

# 4 Tag 4

## 4.1 Diagonalisierbarkeit

- Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix  $D = (d_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{n \times n}$ , deren Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen alle 0 sind:  $d_{j\ell} = 0$  für  $j \neq \ell$ .
- Eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine reguläre Matrix  $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$  so gibt, dass  $T^{-1}AT$  eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Matrix  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  heißt *orthogonal diagonalisierbar*, wenn es eine orthogonale Matrix  $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  so gibt, dass  $T^\top AT$  eine Diagonalmatrix ist.
- Eine Matrix  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen:  $d_\lambda = e_\lambda$ .
- Jede reelle symmetrische Matrix  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  ist orthogonal diagonalisierbar.
- Sei  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ . Ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathbf{K}^n$  bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ , so gilt  $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , wobei  $T = (v_1 \ \cdots \ v_n) \in \mathbf{K}^{n \times n}$  und  $\lambda_j$  der zu  $v_j$  gehörige Eigenwert von  $A$  ist:  $Av_j = \lambda_j v_j$ .
- Wie diagonalisiert man eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A$ ? (genauer: Wie finden wir eine (Orthonormal-)Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  so, dass  $T^{-1}AT$  mit  $T = (v_1 \ \cdots \ v_n)$  eine Diagonalmatrix ist?)
  1. Berechnung des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda)$ , am besten in faktorisierte Form.
  2. Berechnung der Eigenwerte von  $A$ , also der Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$ .
  3. Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  machen wir Folgendes:  
Berechnung einer Basis des Eigenraums  $V(\lambda)$ , welcher die Lösungsmenge des homogenen LGS  $(A - \lambda E_n)x = 0$  ist.  
(Beachte:  $\dim V(\lambda) = d_\lambda = e_\lambda$  falls  $A$  tatsächlich diagonalisierbar ist.)  
Falls wir eine Orthonormalbasis benötigen, so wenden wir noch das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren auf die Basis an.
  4. Alle im 3. Schritt berechneten Basisvektoren bilden zusammen die gesuchte (Orthonormal-)Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

## 4.2 Quadriken

- Eine Teilmenge  $Q \subseteq \mathbf{R}^n$  heißt *Quadrik*, wenn es eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , einen Vektor  $a \in \mathbf{R}^n$  und einen Skalar  $c \in \mathbf{R}$  gibt mit

$$Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^\top A x + 2a^\top x + c = 0\}.$$

- Der *Typ* einer Quadrik lässt sich zum Beispiel mit der erweiterten Matrix  $A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} c & a^\top \\ a & A \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  bestimmen:
  - Gilt  $\text{Rg } A = \text{Rg } A_{\text{erw}}$ , so ist  $Q$  eine *kegelige Quadrik*.
  - Gilt  $\text{Rg } A = \text{Rg } A_{\text{erw}} - 1$ , so ist  $Q$  eine *Mittelpunktsquadrik*.
  - Gilt  $\text{Rg } A = \text{Rg } A_{\text{erw}} - 2$ , so ist  $Q$  eine *parabolische Quadrik*.
- Das Ziel der *Hauptachsentransformation* ist die Berechnung eines kartesischen Koordinatensystems, in welchem die Quadrik durch eine 'schöne' Gleichung beschrieben wird. Diese 'schöne' Gleichung wird *euklidische Normalform* genannt. Durch Weglassen von Streckfaktoren (Hauptachsenlängen) erhält man aus der euklidischen Normalform die *affine Normalform*, anhand welcher man die *Gestalt* einer Quadrik im  $\mathbf{R}^2$  oder  $\mathbf{R}^3$  aus einer Tabelle ablesen kann.
- Hauptachsentransformation: *Kurzfassung* (nur euklidische Normalform, ohne Details)

1. *orthogonale Diagonalisierung*:  $T^\top A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_m & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tilde{a} = T^\top a.$

Gleichung bzgl.  $y = Tx$ :

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + \cdots + 2\tilde{a}_{m+1} y_{m+1} + c = 0$$

2. *quadratische Ergänzung*: Für alle  $j$  mit  $\lambda_j \neq 0$ ,  $\tilde{a}_j \neq 0$ :

$$\lambda_j y_j^2 + 2\tilde{a}_j y_j = \lambda_j \left( y_j + \frac{\tilde{a}_j}{\lambda_j} \right)^2 - \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}$$

Für diese  $j$ : Setze  $z_j = y_j + \frac{\tilde{a}_j}{\lambda_j}$  (Rest unverändert:  $z_\ell = y_\ell$ )

Gleichung bezüglich  $z$  mit  $\tilde{c} = c - \sum_j \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}$ :

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 + 2\tilde{a}_{m+1} z_{m+1} + \tilde{c} = 0$$

3. a)  $\tilde{a}_{m+1} = \tilde{c} = 0$ :

*kegelige Quadrik* mit euklidischer Normalform

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 = 0$$

b)  $\tilde{a}_{m+1} = 0, \tilde{c} \neq 0$ :

*Mittelpunktsquadrik* mit euklidischer Normalform

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{c}} z_1^2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\tilde{c}} z_m^2 + 1 = 0$$

c)  $\tilde{a}_{m+1} \neq 0$ :

Verschiebung gegen die Konstante:

Setze  $w_{m+1} = z_{m+1} + \frac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}$  (Rest unverändert:  $w_\ell = z_\ell$ )

*parabolische Quadrik* mit euklidischer Normalform

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{a}_{m+1}} w_1^2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\tilde{a}_{m+1}} w_m^2 + 2w_{m+1} = 0$$

- Hauptachsentransformation: *Langfassung* (mit euklidischer Normalform, Koordinatensystemen, Koordinatentransformationen, Details)

1. *orthogonale Diagonalisierung*:

Wir berechnen  $T = (v_1 \dots v_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  mit  $T^\top A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  wie folgt:

Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  stammen aus Orthonormalbasen der Eigenräume  $V(\lambda_j)$  der Matrix  $A$ . Wir sortieren die Eigenwerte und Eigenvektoren so, dass  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ ,  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_m < 0$  und  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n = 0$  gilt.

Falls 0 ein Eigenwert von  $A$  mit  $e_0 = d_0 > 1$  ist (sehr selten), so müssen wir die Orthonormalbasis  $B$  von  $V(0)$  geeignet wählen:

Wir lösen das homogene LGS  $\begin{pmatrix} a^\top \\ A \end{pmatrix} x = 0$  und berechnen eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$  der Lösungsmenge. Gilt  $\ell = d_0$ , so ist  $B = \{b_1, \dots, b_\ell\}$  geeignet gewählt. Gilt  $\ell \neq d_0$ , so wählen wir  $\tilde{b}_0 \in V(0)$  so, dass  $b_1, \dots, b_\ell, \tilde{b}_0$  linear unabhängig sind. Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren liefert angewendet auf diese Vektoren eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_\ell, b_0\}$  und  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_\ell\}$  ist geeignet gewählt.

Neues Koordinatensystem:  $\mathbf{F} = (0; v_1, \dots, v_n)$

Neue Gleichung mit  $y = \mathbf{F}x$ :

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + \dots + 2\tilde{a}_{m+1} y_{m+1} + c = 0$$

2. *quadratische Ergänzung*:

$$\text{Setze } \mathbf{F}P = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ -\frac{\tilde{a}_m}{\lambda_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad P = T \cdot \mathbf{F}P, \quad \tilde{c} = c - \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}$$

Neues Koordinatensystem:  $\mathbf{G} = (P; v_1, \dots, v_n)$

Neue Gleichung mit  $z = \mathbf{G}x$ :

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 + 2\tilde{a}_{m+1} z_{m+1} + \tilde{c} = 0$$

3. Fallunterscheidung:

a) Es gelte  $\tilde{a}_{m+1} = \tilde{c} = 0$ .

Diesenfalls handelt es sich um eine *kegelige Quadrik*. Bezüglich des Koordinatensystems  $\mathbf{G}$  besitzt die Quadrik die euklidische Normalform

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 = 0.$$

Die zugehörige Koordinatentransformation ist

$$x = \mathbf{E}\kappa_{\mathbf{G}}(z) \quad \text{bzw.} \quad z = \mathbf{G}\kappa_{\mathbf{E}}(x).$$

b) Es gelte  $\tilde{a}_{m+1} = 0$ , aber  $\tilde{c} \neq 0$ .

Diesenfalls handelt es sich um eine *Mittelpunktsquadrik*. Bezüglich des Koordinatensystems  $\mathbf{G}$  besitzt die Quadrik die euklidische Normalform

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{c}} z_1^2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\tilde{c}} z_m^2 + 1 = 0.$$

Die zugehörige Koordinatentransformation ist

$$x = \mathbf{E}\kappa_{\mathbf{G}}(z) \quad \text{bzw.} \quad z = \mathbf{G}\kappa_{\mathbf{E}}(x).$$

c) Es gelte  $\tilde{a}_{m+1} \neq 0$ .

Diesenfalls handelt es sich um eine *parabolische Quadrik*.

$$\text{Setze } Q = P - \frac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}.$$

Bezüglich des Koordinatensystems  $\mathbf{H} = (Q; v_1, \dots, v_n)$  besitzt die Quadrik die euklidische Normalform

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{a}_{m+1}} w_1^2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\tilde{a}_{m+1}} w_m^2 + 2w_{m+1} = 0,$$

wobei  $w = \mathbf{H}x$  ist. Die zugehörige Koordinatentransformation ist

$$x = \mathbf{E}\kappa_{\mathbf{H}}(w) \quad \text{bzw.} \quad w = \mathbf{H}\kappa_{\mathbf{E}}(x).$$

• Hauptachsenlängen und affine Normalform:

$$\text{Sei } Q \text{ in euklidischer Normalform } \mu_1 x_1^2 + \dots + \mu_m x_m^2 ( \underbrace{+2x_{m+1}}_{\text{nur bei parabolischen Quadriken}} \underbrace{+1}_{\text{nur bei Mittelpunktquadriken}} ) = 0.$$

nur bei parabolischen Quadriken

nur bei Mittelpunktquadriken

Wir schreiben  $\mu_j = \pm \frac{1}{h_j^2}$  mit  $h_j > 0$ . Diese  $h_j$  heißen *Hauptachsenlängen*.

Vergisst man die Faktoren  $\frac{1}{h_j^2}$ , so erhält man die *affine Normalform* von  $Q$ .

$$\begin{array}{lcl} \pm \frac{1}{h_1^2} x_1^2 \pm \dots \pm \frac{1}{h_m^2} x_m^2 ( +2x_{m+1} + 1 ) = 0 & \text{euklidische Normalform} \\ \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_m^2 ( +2x_{m+1} + 1 ) = 0 & \text{affine Normalform} \end{array}$$

Die *Gestalt* einer Quadrik im  $\mathbf{R}^2$  oder  $\mathbf{R}^3$  in affiner Normalform lässt sich in folgender Tabelle ablesen.

Quadriken mit drei vorkommenden Variablen im  $\mathbf{R}^3$ :

- a) 
$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{Doppelkegel} \end{array}$$
- b) 
$$\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0 & \text{kein Punkt} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 & \text{zweischaliges Hyperboloid} \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 & \text{einschaliges Hyperboloid} \\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 & \text{Ellipsoid} \end{array}$$
- c) 
$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{elliptisches Paraboloid} \\ \text{hyperbolisches Hyperboloid} \end{array}$$

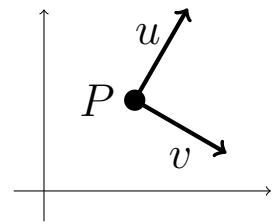
Quadriken mit einer oder zwei vorkommenden Variablen im  $\mathbf{R}^2$  bzw.  $\mathbf{R}^3$ :

| $\mathbf{R}^2$ |                                                                                                                                                                                                                                                        | $\mathbf{R}^3$                                                                                                                                                          |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a)             | $\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ \pm x_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{schneidendes Geradenpaar} \\ \text{(Doppel-)Gerade} \end{array}$               | $\begin{array}{l} \text{Gerade} \\ \text{schneidendes Ebenenpaar} \\ \text{(Doppel-)Ebene} \end{array}$                                                                 |
| b)             | $\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 & \text{kein Punkt} \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 & \text{Hyperbel} \\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 & \text{Ellipse} \\ x_1^2 + 1 = 0 & \text{kein Punkt} \\ -x_1^2 + 1 = 0 & \text{paralleles Geradenpaar} \end{array}$ | $\begin{array}{l} \text{kein Punkt} \\ \text{hyperbolischer Zylinder} \\ \text{elliptischer Zylinder} \\ \text{kein Punkt} \\ \text{paralleles Ebenenpaar} \end{array}$ |
| c)             | $\pm x_1^2 + 2x_2 = 0 \quad \text{Parabel}$                                                                                                                                                                                                            | $\text{parabolischer Zylinder}$                                                                                                                                         |

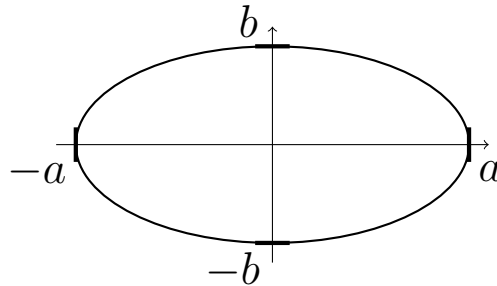
# Skizzieren von Quadriken im $\mathbb{R}^2$

Seien stets  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

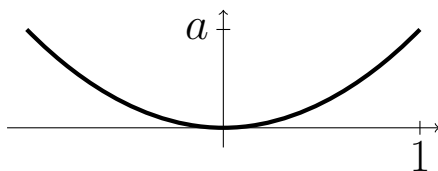
- kartesisches Koordinatensystem:  $\mathbf{F} = (P; u, v)$



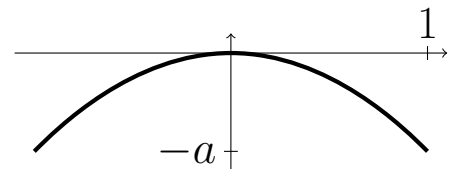
- Ellipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



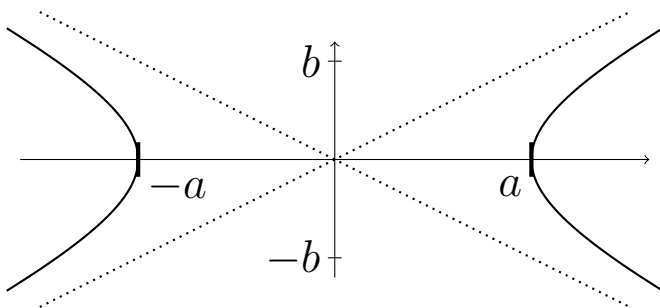
- Parabel:  $y = ax^2$  oder  $y = -ax^2$



oder



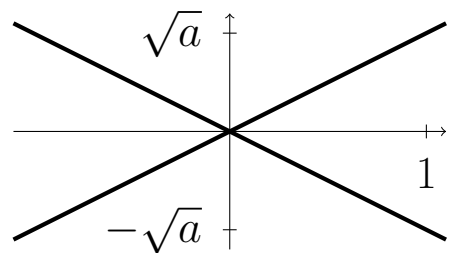
- Hyperbel:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



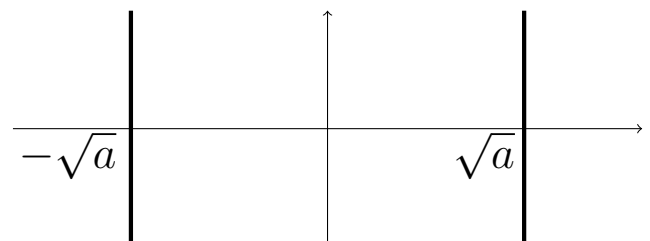
Scheitelpunkte:  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$

Asymptoten:  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$

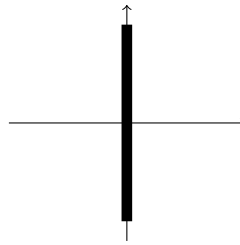
- schneidendes Geradenpaar:  $y^2 = ax^2$



- paralleles Geradenpaar:  $x^2 = a$



- (Doppel-)Gerade:  $\pm ax^2 = 0$



- Punkt:  $\pm(ax^2 + by^2) = 0$

