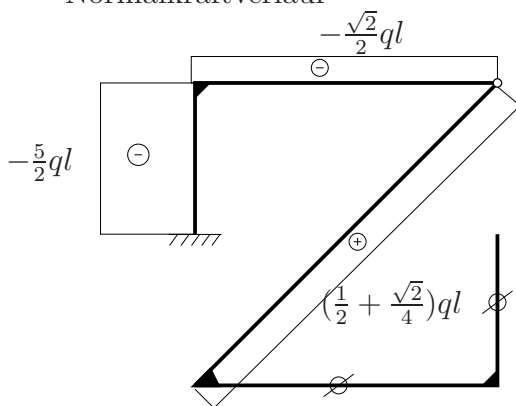


2.4 Bereich $x_4 \in 0, \sqrt{2}l$

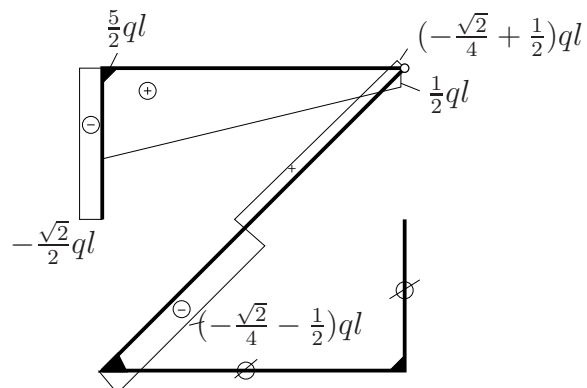


2.5 Bereich $x_6 \in 0, l$ 2.6 Bereich $x_5 \in 0, 2l$ **3. Graphische Darstellung**

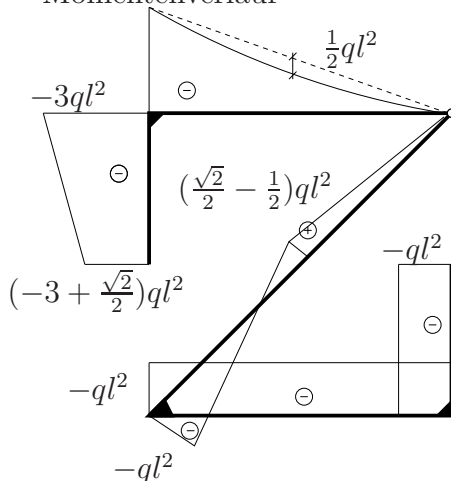
Normalkraftverlauf



Querkraftverlauf



Momentenverlauf



Aufgabe 3 (25 Punkte)

Das dargestellte System wird durch eine Streckenlast q , eine Einzelkraft F und eine Einzelkraft P belastet. Berechnen Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen

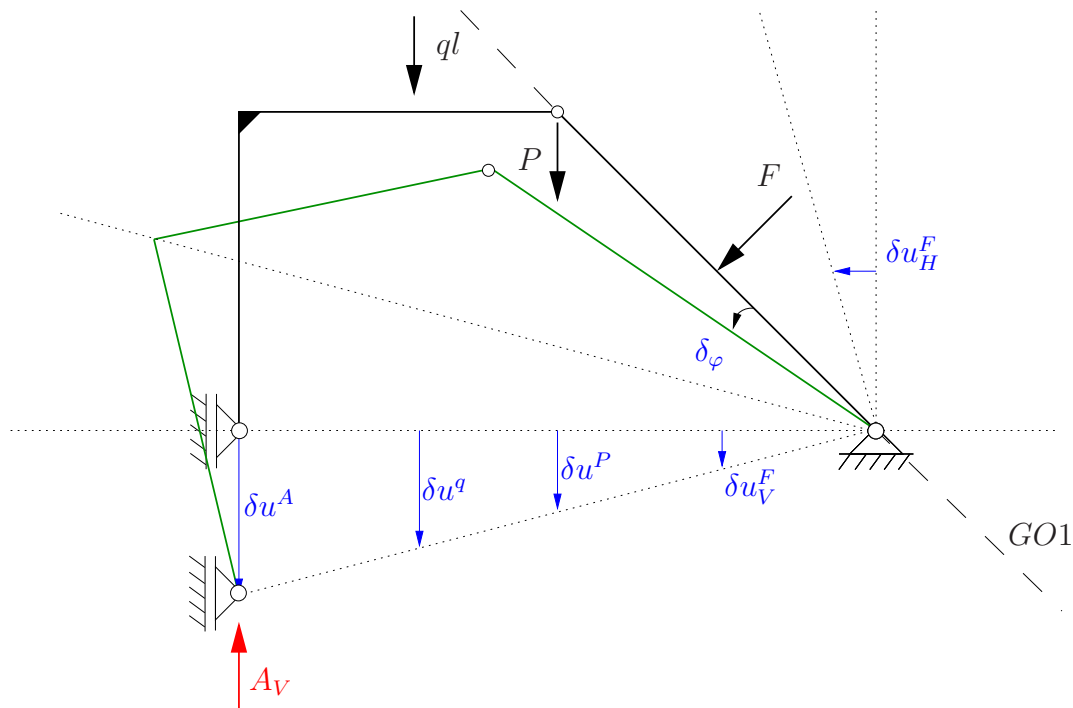
1. die vertikale Lagerkraft in A ,
2. die horizontale Lagerkraft in B und
3. das Biegemoment in C .

Geg.: l , q , F , P .

Lösung

Lösung

1. Vertikale Lagerkraft in A



Kinematik:

$$\delta u_V^F = \frac{1}{2}l \cdot \delta\varphi \quad \delta u^A = 2l \cdot \delta\varphi$$

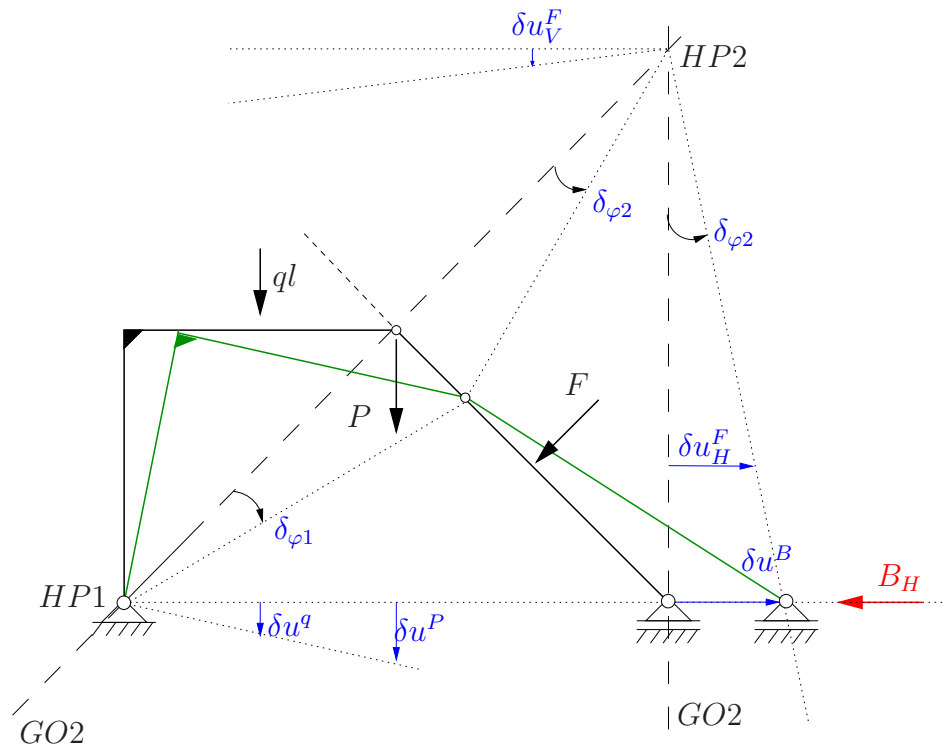
$$\delta u_H^F = \frac{1}{2}l \cdot \delta\varphi \quad \delta u^P = l \cdot \delta\varphi$$

$$\delta u^q = \frac{3}{2}l \cdot \delta\varphi$$

PvA:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= ql \cdot \delta u^q + \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot \delta u_H^F + \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot \delta u_V^F + P \cdot \delta u^P = A_v \cdot 2l \cdot \delta \varphi \\
 &= ql \cdot \frac{3}{2}l + \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}l + P \cdot l = A_v \cdot 2l \\
 &\rightarrow \boxed{A_v = \frac{\sqrt{2}}{4} F + \frac{3}{4} ql + \frac{1}{2} P}
 \end{aligned}$$

2. Horizontale Lagerkraft in B



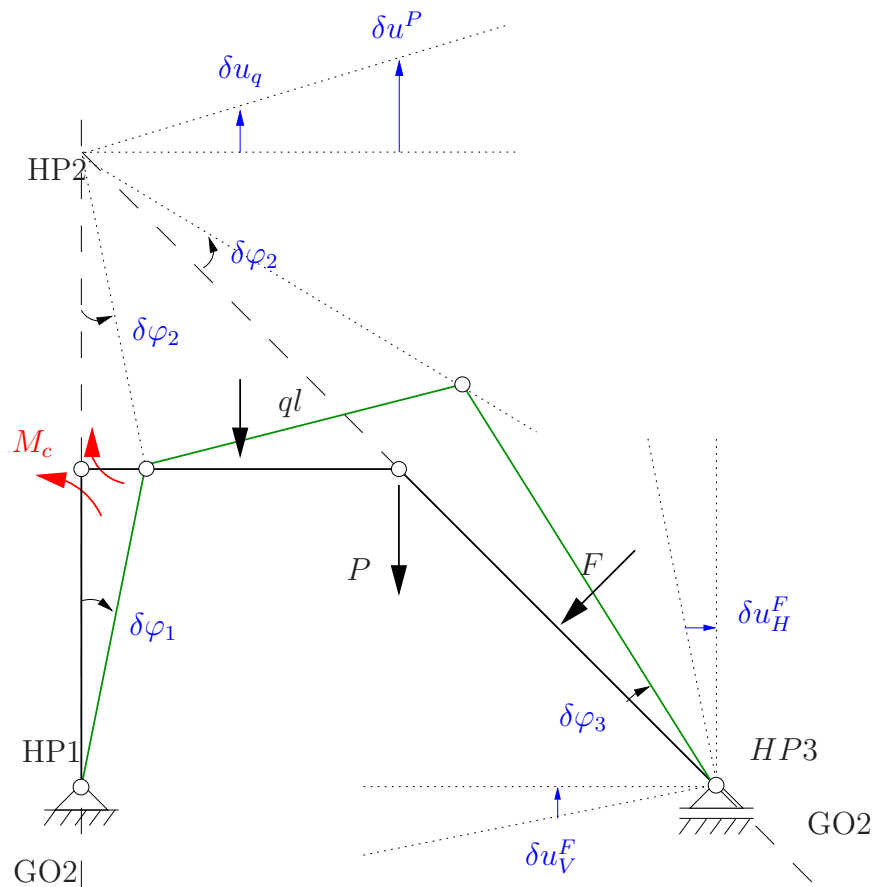
Kinematik:

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_1 &= \delta \varphi_2 & \delta u_V^F &= \frac{l}{2} \cdot \delta \varphi_2 \\
 \delta u^q &= \frac{l}{2} \cdot \delta \varphi_1 & \delta u_H^F &= \frac{3}{2} l \cdot \delta \varphi_2 \\
 \delta u^P &= l \cdot \delta \varphi_1 & \delta u_B &= 2l \cdot \delta \varphi_2
 \end{aligned}$$

PvA:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= ql \cdot \delta u_q + P \cdot \delta u_P + \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot \delta u_v^F \cdot \delta u_H^F = B \cdot \delta u^B \\
 &= ql \cdot \frac{l}{2} + P \cdot l + \frac{\sqrt{2}}{2} F \left(\frac{l}{2} - \frac{3}{2} l \right) = B \cdot 2l \\
 &\rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4} ql + \frac{1}{2} P - \frac{\sqrt{2}}{4} F}
 \end{aligned}$$

3. Biegemoment in C



Kinematik:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_1 &= \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 & \delta V_H^F &= \frac{l}{2} \delta\varphi_3 \\
 \delta u^q &= \frac{l}{2} \cdot \delta\varphi_2 & \delta u_V^F &= \frac{l}{2} \delta\varphi_3 \\
 \delta u^P &= l \cdot \delta\varphi_2
 \end{aligned}$$

PvA:

$$\begin{aligned}
 -M_c \cdot \delta\varphi_1 - M_c \cdot \delta\varphi_2 - ql \cdot \delta\varphi^q - P \cdot \delta u^P - \frac{\sqrt{2}}{2} F (\delta u_H^F + \delta u_V^F) &= 0 \\
 -2M_c - \frac{1}{2} ql^2 - Pl - \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot l &= 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{M_c = -\frac{\sqrt{2}}{4} Fl - \frac{1}{2} Pl - \frac{1}{4} ql^2}$$