

Aufgabe 11 (5 Punkte) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei eine Matrix A_α gegeben durch vom 1.9.14

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A_α .

- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_α .

- (c) Für welche Werte von α ist A_α diagonalisierbar?

- (d) Geben Sie für diese Werte eine invertierbare Matrix T_α so an, dass $T_\alpha^{-1}A_\alpha T_\alpha$ eine Diagonalmatrix ist.

$T_\alpha =$

Aufgabe 9 (7 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei vom 2.3.15

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α .

- (b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die wenigstens ein Eigenwert von A_α mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt.

- (c) Bestimmen Sie die Eigenräume von $A_{\frac{1}{2}}$.

- (d) Bestimmen Sie die Eigenräume von A_1 .

- (e) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α diagonalisierbar ist.

Aufgabe 11 (8 Punkte) Gegeben seien die Matrizen vom 22.2.16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A .

(b) A hat den Eigenwert 0. Berechnen Sie dessen geometrische Vielfachheit.

(c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$$T = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

(e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix B .

Aufgabe 8 (5 Punkte) Gegeben sei die Matrix vom 29.8.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^T A F$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik vom 7.9.09 (240 min)

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Welche Gestalt hat die Quadrik Q ?

Aufgabe 13 (5 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 14.3.11 (240 min)

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3 + 1 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik.

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Quadrik: vom 6.9.11 (240 min)

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 11 (3 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 27.2.12

$$Q_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + kx_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 1 = 0 \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik in Abhängigkeit von k in der Form $x^\top A_k x + 2a^\top x + c = 0$ an.

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_k in Abhängigkeit von k .

$\text{Rg}(A_k) =$

Geben Sie die Menge aller $k \in \mathbb{R}$ an, für welche die Quadrik Q_k vom kegeligen Typ ist.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 25.2.13

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 8\sqrt{5}x_1 - 4\sqrt{5}x_2 + 49 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 22.2.16

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3 = 0 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ euklidische Normalform hat. Geben Sie die Normalform und die Gestalt der Quadrik an.
- (b) In Standardkoordinaten sei die Ebene $E_1: x_1 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform des Schnitts von $\mathcal{Q}$ mit dieser Ebene.
- (c) In Standardkoordinaten sei die Ebene $E_2: x_2 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform des Schnitts von $\mathcal{Q}$ mit dieser Ebene. Zeichnen Sie den Schnitt von $\mathcal{Q}$ mit E_2 in ein ebenes Koordinatensystem ein.

Aufgabe 5 (9 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 2.9.13

$$\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 21x_1^2 + 8\sqrt{3}x_1x_2 + 13x_2^2 = 225\}.$$

Bestimmen Sie euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Skizzieren Sie die Quadrik im Ausgangskordinatensystem.

Aufgabe 1 (11 Punkte) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik vom 10.3.09

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 22x_1 + 4x_2 + 7 = 0\}$$

an. Berechnen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 4.9.12

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 6x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \right\}$$

sowie die beiden Ebenen

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -1 \right\} \text{ und } \mathcal{E}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = -1 \right\}.$$

Bestimmen Sie für die Quadriken $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_1$ und $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_2$, die als Schnitt der Quadrik $\mathcal{Q}$ mit $\mathcal{E}_1$ beziehungsweise $\mathcal{E}_2$ entstehen, jeweils eine euklidische Normalform und die Gestalt.

Aufgabe 5 (9 Punkte) Gegeben sei die Quadrik vom 31.8.15

$$\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Skizzieren Sie im Ausgangskordinatensystem die Quadrik und ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ diese Normalform besitzt.

Aufgabe 7 (4 Punkte) Für jeden reellen Parameter t sei die Quadrik $\mathcal{Q}_t$ wie folgt gegeben: vom 29.8.16

$$\mathcal{Q}_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

- (a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik $\mathcal{Q}_t$ in Abhängigkeit von t in der Form $x^\top A_t x + 2a^\top x + c = 0$ an.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_t in Abhängigkeit von t .
- (c) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik $\mathcal{Q}_5$.

Aufgabe 8 (6 Punkte) Gegeben sei eine Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0 \right\}$ mit vom 27.2.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix F mit der Eigenschaft, dass $F^T A F$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie zudem $F^T a$ an.

$$F = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$F^T a = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik Q :

$$\boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q :

$$\boxed{\phantom{\text{Ellipsoid}}}$$

Aufgabe 5 (11 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

vom 24.2.14

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 + 18 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Geben Sie alle auf dem Weg zur euklidischen Normalform verwendeten Koordinatensysteme an und skizzieren Sie die Quadrik und alle in Zwischenschritten verwendeten Koordinatensysteme im Ausgangskordinatensystem.

Aufgabe 4 (9 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

vom 6.9.10 (240 min)

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 + 12x_2 + 7 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 10 (10 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 2.3.15

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2)^2 + 4(2x_1 - x_2)^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(2, 4) =$

(b) Die Niveaumenge $E := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = f(2, 4) \right\}$, die den Punkt $(2, 4)$ enthält, ist eine Ellipse. Geben Sie die symmetrische Matrix A für die Matrixbeschreibung

$$x^\top A x + 2a^\top x - f(2, 4) = 0$$

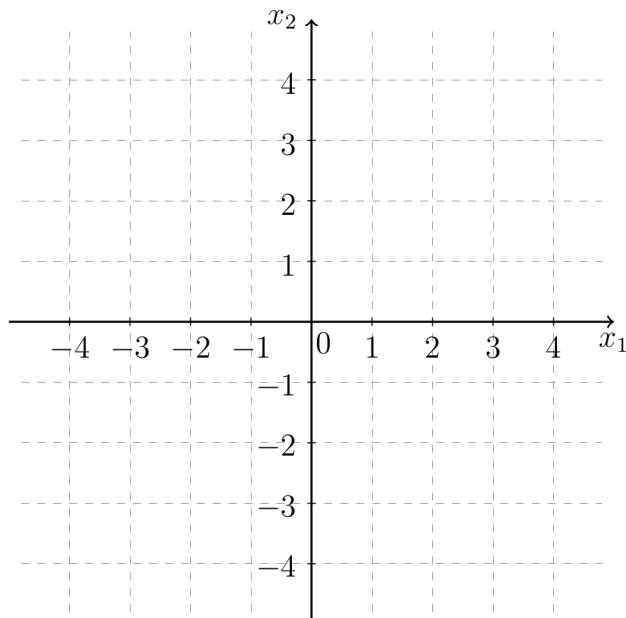
von E an: $A =$

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem E euklidische Normalform hat.

$\mathbb{F} =$

(d) Geben Sie die Halbachsenlängen der Ellipse E an:

(e) Skizzieren Sie E sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$:



Aufgabe 4 (9 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik vom 8.3.10 (240 min)

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Aufgabe 6 (8 Punkte) vom 7.9.09 (240 min)

- (a)**
- Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

- (b)**
- Gegeben ist die Quadrik
- $Q_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_3 = 0 \right\}$
- . In welche Darstellung wird
- Q_2
- überführt, wenn die Transformation

$$x = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} y$$

auf sie angewandt wird?

Aufgabe 1 (8 Punkte) vom 04.09.17

- (a)**
- Seien
- $A, D, T \in \mathbb{R}^{d \times d}$
- für ein
- $d \in \mathbb{N}$
- . Weiter sei
- T
- invertierbar und es gelte
- $T^{-1}AT = D$
- .

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $A^n = TD^nT^{-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (b)**
- Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch T^{-1} an.

Aufgabe 5 (12 Punkte) vom 13.10.17

Seien $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ Koordinatensysteme von $\mathbb{R}^2$.

Bezüglich $\mathbb{E}$ heißen die Koordinaten x_1, x_2 . Bezüglich $\mathbb{F}$ heißen die Koordinaten y_1, y_2 .

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto 4x_1^2 + x_2^2$. Sei die Quadrik Q bezüglich $\mathbb{E}$ beschrieben durch

$$Q: 4x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

also als Niveaumenge von f zum Niveau 16.

- (a)**
- Zeichnen Sie
- $\mathbb{F}$
- und
- Q
- in das Standardkoordinatensystem
- $\mathbb{E}$
- ein.

- (b)**
- Sei
- P
- der Punkt mit
- ${}_{\mathbb{E}}P = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- . Liegt der Punkt
- P
- auf der Quadrik
- Q
- ?

- (c)**
- Berechnen Sie den Gradienten
- $\nabla f(x_1, x_2)$
- .

- (d)**
- Sei
- g
- die Tangente an die Quadrik
- Q
- durch den Punkt
- P
- aus
- (b)**
- .

Berechnen Sie einen Richtungsvektor von g .

Zeichnen Sie P und g in die Zeichnung aus **(a)** ein.

- (e)**
- Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen
- ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$
- und
- ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$
- .

- (f)**
- Geben Sie eine Beschreibung der Quadrik
- Q
- bezüglich
- $\mathbb{F}$
- an.