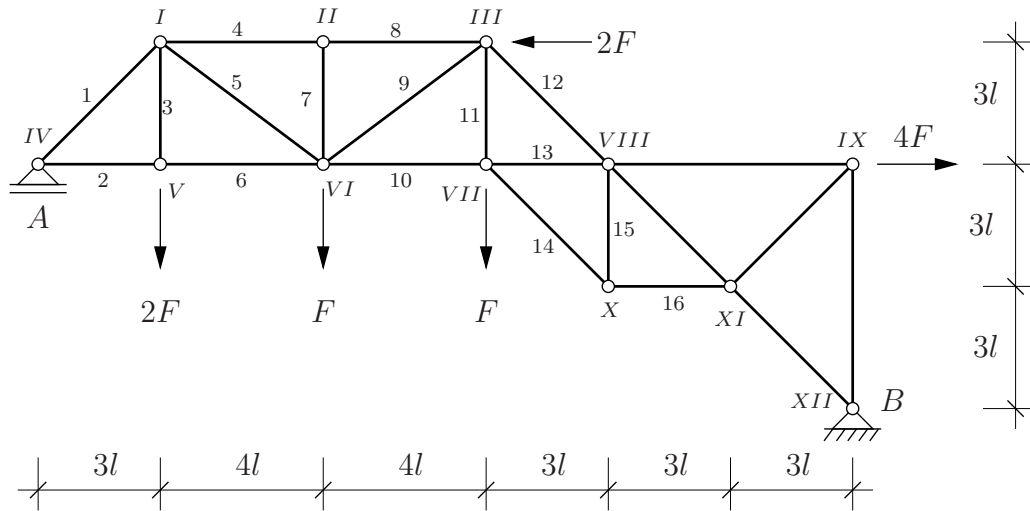


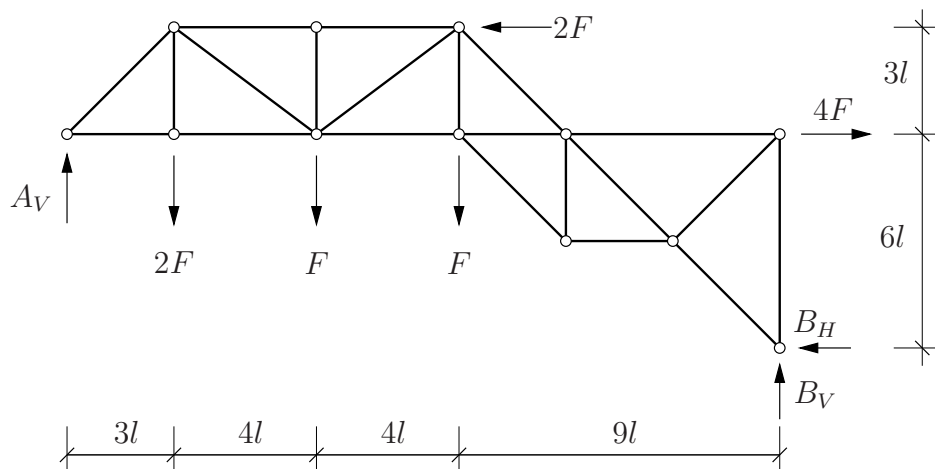
**Aufgabe 1** (25 Punkte)

Das dargestellte Fachwerk wird durch fünf Einzellasten belastet.

1. Ermitteln Sie alle offensichtlichen Nullstäbe.
2. Berechnen Sie die Auflagerkräfte.
3. Bestimmen Sie die Kräfte in den Stäben 12, 13, 14 durch einen Ritterschnitt.
4. Berechnen Sie die restlichen gekennzeichneten Stabkräfte mit dem Knotenpunktverfahren.



Geg.:  $F, l$ .

**Lösung****1. Offensichtliche Nullstäbe****2. Auflagerkräfte**

$$\curvearrowright B: -4F \cdot 6l + 2F \cdot 9l + F \cdot 9l + F \cdot 13l + 2F \cdot 17l - A_V \cdot 20l = 0$$

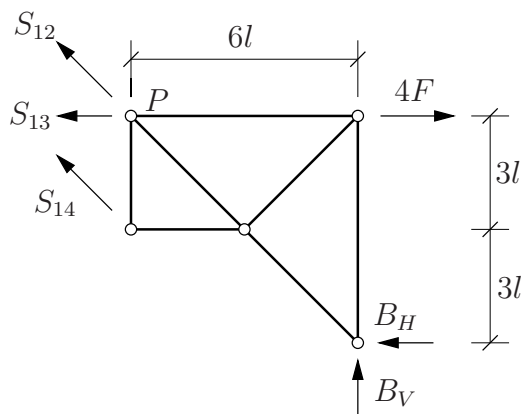
$$(-24 + 18 + 9 + 13 + 34)Fl = 20A_V l \quad \rightarrow$$

$$A_V = \frac{5}{2} F$$

$$\begin{aligned}
 \uparrow: \quad & A_V - 2F - F - F + B_V = 0 \\
 & \frac{5}{2}F - 4F + B_V = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_V = \frac{3}{2}F} \\
 \rightarrow: \quad & 4F - 2F - B_H = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_H = 2F}
 \end{aligned}$$

### 3. Stabkräfte

3.1  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{14}$  mit Ritterschnittverfahren



$$\curvearrowright P: \quad -S_{14} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3l + B_V \cdot 6l - B_H \cdot 6l = 0$$

$$S_{14} = \frac{\sqrt{2}}{3l} \left[ \frac{3}{2}F \cdot 6l - 2F \cdot 6l \right] = \frac{\sqrt{2}}{3l} [-3Fl] \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{14} = -\sqrt{2}F}$$

$$\uparrow: \quad \frac{S_{14}}{\sqrt{2}} + \frac{S_{12}}{\sqrt{2}} + B_V = 0$$

$$S_{12} = \sqrt{2} \left[ -\frac{(-\sqrt{2}F)}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}F \right] = \sqrt{2} \left( F - \frac{3}{2}F \right) \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F}$$

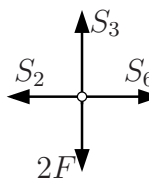
$$\rightarrow: \quad -S_{13} - \frac{S_{14}}{\sqrt{2}} - \frac{S_{12}}{\sqrt{2}} + 4F - B_H = 0$$

$$S_{13} = -\frac{(-\sqrt{2}F)}{\sqrt{2}} - \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2}F)}{\sqrt{2}} + 4F - 2F$$

$$S_{13} = F + \frac{F}{2} + 4F - 2F \quad \rightarrow \quad \boxed{S_{13} = \frac{7}{2}F}$$

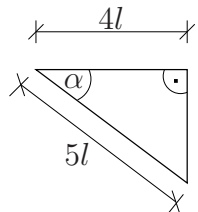
### 4. Stabkräfte mittels Knotenpunktverfahren

$$\begin{aligned}
 \uparrow: \quad & \frac{S_1}{\sqrt{2}} + A_V = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_1 = -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2}F} \\
 \rightarrow: \quad & S_2 + \frac{S_1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_2 = \frac{5}{2}F}
 \end{aligned}$$



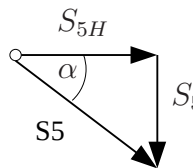
$$\uparrow: \boxed{S_3 = 2F}$$

$$\rightarrow: S_6 = S_2 \rightarrow \boxed{S_6 = \frac{5}{2}F}$$



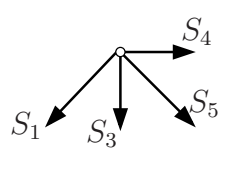
$$\cos(\alpha) = \frac{4l}{5l} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3l}{5l} = \frac{3}{5}$$



$$S_{5H} = \cos(\alpha)S_5 = \frac{4}{5}S_5$$

$$S_{5V} = \sin(\alpha)S_5 = \frac{3}{5}S_5$$

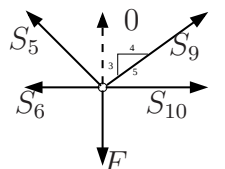


$$\downarrow: \frac{S_1}{\sqrt{2}} + S_3 + \frac{3}{5}S_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{5}{2}\sqrt{2}F) + 2F + \frac{3}{5}S_5 = 0$$

$$S_5 = \frac{5}{3} \left[ \frac{5}{2}F - 2F \right] = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}F \rightarrow \boxed{S_5 = \frac{5}{6}F}$$

$$\rightarrow: -\frac{S_1}{\sqrt{2}} + S_5 \cdot \frac{4}{5} + S_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{5}{2}\sqrt{2}F) + \frac{4}{5}(\frac{5}{6}F) + S_4 = 0$$

$$S_4 = -\left[\frac{5}{2}F + \frac{4}{6}F\right] \rightarrow \boxed{S_4 = -\frac{19}{6}F}$$

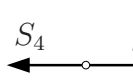


$$\uparrow: \frac{5}{3}S_5 + \frac{3}{5}S_9 - F = 0$$

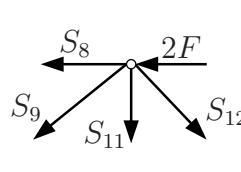
$$S_9 = -\frac{5}{3} \left[ \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}F\right) - F \right] = -\frac{5}{3} \left[ -\frac{1}{2}F \right] \rightarrow \boxed{S_9 = \frac{5}{6}F}$$

$$\rightarrow: -S_5 \cdot \frac{4}{5} + S_9 \cdot \frac{4}{5} - S_6 + S_{10} = 0$$

$$S_{10} = - \left[ -\frac{5}{6}F \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{6}F \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{2}F \right] \rightarrow \boxed{S_{10} = \frac{5}{2}F}$$

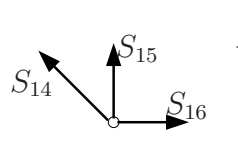


$$\rightarrow: -S_4 + S_8 = 0 \rightarrow \boxed{S_8 = -\frac{19}{6}F}$$



$$\downarrow: S_9 \frac{3}{5} + \frac{S_{12}}{\sqrt{2}} + S_{11} = \frac{5}{6}F \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}F\right) \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{11} = 0$$

$$S_{11} = -\left[\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}F\right] \rightarrow \boxed{S_{11} = 0}$$



$$\rightarrow: S_{16} - \frac{S_{14}}{\sqrt{2}} = S_{16} - (-\sqrt{2}F) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow \boxed{S_{16} = -F}$$

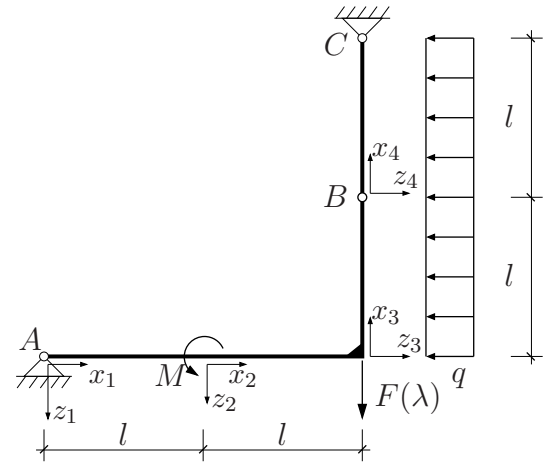
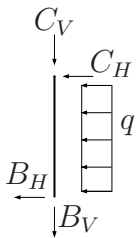
$$\uparrow: \frac{S_{14}}{\sqrt{2}} + S_{15} = (-\sqrt{2}F) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{15} = 0 \rightarrow \boxed{S_{15} = F}$$

**Aufgabe 2** (25 Punkte)

Das dargestellte System wird durch eine Streckenlast  $q$ , eine Einzelkraft  $F(\lambda)$  und ein Einzelmoment  $M$  belastet.

1. Berechnen Sie alle Auflager- und Gelenkreaktionen in  $A$ ,  $B$  und  $C$ .
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der elementaren Schnittmethode unter Verwendung der lokalen Koordinaten alle Schnittgrößen in Abhängigkeit von  $\lambda$  und stellen Sie deren Verläufe für  $\lambda = 2$  unter Angabe von Rand- und Extremwerten graphisch dar.
3. Wie groß muss  $\lambda$  sein, damit die Normalkraft im gesamten System konstant ist?

**Geg.:**  $l$ ,  $q$ ,  $F(\lambda) = \lambda \cdot ql$ ,  $M = ql^2$ .

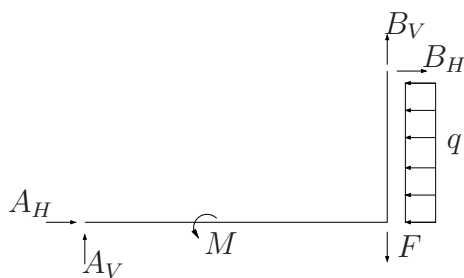
**Lösung****1. Auflager- und Gelenkreaktionen**

$$\uparrow : C_V = -B_V$$

$$\rightarrow : C_H = -ql - B_H$$

$$\curvearrowright C : \frac{1}{2}ql^2 + B_H \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_H = -\frac{1}{2}ql}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{C_H = -\frac{1}{2}ql}$$



$$\curvearrowright A : M_0 + ql \cdot \frac{l}{2} + B_V \cdot 2l = B_H \cdot l + F \cdot 2l$$

$$ql^2 + \frac{1}{2}ql^2 + 2B_V \cdot l = -\frac{1}{2}ql^2 + 2ql^2 \cdot \lambda$$

$$2B_V \cdot l = -2ql^2 + 2ql^2 \cdot \lambda$$

$$\rightarrow \quad \boxed{B_V = ql \cdot \lambda - ql}$$

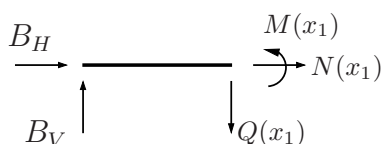
$$\rightarrow \quad \boxed{C_V = -ql \cdot \lambda + ql}$$

$$\uparrow : A_V = F - B_V = \lambda \cdot ql - \lambda \cdot ql + ql$$

$$\rightarrow \quad \boxed{A_V = ql}$$

$$\rightarrow : A_H = ql - B_H = ql + \frac{1}{2}ql$$

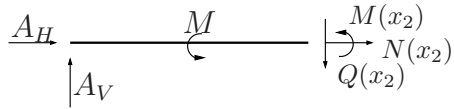
$$\rightarrow \quad \boxed{A_H = \frac{3}{2}ql}$$

**2. Schnittgrößen**

$$N(x_1) = -A_H \rightarrow \quad \boxed{N(x_1) = -\frac{3}{2}ql}$$

$$Q(x_1) = A_V \rightarrow \quad \boxed{Q(x_1) = ql}$$

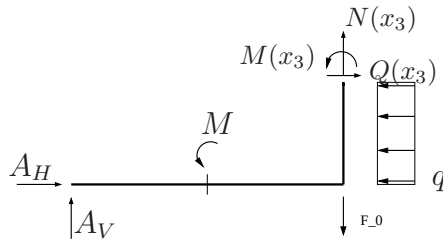
$$M(x_1) = A_V x_1 \rightarrow \quad \boxed{M(x_1) = qlx_1}$$



$$N(x_2) = -A_H \rightarrow \boxed{N(x_2) = -\frac{3}{2}ql}$$

$$Q(x_2) = A_V \rightarrow \boxed{Q(x_2) = ql}$$

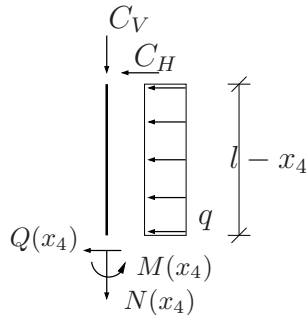
$$M(x_2) = A_V \cdot (l + x_2) - M \\ = ql^2 + qlx_2 - ql^2 \rightarrow \boxed{M(x_2) = qlx_2}$$



$$N(x_3) = F - A_V = \lambda \cdot ql - ql \\ \rightarrow \boxed{N(x_3) = ql \cdot (\lambda - 1)}$$

$$Q(x_3) = qx_3 - A_H \\ \rightarrow \boxed{Q(x_3) = qx_3 - \frac{3}{2}ql}$$

$$M(x_3) = qx_3 \cdot \frac{1}{2}x_3 - M + A_V 2l - A_H x_3 \\ = \frac{1}{2}qx_3^2 - ql^2 + 2ql^2 - \frac{3}{2}qlx_3 \\ \rightarrow \boxed{M(x_3) = \frac{1}{2}qx_3^2 - \frac{3}{2}qlx_3 + ql^2}$$

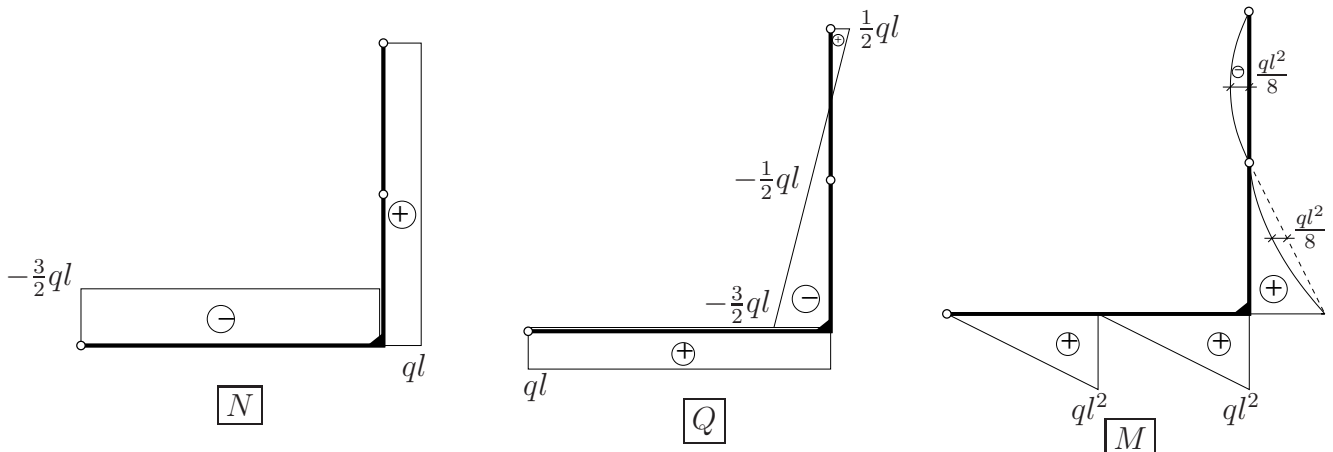


$$N_4(x_4) = -C_v \\ \rightarrow \boxed{N_4(x_4) = ql \cdot \lambda - ql}$$

$$Q_4(x_4) = -C_H - q(l - x_4) = \frac{1}{2}ql - ql + qx_4 \\ \rightarrow \boxed{Q_4(x_4) = -\frac{1}{2}ql + qx_4}$$

$$M_4(x_4) = C_H(l - x_4) + \frac{1}{2}q(l - x_4)^2 \\ = -\frac{1}{2}ql^2 + \frac{1}{2}qlx_4 + \frac{1}{2}ql^2 - qlx_4 + \frac{1}{2}qx_4^2 \\ \rightarrow \boxed{M_4(x_4) = \frac{1}{2}qx_4^2 - \frac{1}{2}qlx_4}$$

Graphische Darstellung für  $\lambda = 2$



### 3. Konstante Normalkraft im Gesamten System

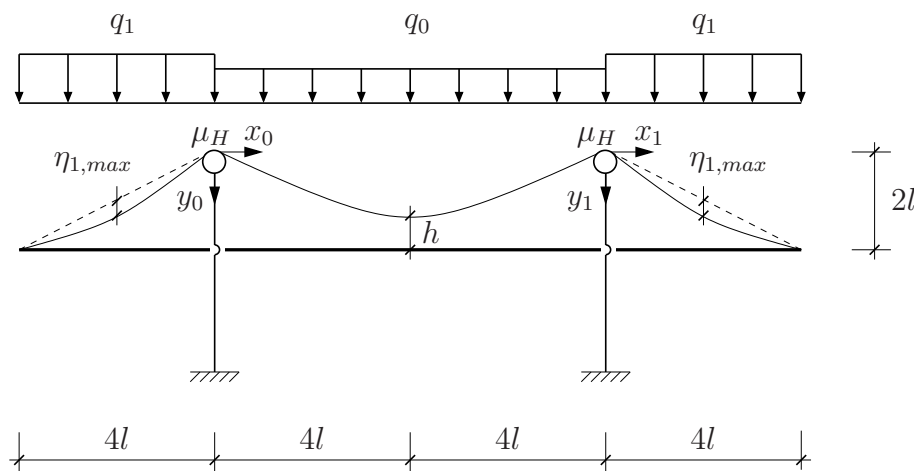
$$N_1(x_1) = N_2(x_2) = -\frac{3}{2}ql$$

$$N_3(x_3) = N_4(x_4) = (\lambda - 1)ql = -\frac{3}{2}ql \rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}}$$

**Aufgabe 3** (25 Punkte)

Dargestellt ist eine Hängebrücke bestehend aus 3 Feldern. Das Seil wird im mittleren Feld durch die konstante Streckenlast  $q_0$  und in den beiden äußeren Feldern durch die konstanten Streckenlasten  $q_1$  belastet. An den beiden Pylonen wird das Tragseil über einen kreisförmigen Umlenksattel geführt, dort verhindert Haftung mit  $\mu_H$  eine Bewegung des Seils. Die minimale lichte Höhe in Feldmitte beträgt  $h$ , der maximale Durchhang der äußeren Felder  $\eta_{1,max}$ .

1. Berechnen Sie die Gleichungen der Seillinien  $y_0(x_0)$  und  $y_1(x_1)$  in den dargestellten Koordinatensystemen sowie die Horizontalzüge  $H_0$  und  $H_1$ .
2. Ermitteln Sie die Seilkräfte  $S_0$  und  $S_1$  in Abhängigkeit der jeweiligen Streckenlasten am Pylonkopf.
3. Wie groß ist die Normalkraft in den beiden Pylonen?
4. Für welches Verhältnis der beiden Streckenlasten haftet das Seil am Umlenksattel unter Berücksichtigung der Reibung?



**Geg.:**  $q_0, q_1, l, h = 0.5l, \eta_{1,max} = 0.5l, \mu_H$ .

**Lösung****1. Gleichung der Seillinien****1.1 Gleichung der Seillinie  $y_0(x_0)$** 

$$\begin{aligned}
 y_0'' &= -\frac{1}{H} \cdot q_0 \\
 y_0' &= -\frac{1}{H} \cdot q_0 \cdot x_0 + C_1 \\
 y_0 &= -\frac{1}{2H} \cdot q_0 \cdot x_0^2 + C_1 \cdot x_0 + C_2
 \end{aligned}$$

**1.2 Randbedingungen**

$$y(0) = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$y(8l) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2H} \cdot q_0 \cdot 64l^2 + C_1 \cdot 8l = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{H} \cdot 4q_0 \cdot l}$$

$$\begin{aligned}
 y_0(4l) &= \frac{3}{2}l \rightarrow -\frac{1}{2H} \cdot q_0 \cdot 16l^2 + \frac{1}{H} \cdot 4q_0l \cdot 4l = \frac{3}{2}l \\
 &\quad -8q_0 \cdot l + 16q_0 \cdot l = \frac{3}{2}H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8q_0 \cdot l &= \frac{3}{2}H \Rightarrow \boxed{H = \frac{16}{3}q_0 \cdot l} \\
 y_0(x_0) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16q_0 l} \cdot q_0 \cdot x_0^2 + \frac{3}{16q_0 l} \cdot 4q_0 \cdot l \cdot x_0 \\
 &\Rightarrow \boxed{y_0(x_0) = -\frac{3}{32} \cdot \frac{1}{l} \cdot x_0^2 + \frac{3}{4} \cdot x_0}
 \end{aligned}$$

1.3 Gleichung der Seilkurve  $y_1(x_1)$ 

$$\begin{aligned}
 y_1'' &= -\frac{1}{H} \cdot q_1 \\
 y_1' &= -\frac{1}{H} \cdot q_1 \cdot x_1 + C_3 \\
 y_1 &= -\frac{1}{2H} \cdot q_1 \cdot x_1^2 + C_3 \cdot x_1 + C_4
 \end{aligned}$$

## 1.4 Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 y_1(0) &= 0 \rightarrow \boxed{C_4 = 0} \\
 y_1(4l) &= 2l \rightarrow -\frac{1}{2H} \cdot q_1 \cdot 16l^2 + C_3 \cdot 4l = 2l \\
 C_3 &= \frac{1}{4} \cdot [2 + \frac{1}{2H} \cdot q_1 \cdot 16l] \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{H} \cdot 2q_1 \cdot l} \\
 \eta_{max} &= \frac{qa^2}{8H} \quad \text{mit} \quad \eta_{max} = \frac{1}{2}l \rightarrow \frac{1}{2}l = \frac{q \cdot 16l^2}{8H} \Rightarrow \boxed{H = 4q_1 \cdot l} \\
 y_1(x_1) &= -\frac{1}{2 \cdot 4q_1 l} \cdot q_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4q_1 \cdot l} \cdot 2q_1 \cdot l \cdot x_1 \\
 &\Rightarrow \boxed{y_1(x_1) = -\frac{1}{8l}x_1^2 + x_1}
 \end{aligned}$$

## 2. Seilkräfte

$$\begin{aligned}
 S_0(x_0) &= H_0 \cdot \sqrt{1 + y_0'^2} \quad \text{mit} \quad H_0 = \frac{16}{3}q_0 \cdot l \\
 y_0'^2 &= \left(-\frac{1}{H} \cdot q_0 \cdot x_0 + \frac{1}{H} \cdot 4q_0 \cdot l\right)^2 \\
 y_0'^2(0) &= \frac{1}{H} \cdot 16q_0^2 l^2 = \frac{3^2}{16^2 q_0^2 \cdot l^2} \cdot 16q_0^2 \cdot l^2 = \frac{9}{16} \\
 S_0(0) &= \frac{16}{3}q_0 \cdot l \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16}{3}q_0 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \Rightarrow \boxed{S_0(0) = \frac{20}{3}q_0 \cdot l} \\
 S_1(x_1) &= H_1 \cdot \sqrt{1 + y_1'^2} \quad \text{mit} \quad H_1 = 4q_1 \cdot l \\
 y_1'^2(x_1) &= \left[-\frac{1}{H} \cdot q_1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{H} \cdot 2q_1 \cdot l\right]^2 \\
 y_1'^2(0) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4q_1 \cdot l} \cdot 2q_1 \cdot l\right)^2 = 1 \\
 &\Rightarrow \boxed{S_1(0) = 4q_1 \cdot l \cdot \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

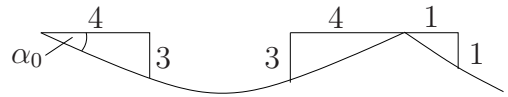
### 3. Auflagerkraft in den Pylonen

$$y'_0(0) = C_1 = \frac{1}{H} \cdot 4q_0 \cdot l = \frac{3}{16q_0 \cdot l} \cdot 4q_0 \cdot l = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36,9^\circ$$

$$y'_1(0) = C_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{H} \cdot 2q_1 \cdot l = \frac{1}{2} + \frac{1}{4q_1 \cdot l} \cdot 2q_1 \cdot l = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$$

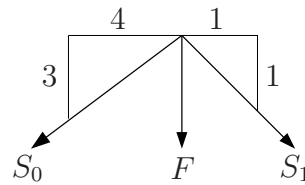


#### 3.1 Kräftegleichgewicht

$$-F = \frac{3}{5} \cdot S_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_1$$

$$F = -\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{3} q_0 \cdot l + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 4q_1 \cdot l\right)$$

$$\boxed{F = -(4q_0 \cdot l + 4q_1 \cdot l)}$$



### 4. Verhältnis der Streckenlasten am Umlenksattel

$$e^{-\mu\alpha^*} < \frac{S_1}{S_2} < e^{\mu\alpha^*}$$

$$\text{mit } \alpha^* = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - 36,9^\circ) = 81,9^\circ$$

$$e^{-\mu\alpha^*} < \frac{20 \cdot q_0 \cdot l}{3 \cdot 4q_1 \cdot l \cdot \sqrt{2}} < e^{\mu\alpha^*}$$

$$e^{-\mu\alpha^*} < \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{q_0}{q_1} < e^{\mu\alpha^*}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \cdot e^{-\mu\alpha^*} < \frac{q_0}{q_1} < \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5} \cdot e^{\mu\alpha^*}$$

