

1 Tag 1

1.1 Vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbf{Z}$. Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geq n_0$ bewiesen werden.

Das Verfahren hat zwei Schritte:

1. Man zeigt zunächst, dass $A(n_0)$ wahr ist. (*Induktionsanfang*)
2. Nun geht man davon aus, dass $A(n)$ für ein festes $n \geq n_0$ wahr ist (*Induktionsannahme*) und folgert hieraus, dass dann auch $A(n+1)$ wahr ist. Diese Folgerung heißt *Induktionsschluss*.

Formal schreibt man für diese Folgerung auch

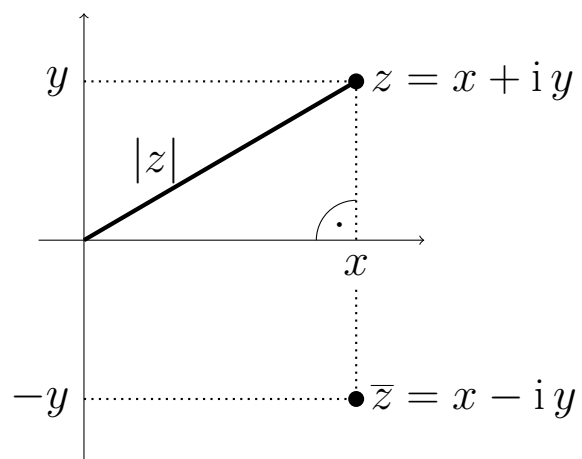
$$'A(n) \Rightarrow A(n+1)'$$

1.2 Komplexe Zahlen

Als Menge und auch als $\mathbf{R}$ -Vektorraum sind die komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ nichts anderes als der $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.

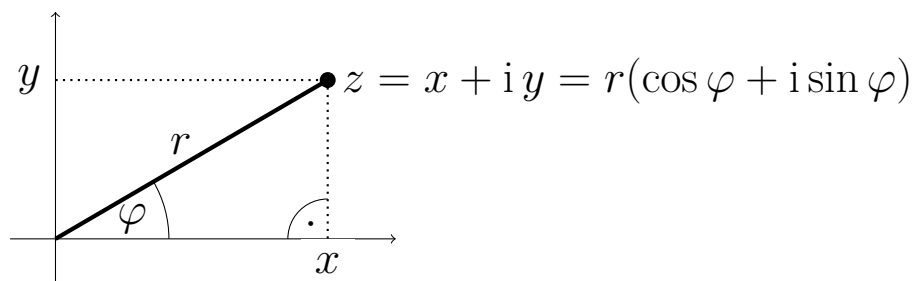
Üblicherweise schreibt man an Stelle von $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ jedoch $z = x + i y \in \mathbf{C}$ und nennt $\operatorname{Re}(z) = x$ den *Realteil* von z und $\operatorname{Im}(z) = y$ den *Imaginärteil* von z .

- Addition: $(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Multiplikation: $(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$
- Konjugation: $\overline{x + i y} = x - i y$
- Betrag: $|x + i y| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Polarkoordinaten

Ein Punkt in $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ kann auch durch Betrag und Winkel beschrieben werden:

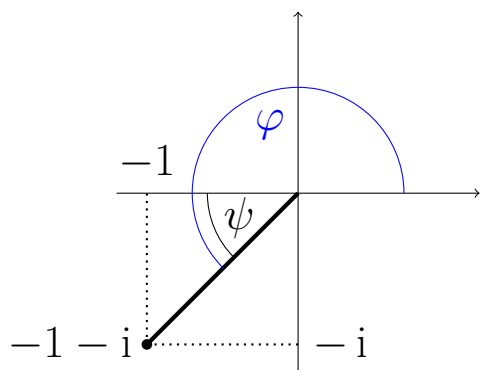


Es gilt $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, also $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$.
Umgekehrt ist $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bei größeren Winkeln und Beträgen empfehlen sich Zwischenschritte und eine Skizze. Beispielsweise ist

$$-6 - 6i = 6 \cdot (-1 - i) \stackrel{(*)}{=} 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right).$$

Den mit (*) markierten Schritt kann man geometrisch nachvollziehen:



$$\tan \psi = \frac{1}{1}, \text{ also ist } \psi = \frac{\pi}{4} \text{ und } \varphi = \psi + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

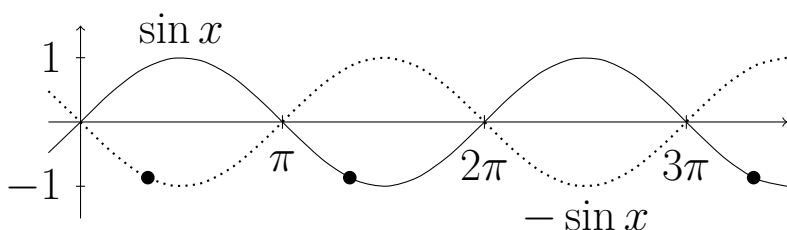
$$|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Hinweis zur Auswertung der trigonometrischen Funktionen $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$:

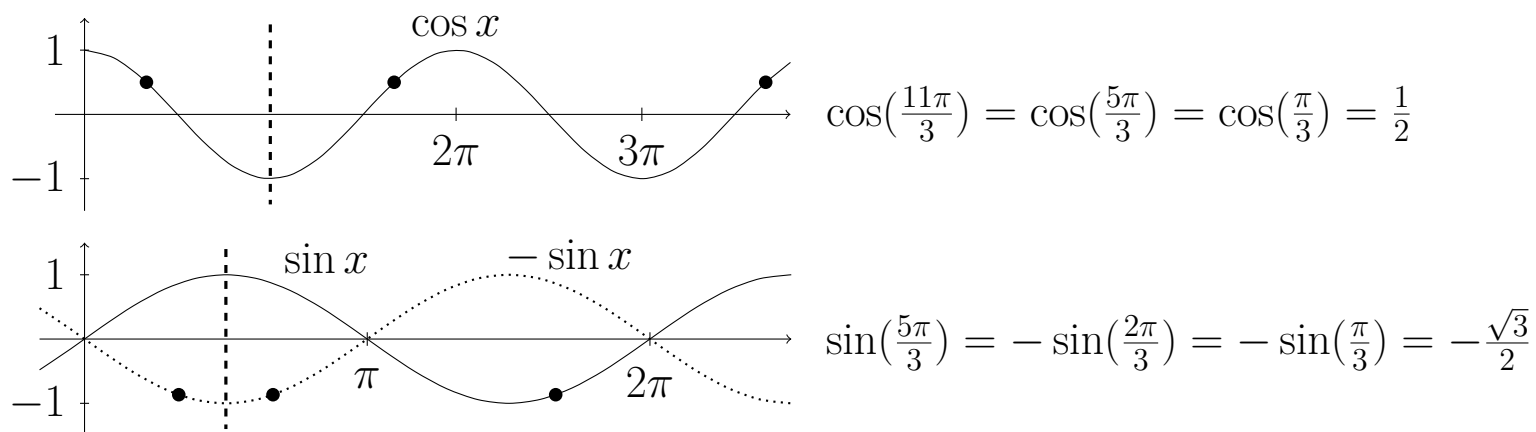
Winkel	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

Durch Ausnutzen der Periodizität und Symmetrien können viele weitere Werte hergeleitet werden.

Beispiele:



$$\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Achtung: Der Winkel φ in der Darstellung $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ ist nicht eindeutig bestimmt, da Vielfache von 2π hinzuaddiert werden können. Man verlangt oft, dass $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt und nennt $\arg z = \varphi$ dann das *Argument* von z . $r = |z|$ ist der Betrag von z . Unter Verwendung der von Euler und de Moivre stammenden Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ergibt sich die kurze Schreibweise

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Schreib-/Sprechweise für die verschiedenen Darstellungen:

$$\left. \begin{array}{ll} z = x + iy & \text{kartesische Form} \\ z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) & \text{trigonometrische Form} \\ z = r e^{i\varphi} & \text{Exponentialform} \end{array} \right\} \text{Polarkoordinaten}$$

- Multiplikation: $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Potenzieren: $(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$
- Wurzelziehen: Die Gleichung $z^n = a$ hat für $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ genau n Lösungen in $\mathbf{C}$. Berechnung der n Lösungen:

* Polarkoordinaten: $z = r e^{i\varphi}$, $a = s e^{i\alpha}$

* $z^n = a$ in Polarkoordinaten: $r^n e^{in\varphi} = s e^{i\alpha}$

* Beträge müssen übereinstimmen: $r^n = s \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{s}$ (reelles Wurzelziehen)

* Winkel müssen bis auf Vielfache von 2π übereinstimmen:

$n\varphi = \alpha + 2k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$, also erhalten wir die n verschiedenen Winkel

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k < n.$$

* Wir erhalten die n Lösungen

$$z_k = r e^{i\varphi_k} = \sqrt[n]{s} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k < n.$$

Lösen quadratischer Gleichungen

Gegeben sei $az^2 + bz + c = 0$ mit $a \neq 0$. Auch in $\mathbf{C}$ gilt die Mitternachtsformel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

man muss $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ nur als die Lösungen der Gleichung $w^2 = b^2 - 4ac$ interpretieren.

Alternativ kann man quadratisch Ergänzen und anschließend Wurzelziehen.

Beispiel: $z^2 - 6iz - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6iz - 9 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 3i)^2 = -1$

Die Lösungen von $w^2 = -1$ sind i und $-i$, also erhalten wir die Lösungen $z_1 = 4i$ und $z_2 = 2i$.

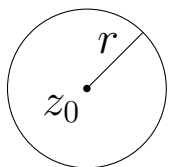
Skizzieren in $\mathbf{C}$ / wichtige geometrische Objekte

Strategie:

- Forme die definierende Gleichung um, z.B. mit $z = x + iy$ oder $z = r e^{i\varphi}$ oder $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und/oder
- Erkenne bekanntes geometrisches Objekt:

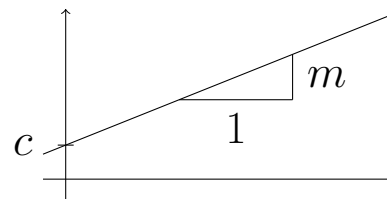
* *Kreis* mit Radius $r \in \mathbf{R}^+$ und Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}$:

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \right\}$$



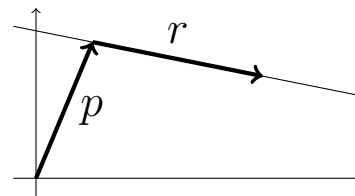
* *Gerade* mit Steigung $m \in \mathbf{R}$ und y-Achsenabschnitt $c \in \mathbf{R}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y = mx + c \right\}$$



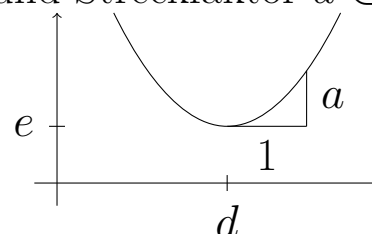
* *Gerade* mit Stützvektor $p \in \mathbf{R}^2$ und Richtungsvektor $r \in \mathbf{R}^2$:

$$\{p + \lambda r \in \mathbf{R}^2 \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$



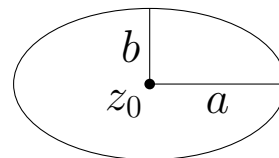
* *Parabel* mit Scheitelpunkt $\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ und Streckfaktor $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid y = a(x - d)^2 + e \right\}$$



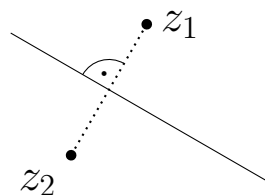
* *Ellipse* mit Hauptachsenlängen $a, b \in \mathbf{R}^+$ und Mittelpunkt $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \right\}$$



* *Mittelsenkrechte* auf der Verbindungsstrecke $\overline{z_1 z_2}$ mit $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$:

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_1| = |z - z_2|\}$$



Durch Ungleichungen erhält man aus obigen geometrischen Objekten Flächen, die durch die Objekte begrenzt werden. Beispiele:

- $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - 2i + 3| < 4\}$ ist das Innere einer Kreisscheibe. (Der Kreis selbst gehört nicht dazu.)
- $\{(\frac{x}{y}) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq 2x - 2\}$ ist die Fläche unterhalb einer Gerade. (Die Gerade selbst gehört dazu.)
- $\{(\frac{x}{y}) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + 1 < y\}$ ist die Fläche oberhalb einer Parabel. (Die Parabel selbst gehört nicht dazu.)
- $\{(\frac{x}{y}) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\}$ ist die Fläche außerhalb einer Ellipse. (Die Ellipse selbst gehört dazu.)

1.3 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Eine Funktion $f: D \rightarrow Z$ heißt

- *injektiv*, wenn aus $f(a) = f(b)$ mit $a, b \in D$ stets $a = b$ folgt. (Verschiedene Elemente aus D werden auf verschiedene Elemente von Z abgebildet.)
- *surjektiv*, wenn es für alle $z \in Z$ ein $a \in D$ gibt mit $f(a) = z$. (Alle Elemente von Z werden getroffen.)
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

In diesem Fall gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1}: Z \rightarrow D$ mit $f^{-1} \circ f = \text{id}$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}$, also $f^{-1}(f(a)) = a$ für alle $a \in D$ und $f(f^{-1}(z)) = z$ für alle $z \in Z$.

Hinweis: Für lineare und affine Funktionen liefert die Dimensionsformel weitere Möglichkeiten, um diese auf Injektivität/Surjektivität/Bijektivität zu untersuchen.