

## 2 Tag 2

### 2.1 Vektorrechnung im $\mathbf{R}^n$

- Seien  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}$ .

\* Addition:  $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

\* skalare Multiplikation:  $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

\* Skalarprodukt:  $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

\* Betrag:  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

\* Winkel:  $\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle(x, y)$ , insbesondere:

$$x, y \text{ orthogonal} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

- Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  heißt *Untervektorraum* von  $\mathbf{R}^n$ , wenn gilt:

- $x + y \in U$  für alle  $x, y \in U$
- $\lambda \cdot x \in U$  für alle  $x \in U, \lambda \in \mathbf{R}$
- $0 \in U$

- Seien  $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$ .

Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$  heißt  $\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$  eine *Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_k$ . Die Menge aller Linearkombinationen

$$L(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R} \right\}$$

heißt *lineare Hülle* von  $v_1, \dots, v_n$ . Sie ist der kleinste Untervektorraum von  $\mathbf{R}^n$ , der  $v_1, \dots, v_k$  enthält. Gilt  $U = L(v_1, \dots, v_k)$ , so heißt  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ein *Erzeugendensystem* von  $U$ .  $v_1, \dots, v_k$  heißen *linear unabhängig*, wenn

$\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0$  nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$  gilt, ansonsten *linear abhängig*.

(Zwei Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist.)  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ist eine *Basis* eines Untervektorraums  $U \subseteq \mathbf{R}^n$ , wenn es ein Erzeugendensystem von  $U$  ist und  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig sind. In diesem Fall heißt  $k = \dim U$  die *Dimension* von  $U$  und jeder Vektor in  $U$  lässt sich eindeutig als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_k$  darstellen.  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ist ein *Orthonormalsystem* (ONS), wenn  $v_1, \dots, v_k$  paarweise orthogonal und normiert sind. ( $\langle v_j, v_\ell \rangle = 0$  für  $j \neq \ell$  und  $|v_j| = 1$ ) Gilt  $k = n$ , so heißt  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine *Orthonormalbasis* (ONB) von  $\mathbf{R}^n$ . Allgemeiner heißt jedes ONS  $\{v_1, \dots, v_k\}$  eine ONB von  $L(v_1, \dots, v_k)$ .

Hinweis:

$\{v_1, \dots, v_n\}$  ist Basis von  $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$  Die  $(n \times n)$ -Matrix  $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$  ist regulär

$\{v_1, \dots, v_n\}$  ist ONB von  $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$  Die  $(n \times n)$ -Matrix  $(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$  ist orthogonal

## Schmidtsches Orthonormierungsverfahren

Gegeben seien linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$ . Das Verfahren liefert ein ONS  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  mit  $L(v_1, \dots, v_j) = L(f_1, \dots, f_j)$  für alle  $1 \leq j \leq k$ . Falls  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathbf{R}^n$  war, so ist  $\{f_1, \dots, f_n\}$  eine ONB von  $\mathbf{R}^n$ .

Berechnung:

- $f_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$  (normieren)
- für  $j \geq 1$ :  $f_{j+1}^* = v_{j+1} - \sum_{\ell=1}^j \langle v_{j+1}, f_\ell \rangle f_\ell$   
 $f_{j+1} = \frac{f_{j+1}^*}{|f_{j+1}^*|}$  (normieren)

## Kreuzprodukt

Für  $u, v \in \mathbf{R}^3$  heißt  $u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$  das *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* von  $u$  und  $v$ .

- $u \times v$  ist orthogonal zu  $u$  und zu  $v$ .

- $|u \times v|$  ist der Flächeninhalt des von  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms:

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$$

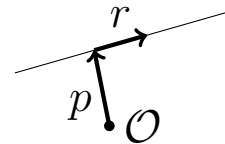
Insbesondere gilt  $u \times v = 0$  genau dann, wenn  $u$  und  $v$  linear abhängig sind.

- Sind  $u$  und  $v$  orthogonal und normiert, so ist  $\{u, v, u \times v\}$  ein Rechtssystem, d.h. eine ONB von  $\mathbf{R}^3$  mit  $\det \begin{pmatrix} u & v & u \times v \end{pmatrix} = 1$ . ( $\{u, v, v \times u\}$  ist ein Linkssystem, d.h. eine ONB von  $\mathbf{R}^3$  mit  $\det \begin{pmatrix} u & v & v \times u \end{pmatrix} = -1$ .)
- Das Kreuzprodukt ist linear in jedem Argument: Seien  $u, u', v, v' \in \mathbf{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Dann ist  $(u+u') \times v = (u \times v) + (u' \times v)$ ,  $u \times (v+v') = (u \times v) + (u \times v')$  und  $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$ . Zudem ist  $v \times u = -u \times v$ .

## 2.2 Geraden und Ebenen

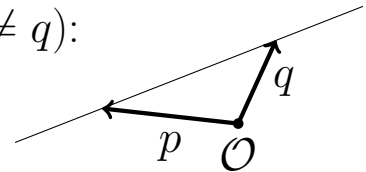
- Gerade im  $\mathbf{R}^n$  mit Stützvektor  $p \in \mathbf{R}^n$  und Richtungsvektor  $r \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$g = \{p + \lambda r \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \text{ bzw. } g: x = p + \lambda r, \lambda \in \mathbf{R}$$



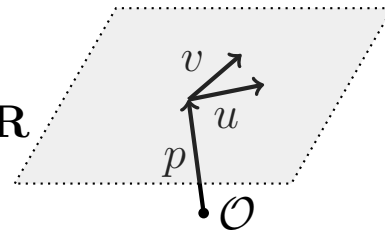
- Gerade durch zwei Punkte mit Ortsvektoren  $p, q \in \mathbf{R}^n$  ( $p \neq q$ ):

$$g = \{p + \lambda(q-p) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \text{ bzw. } g: x = p + \lambda(q-p), \lambda \in \mathbf{R}$$



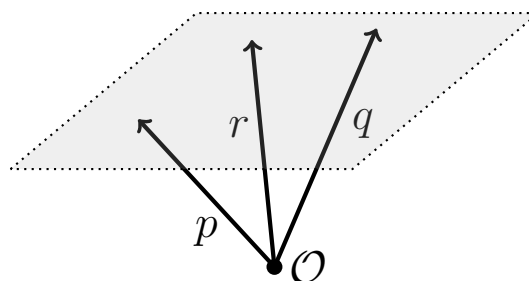
- Ebene im  $\mathbf{R}^n$  mit Stützvektor  $p \in \mathbf{R}^n$  und linear unabhängigen Spannvektoren  $u, v \in \mathbf{R}^n$ :

$$E = \{p + \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} \text{ bzw. } E: x = p + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$



- Ebene durch drei Punkte mit Ortsvektoren  $p, q, r \in \mathbf{R}^n$  ( $q-p, r-p$  l.u.):

$$E = \{p + \lambda(q-p) + \mu(r-p) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} \text{ bzw. } E: x = p + \lambda(q-p) + \mu(r-p), \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

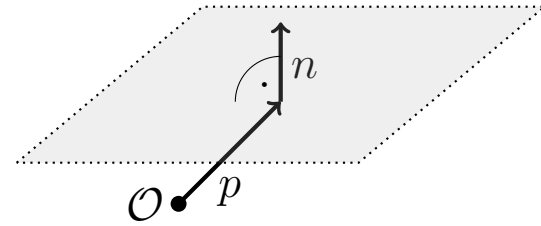


- Beide obige Darstellungen für Ebenen werden auch als *Parameterform* bezeichnet. Im  $\mathbf{R}^3$  gibt es noch *Normalformen* mit Stützvektor  $p \in \mathbf{R}^3$  und Normalenvektor  $n \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ :

$$E = \{x \in \mathbf{R}^3 | \langle x - p, n \rangle = 0\} \text{ bzw. } E: \langle x - p, n \rangle = 0$$

oder, mit  $d = \langle p, n \rangle$ :

$$E = \{x \in \mathbf{R}^3 | \langle x, n \rangle = d\} \text{ bzw. } E: \langle x, n \rangle = d$$



Gilt  $|n| = 1$  und  $d \geq 0$ , so heißt  $E: \langle x, n \rangle = d$  *Hessesche Normalform* der Ebene  $E$ . Für  $d > 0$  ist diese Darstellung eindeutig und  $d$  ist der Abstand der Ebene zum Ursprung  $\mathcal{O}$ .

- Berechnung der Hesseschen Normalform:  
Gegeben sei eine Ebene  $E = \{p + \lambda u + \mu v | \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$  in Parameterform.  
Setze  $m = \frac{u \times v}{|u \times v|}$  und  $c = \langle p, m \rangle$ .  
Für  $c \geq 0$  ist  $E: \langle x, m \rangle = c$  eine Hessesche Normalform von  $E$ .  
Für  $c < 0$  ist  $E: \langle x, -m \rangle = -c$  eine Hessesche Normalform von  $E$ .
- Weiterer möglicherweise relevanter Schulstoff:
  - \* Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen, inklusive Berechnung von Schnittmengen durch Lösen von linearen Gleichungssystemen.
  - \* Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen.
  - \* Winkel zwischen Geraden und Ebenen bestimmen. (bei Ebenen mit Normalenvektoren)

## 2.3 Matrizen

- Wir betrachten Matrizen mit Einträgen in den reellen oder komplexen Zahlen. Sei also  $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ .
- $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  ist eine Matrix mit  $z$  Zeilen,  $s$  Spalten und  $z \cdot s$  Einträgen  $a_{j\ell} \in \mathbf{K}$ , wobei  $1 \leq j \leq z$  und  $1 \leq \ell \leq s$  ist.
- Die *Transponierte* von  $A$  entsteht durch Vertauschen der Rolle von Zeilen und Spalten:  $A^\top = (a_{\ell j}) \in \mathbf{K}^{s \times z}$ .

- Falls  $z = s$  gilt, so heißt  $A$  *quadratisch*. Beispielsweise ist die Einheitsmatrix

$$E_z = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^{z \times z} \text{ stets quadratisch.}$$

- Addition:

Für  $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  und  $B = (b_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  ist  $A + B = (a_{j\ell} + b_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$ .

- skalare Multiplikation:

Für  $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  und  $\lambda \in \mathbf{K}$  ist  $\lambda A = (\lambda a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$ .

- Multiplikation:

Für  $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  und  $B = (b_{\ell k}) \in \mathbf{K}^{s \times t}$  ist  $A \cdot B = \left( \sum_{\ell=1}^s a_{j\ell} b_{\ell k} \right) \in \mathbf{K}^{z \times t}$ .

- Elementare Zeilen-/Spaltenumformungen:

\* Vertauschen zweier Zeilen/Spalten

\* Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Faktor  $\lambda \neq 0$

\* Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte

- Der *Rang* einer Matrix  $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{z \times s}$  ist die Dimension des von den Spalten von  $A$  aufgespannten Untervektorraums von  $\mathbf{K}^z$ :

$$\text{Rg } A = \dim L \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{z1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{z2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{zs} \end{pmatrix} \right).$$

Es gilt  $\text{Rg}(A^\top) = \text{Rg } A$ , also ist  $\text{Rg } A$  auch die Dimension des von den Zeilen von  $A$  aufgespannten Untervektorraums von  $\mathbf{K}^s$ . Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  heißt *regulär*, wenn sie vollen Rang hat, also wenn  $\text{Rg } A = n$  gilt, andernfalls *singulär*.

- Eine reguläre Matrix  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  ist *invertierbar*, d.h. es gibt eine Inverse  $A^{-1} \in \mathbf{K}^{n \times n}$  mit  $A \cdot A^{-1} = E_n$  und  $A^{-1} \cdot A = E_n$ .

Berechnung von  $A^{-1}$ :

$$\underbrace{\left( A \mid E_n \right)}_{(n \times 2n)\text{-Matrix}} \xrightarrow[\text{Zeilenumformungen}]{\text{elementare}} \left( E_n \mid A^{-1} \right)$$

Formel für reguläre  $(2 \times 2)$ -Matrizen:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- Die *Determinante* ordnet jeder quadratischen Matrix  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  einen Skalar  $\det A \in \mathbf{K}$  zu.

- \* für  $n = 1$ :  $\det(a) = a$

- \* für  $n = 2$ :  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Determinanten größerer Matrizen können mit dem *Entwicklungssatz von Laplace* auf diese Fälle zurückgeführt werden:

Sei  $A = (a_{j\ell}) \in \mathbf{K}^{n \times n}$ .

Entwicklung nach der  $\ell$ -ten Spalte:  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+\ell} a_{j\ell} \det(A_{j\ell})$

Entwicklung nach der  $j$ -ten Zeile:  $\det A = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{j+\ell} a_{j\ell} \det(A_{j\ell})$

Die Matrix  $A_{j\ell}$  entsteht dabei aus  $A$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und der  $\ell$ -ten Spalte.

Rechenregeln: Seien  $A, B \in \mathbf{K}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbf{K}$ .

- \*  $\det(A^\top) = \det A$

- \*  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

- \*  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$B$  entstehe nun aus  $A$  durch eine elementare Zeilen-/Spaltenumformung. Die Determinante verhält sich wie folgt:

- \* Bei Vertauschen zweier Zeilen/Spalten:  $\det B = -\det A$

- \* Bei Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$ :  
 $\det B = \lambda \det A$

- \* Bei Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte auf eine andere Zeile/Spalte:  
 $\det B = \det A$

- Für  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  sind äquivalent:

- \*  $A$  ist regulär

- \*  $A$  ist invertierbar

- \*  $\det A \neq 0$

## 2.4 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem (LGS)  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbf{K}^{z \times s}$ ,  $x \in \mathbf{K}^s$ ,  $b \in \mathbf{K}^z$ .

- Falls  $b = 0$  gilt, so heißt das LGS *homogen*.

Ein solches LGS ist immer lösbar, denn  $x = 0$  ist eine Lösung.

Die Lösungsmenge  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbf{K}^s \mid Ax = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $\mathbf{R}^s$  und es gilt  $\dim \mathcal{L} = s - \operatorname{Rg} A$ .

Hat man eine Basis  $\{v_1, \dots, v_k\}$  von  $\mathcal{L}$ , so lässt sich  $\mathcal{L}$  bequem angeben:

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K} \right\}$$

- Im Allgemeinen müssen lineare Gleichungssysteme nicht lösbar sein:

Das LGS  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn  $\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg} A$  gilt.

Ist das LGS lösbar und  $x_{\text{sp}} \in \mathbf{K}^s$  eine Lösung, so hat die Lösungsmenge  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbf{K}^s \mid Ax = b\}$  die Struktur eines affinen Untervektorraums:

$$\mathcal{L} = x_{\text{sp}} + \mathcal{L}_H = \{x_{\text{sp}} + u \mid u \in \mathcal{L}_H\},$$

wobei  $\mathcal{L}_H = \{x \in \mathbf{K}^s \mid Ax = 0\}$  die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS ist.  $x_{\text{sp}}$  heißt *spezielle Lösung* und ist  $\{v_1, \dots, v_k\}$  wie oben eine Basis von  $\mathcal{L}_H$ , so hat jede Lösung  $x \in \mathbf{K}^s$  des LGS  $Ax = b$  die Form

$$x = x_{\text{sp}} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

mit gewissen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$

Mit dem Gauß-Algorithmus (siehe unten) kann man eine solche spezielle Lösung  $x_{\text{sp}}$  und eine solche Basis  $\{v_1, \dots, v_k\}$  berechnen.

- Im Falle einer quadratischen Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  erhält man folgende äquivalente Aussagen:

- \* Das LGS  $Ax = b$  hat genau eine Lösung.

- \*  $A$  ist regulär.

- \*  $\det A \neq 0$

- \*  $A$  ist invertierbar

- \*  $x = A^{-1}b$  ist die einzige Lösung des LGS.

## Gauß-Algorithmus

Gegeben sei ein LGS  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbf{K}^{z \times s}$ ,  $x \in \mathbf{K}^s$  und  $b \in \mathbf{K}^z$ . Durch elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen kann man das LGS in ein LGS der Gestalt  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  transformieren, wobei

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|ccc} \mathbf{E}_r & C \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & c_{11} & \cdots & c_{1s-r} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rs-r} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \vdots \\ \tilde{b}_z \end{pmatrix}.$$

$\tilde{x}$  entsteht aus  $x$  durch Vertauschen der Unbestimmten.

Wir lösen zunächst das transformierte LGS  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ . Die Lösungen des ursprünglichen LGS erhält man indem man die Vertauschung der Unbestimmten, verursacht durch Spaltenvertauschungen, rückgängig macht.

(Hinweis:  $s$  ist die Anzahl der Unbestimmten bzw. die Anzahl der Spalten von  $A$  und  $\tilde{A}$ .  $r$  ist der Rang von  $A$  und  $\tilde{A}$ .)

Das LGS ist nicht lösbar, falls  $\tilde{b}$  unterhalb der  $r$ -ten Zeile einen Eintrag ungleich 0 besitzt, also falls ein  $j > r$  mit  $\tilde{b}_j \neq 0$  existiert.

Andernfalls ist das LGS lösbar.

Eine spezielle Lösung kann dann abgelesen werden:  $x_{\text{sp}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^s$ .

Der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS  $\tilde{A}\tilde{x} = 0$  hat die Dimension  $s - r$ . Man erhält eine Basis  $\{v_1, \dots, v_{s-r}\}$  des Lösungsraums mit Hilfe der Spalten von  $C$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -c_{12} \\ \vdots \\ -c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_{s-r} = \begin{pmatrix} -c_{1s-r} \\ \vdots \\ -c_{rs-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist jede Lösung von der Form

$$x_{\text{sp}} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{s-r} v_{s-r}$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-r} \in \mathbf{K}$ .

Falls Spalten vertauscht wurden, so müssen jetzt noch die Einträge der Lösungsvektoren entsprechend zurückgetauscht werden.