

3 Tag 3

3.1 Lineare Abbildungen

Sei weiterhin $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

- Sei V ein $\mathbf{K}$ -Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V , d.h. jeder Vektor $v \in V$ lässt sich als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ schreiben mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$.

Der Vektor ${}_B v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ heißt *Koordinatenvektor* von v bezüglich B .

- Seien V und W $\mathbf{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt *linear*, wenn $f(u+v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbf{K}$ gilt.

Sei nun $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine Basis von W . Dann heißt die $(m \times n)$ -Matrix

$${}_C f_B = \begin{pmatrix} {}_C f(b_1) & {}_C f(b_2) & \cdots & {}_C f(b_n) \end{pmatrix},$$

deren j -te Spalte also der Koordinatenvektor von $f(b_j)$ bezüglich C ist, *Darstellungsmatrix* von f bezüglich B und C . Es gilt ${}_C f(v) = {}_C f_B \cdot {}_B v$ für alle $v \in V$.

- Sei V ein $\mathbf{K}$ -Vektorraum mit Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Die identische Abbildung $\text{id}: V \rightarrow V: v \mapsto v$ ist linear. Die Darstellungsmatrix von id bezüglich B und C ist ${}_C \text{id}_B = \begin{pmatrix} {}_C b_1 & {}_C b_2 & \cdots & {}_C b_n \end{pmatrix}$ und heißt *Basiswechselmatrix*. Eine solche Basiswechselmatrix ist stets invertierbar mit $({}_C \text{id}_B)^{-1} = {}_B \text{id}_C$.
- V sei weiterhin ein $\mathbf{K}$ -Vektorraum mit Basen B und C . Ferner sei W ein $\mathbf{K}$ -Vektorraum mit Basen D und E und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt ${}_E f_C = {}_E \text{id}_D \cdot {}_D f_B \cdot {}_B \text{id}_C$.
- Seien weiterhin V und W $\mathbf{K}$ -Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ linear.

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

heißt der *Kern* von f und

$$\text{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

heißt das *Bild* von f . Es gilt $\text{Kern}(f) \subseteq V$ und $\text{Bild}(f) \subseteq W$. Beides sind Untervektorräume.

- * f ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.
- * f ist genau dann surjektiv, wenn $\text{Bild}(f) = W$ gilt.
- * Es gilt die *Dimensionsformel*: $\dim V = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$

- Sei $A \in \mathbf{K}^{z \times s}$. Dann ist $f: \mathbf{K}^s \rightarrow \mathbf{K}^z: x \mapsto Ax$ linear mit Darstellungsmatrix

$${}_E f_E = A, \text{ wobei } E \text{ die Standardbasis des } \mathbf{K}^n \text{ ist: } E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\text{Kern}(f)$ ist hier die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ und es gilt $\dim(\text{Bild}(f)) = \text{Rg } A$. Die Dimensionsformel lautet hier also

$$s = \dim(\text{Kern}(f)) + \text{Rg } A.$$

Wir erhalten die folgenden Äquivalenzen:

- * f injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ist einzige Lösung des LGS } Ax = 0) \Leftrightarrow \text{Rg } A = s$

In diesem Fall muss $s \leq z$ sein.

- * f surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = \mathbf{K}^z \Leftrightarrow \text{Rg } A = z \Leftrightarrow z = s - \dim(\text{Kern}(f))$

In diesem Fall muss $z \leq s$ sein.

- * f bijektiv $\Leftrightarrow z = s$ und $\text{Rg } A = z \Leftrightarrow z = s$ und $\text{Kern}(f) = \{0\}$
 $\Leftrightarrow A$ quadratisch und regulär
 $\Leftrightarrow A$ quadratisch und invertierbar
 $\Leftrightarrow A$ quadratisch und $\det A \neq 0$

Diese Aussagen lassen sich auf beliebige lineare Abbildungen übertragen, wenn man für A eine zugehörige Darstellungsmatrix einsetzt.

3.2 Affine Abbildungen

- Eine Abbildung $\alpha: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$ heißt *affin*, wenn es eine Matrix $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ und einen Vektor $t \in \mathbf{K}^n$ gibt mit $\alpha(v) = Av + t$ für alle $v \in \mathbf{K}^n$.

A heißt *linearer Anteil* und t heißt *Translationsanteil* von α .

α heißt *Affinität*, wenn α bijektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn A regulär ist und man erhält die affine Umkehrabbildung

$$\alpha^{-1}: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n: v \mapsto A^{-1}v - A^{-1}t.$$

- Ein *affines Koordinatensystem* $\mathbf{F}$ besteht aus einem Punkt $P \in \mathbf{K}^n$ (Ursprung) und einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von $\mathbf{K}^n$.

Man schreibt kurz $\mathbf{F} = (P; b_1, \dots, b_n) = (P; B)$. Falls B eine ONB von $\mathbf{R}^n$ ist, so heißt $\mathbf{F}$ ein *kartesisches Koordinatensystem*.

Allgemein heißt für $X \in \mathbf{K}^n$ der Vektor ${}_{\mathbf{F}}X = {}_B(X - P) \in \mathbf{K}^n$ das Koordinatentupel von v bezüglich $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bezeichne stets das Standardkoordinatensystem von $\mathbf{K}^n$.

- Seien $\mathbf{F} = (P; f_1, \dots, f_n)$ und $\mathbf{G} = (Q; g_1, \dots, g_n)$ affine Koordinatensysteme von $\mathbf{K}^n$. Die Abbildung ${}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{F}}: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n: {}_{\mathbf{F}}X \mapsto {}_{\mathbf{G}}X$ ist eine Affinität und heißt *Koordinatentransformation*.

Eine explizite Abbildungsvorschrift erhält man wie folgt:

Schreibe $F = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^{n \times n}$ und $G = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^{n \times n}$.

Für alle $v \in \mathbf{K}^n$ ist dann

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{E}}\kappa_{\mathbf{F}}(v) &= Fv + P, & {}_{\mathbf{F}}\kappa_{\mathbf{E}}(v) &= F^{-1}(v - P), \\ {}_{\mathbf{E}}\kappa_{\mathbf{G}}(v) &= Gv + Q, & {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{E}}(v) &= G^{-1}(v - Q), \\ {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{F}} &= {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{E}} \circ {}_{\mathbf{E}}\kappa_{\mathbf{F}}, \text{ also} \\ {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{F}}(v) &= {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{E}}({}_{\mathbf{E}}\kappa_{\mathbf{F}}(v)) = G^{-1}(Fv + P - Q) = G^{-1}Fv + G^{-1}(P - Q) \end{aligned}$$

Für eine affine Abbildung $\alpha: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$ schreibt man ${}_{\mathbf{E}}\alpha_{\mathbf{E}} = \alpha$ und

${}_{\mathbf{G}}\alpha_{\mathbf{F}} = {}_{\mathbf{G}}\kappa_{\mathbf{E}} \circ {}_{\mathbf{E}}\alpha_{\mathbf{E}} \circ {}_{\mathbf{E}}\kappa_{\mathbf{F}}$. Für $X \in \mathbf{K}^n$ gilt ${}_{\mathbf{G}}\alpha_{\mathbf{F}}({}_{\mathbf{F}}X) = {}_{\mathbf{G}}(\alpha(X))$.

Weiteres zu Matrizen

- Für $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ heißt $\text{Sp } A = \sum_{j=1}^n a_{jj} = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ die *Spur* von A .

- $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^\top = A$ gilt.
- $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $\overline{A}^\top = A$ gilt.
- $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $AA^\top = E_n$ gilt. Gilt zudem $\det A = 1$, so heißt A *eigentlich* orthogonal, ansonsten ($\det A = -1$) *uneigentlich* orthogonal.
- Jede eigentlich orthogonale (2×2) -Matrix ist von der Form $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in \mathbf{R}$. Diese Matrizen beschreiben Drehungen des $\mathbf{R}^2$ mit Drehwinkel φ (gegen den Uhrzeigersinn) um den Ursprung.
- Jede uneigentlich orthogonale (2×2) -Matrix ist von der Form $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in \mathbf{R}$. Diese Matrizen beschreiben Achsenspiegelungen im $\mathbf{R}^2$. Die Spiegelachse schließt mit der x-Achse den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ ein.
- Jede eigentlich orthogonale (3×3) -Matrix D beschreibt eine Drehung um eine Achse im $\mathbf{R}^3$. Diese Drehachse erhält man durch Lösen der Fixpunktgleichung $Dv = v$, also durch Lösen des homogenen LGS $(D - E_3)v = 0$. Der Drehwinkel $\varphi \in \mathbf{R}$ erfüllt die Gleichung $\operatorname{Sp} D = 2 \cos \varphi + 1$.
- Eine affine Abbildung $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n: v \mapsto Av + t$ heißt *Isometrie* oder (*euklidische*) *Bewegung*, wenn ihr linearer Anteil A orthogonal ist. Solche Isometrien heißen (un)eigentlich, wenn ihr linearer Anteil (un)eigentlich ist.

3.3 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

Sei $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$, $v \in \mathbf{K}^n$ und $\lambda \in \mathbf{K}$.

- Gilt $Av = \lambda v$ und $v \neq 0$, so heißt λ ein *Eigenwert* von A und v ein *Eigenvektor* zum Eigenwert λ von A .
Der Untervektorraum $V(\lambda) = \{v \in \mathbf{K}^n | Av = \lambda v\} \subseteq \mathbf{K}^n$ heißt *Eigenraum* zum Eigenwert λ von A .
- Es gilt $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E_n)v = 0$.
Folglich ist $V(\lambda)$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $(A - \lambda E_n)x = 0$ und v ist genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A , wenn v eine nichttriviale Lösung dieses LGS ist.

- $\lambda \in \mathbf{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von A , wenn λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ ist.

In diesem Fall heißt die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ die *algebraische Vielfachheit* e_λ von λ und $\dim V(\lambda)$ heißt die *geometrische Vielfachheit* d_λ von λ . Die Dimensionsformel liefert $d_\lambda = n - \text{Rg}(A - \lambda E_n)$. Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbf{K}$ gilt stets $1 \leq d_\lambda \leq e_\lambda \leq n$.

- Eine Matrix $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ist genau dann singulär, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

- Bei einer oberen Dreiecksmatrix $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ auf der Hauptdiagonalen.

- Nützlich: Für die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ einer Matrix $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ (ggfs. mit Wiederholungen) gilt

$$\text{Sp } A = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

$$\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

- Sei $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ eine reelle symmetrische Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von A reell. Bei der Betrachtung von Hessematrizen wird zusätzlich folgende Beobachtung nützlich sein:

Sei $n = 2$. Gilt $\det A < 0$, so besitzt A einen negativen und einen positiven Eigenwert. Gilt $\det A > 0$ und $\text{Sp } A > 0$, so besitzt A nur positive Eigenwerte. Gilt $\det A > 0$ und $\text{Sp } A < 0$, so besitzt A nur negative Eigenwerte.

- Sei $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ eine reelle Matrix und $\lambda \in \mathbf{C}$ ein Eigenwert von A . Dann ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .

Ist $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A , so ist $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ von A .