

Aufgabe 14 (8 Punkte) Wir betrachten für $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen vom 14.3.11 (240 min)

$$\mathcal{E}_3: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für $\mathbb{R}^2$ die Basen

$$\mathcal{B}_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Matrix

$$\varepsilon_3 f_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen

$$c^{\text{id}}_{\varepsilon_3} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{B}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

sowie die Abbildungsmatrix in neuen Basen

$$c^f_{\mathcal{B}_2} =$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Gegeben sei die lineare Abbildung vom 24.2.14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.
- (b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben sei die lineare Abbildung vom 31.8.15

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4: \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei E_4 die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Sei E_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

Sei $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{E_4}f_{E_2}$ und ${}_{E_4}f_B$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei vom 1.9.14

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei E_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei E_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei

$$B: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei

$$C: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{E_2}f_{E_3}$, ${}_{E_2}f_C$, und ${}_Bf_C$.

Aufgabe 10 (4 Punkte) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei g die Gerade mit der Gleichung $x_2 = 2x_1$ und σ die Spiegelung an dieser Geraden. Wir betrachten die Basis $B: b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis E . vom 22.2.16

Berechnen Sie:

$${}_B\sigma(b_1) =$$

$${}_B\sigma_B =$$

$${}_E\sigma(b_1) =$$

$${}_E\sigma_E =$$

vom 29.8.16

$$B: \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$C: \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Basen gegeben. Stellen Sie C_4 bezüglich der Basis B dar.

$$C_4 = \boxed{} B_1 + \boxed{} B_2 + \boxed{} B_3 + \boxed{} B_4.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}: A \mapsto A + A^T$. Bestimmen Sie:

${}_B \text{id}_C =$, ${}_B \varphi_B =$, ${}_B \varphi_C =$

$\dim(\text{Bild}(\varphi)) =$

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben sei eine lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vom 4.9.12

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \text{ Weiter sei } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die durch “.” gekennzeichneten freien Stellen mit Elementen aus $\{0, 1\}$ so aufgefüllt werden können, dass die entsprechende Eigenschaft erfüllt ist. Geben Sie, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Matrix A an.

- (a) $\text{Rg}(A) = 3$
- (b) $\dim \text{Kern}(\alpha) = 2$
- (c) $\text{Rg}(A|b) = \text{Rg}(A)$
- (d) Die Abbildung α ist surjektiv und ihr Kern hat die Dimension zwei.

Aufgabe 3 (15 Punkte) vom 6.3.07 (120 min)

Bestimmen Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$, welche die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

abbildet.

Aufgabe 5 (8 Punkte) Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte vom 3.9.07 (120 min)

$$P = (1, -1) \quad \text{und} \quad Q = (-2, 0)$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt.

$$\mathbb{G}_{\mathbb{F}} \kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}}} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}}} \right)$$

Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

$$\mathbb{F}_G \kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|c} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} & \end{array} \right)$$

Geben Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $\kappa_{\mathbb{G}_F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Gegeben sind der Punkt $P = (-2, -1)$, das Koordinatensystem vom 7.9.09 (240 min)

$$\mathbb{F} = \left\{ P; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ sowie die affine Abbildung α in Koordinaten bezüglich $\mathbb{E}$:

$${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$. Geben Sie die Koordinatenbeschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe 4 (16 Punkte) vom 6.3.07 (120 min)

Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ ist die Abbildung

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (2x + 2y + 1, -y + 1, y + 2z + 2)$$

bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ gegeben. Der Punkt $P = (2, -2, 2)$ und die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bilden das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$.

(a) Bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ lautet die Abbildung

$$\mathbb{E} \alpha_{\mathbb{E}}(v) =$$

(b) Die Koordinatentransformation von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{F}$ und umgekehrt lauten

(c) Geben Sie eine Beschreibung von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$$\mathbb{R} \alpha_{\mathbb{R}}(v) =$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen. vom 8.3.10 (240 min)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (12 Punkte) vom 4.3.08 (120 min)

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe 9 (9 Punkte) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = ((0, 0, 0)^T; (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T)$ der Punkt $P = (6, 2)^T$, die beiden Vektoren $v = (-10, 5)^T$ und $w = (2, 4)^T$, sowie die affine Abbildung

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad \text{vom 27.2.12}$$

Die Punkte P_1 und P_2 sind durch die Beziehungen $\overrightarrow{PP_1} = v$ und $\overrightarrow{PP_2} = w$ bestimmt.

Die Punkte Q, Q_1 und Q_2 sind die entsprechenden Bildpunkte: $Q = \alpha(P)$, $Q_1 = \alpha(P_1)$, $Q_2 = \alpha(P_2)$.

(a) Geben Sie für die Punkte P_1 und P_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$${}_{\mathbb{E}}P_1 = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}P_2 = \boxed{}$$

(b) Geben Sie für die Punkte Q, Q_1, Q_2 die Koordinaten im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

$${}_{\mathbb{E}}Q = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}Q_1 = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{E}}Q_2 = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte Q, Q_1, Q_2 bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = (P; v, w)$ und geben Sie dann die Darstellung der Abbildung α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an. (Die allgemeine Koordinatentransformation muss dazu nicht bestimmt werden.)

$${}_{\mathbb{F}}Q = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}Q_1 = \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}Q_2 = \boxed{}$$

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = \boxed{} \quad {}_{\mathbb{F}}x + \boxed{}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix vom 14.3.11 (240 min)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte an.

Aufgabe 12 (3 Punkte) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Punkte $P = (2, 1)^\top$, $Q = (4, 2)^\top$ und $R = (3, 3)^\top$. Das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; v, w)$ wird durch den Punkt P und die beiden Vektoren $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$ gebildet. vom 4.9.12

(a) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Geben

Sie die Koordinaten des Punktes M bezüglich
des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$${}_{\mathbb{F}}M =$$

(b) Die affine Abbildung α vertauscht die Punkte P, Q und R zyklisch, d.h. $\alpha(P) = Q$, $\alpha(Q) = R$ und $\alpha(R) = P$. Geben Sie die Darstellung von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) =$$

$${}_{\mathbb{F}}x +$$

Aufgabe 10 (4 Punkte) vom 24.2.14

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A .

$$\text{Sp}(A) =$$

(b) Der Vektor $(1, 1, 1)^\top$ ist ein Eigenvektor von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1 .

$$\lambda_1 =$$

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A .

$$\chi_A(\lambda) =$$

(d) Welche weiteren Eigenwerte außer λ_1 hat A ?

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben ist die Matrix
vom 7.9.09 (240 min)

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A . $\text{Sp } A =$

$\det A =$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A . $\chi_A(\lambda) =$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 =$$

(d) Bestimmen Sie die Menge M aller Eigenwerte von A .

$$M =$$

Aufgabe 13 (4 Punkte) Gegeben ist die Matrix vom 6.9.10 (240 min)

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 2i \\ -5i & -3i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\det(A) = \boxed{}$$

$$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{}$$

$$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{}$$

sowie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A .

$$\lambda_1 = \boxed{}$$

$$\lambda_2 = \boxed{}$$

$$v_1 = \boxed{}$$

$$v_2 = \boxed{}$$

Aufgabe 12 (4 Punkte) Gegeben ist die Matrix vom 6.9.11 (240 min)

$$A = \begin{pmatrix} a + bi & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von a und b an.

$$\det A = \boxed{}$$

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ haben alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1?

$$\boxed{}$$

(c) Für welche Werte von a und b ist der Vektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor?

Aufgabe 10 (3 Punkte) Gegeben ist die Matrix vom 4.9.12

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix A .

$$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{}$$

$$\det(A) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix A .

$$\lambda_1 = \boxed{}, V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, V(\lambda_2) = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Geben Sie eine reelle Matrix an, die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3 vom 2.9.13

und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -2 hat.

Aufgabe 12 (7 Punkte) Bestimmen Sie die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte folgender Matrizen und bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum. vom 25.2.13

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Gegeben seien die Matrizen
vom 27.2.12

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 1 (6 Punkte) vom 2.3.15

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Spur von A_α .
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A_α .
- (c) Zeichnen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{C} \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ so, dass } c \text{ Eigenwert von } A_\alpha \text{ ist}\}$ in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 11 (6 Punkte) Gegeben seien die Matrizen A und B :

vom 31.8.15

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix A .

$$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{}, \quad \det(A) = \boxed{}.$$

Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A :

--

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix B :

$$\chi_B(\lambda) =$$

Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix B :

--

Aufgabe 9 (5 Punkte) Gegeben seien

vom 6.9.10 (240 min)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \kappa: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av + b.$$

Bestimmen Sie einen Fixpunkt von κ , das heißt: bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\kappa(x) = x$.

$$x =$$

Die Matrix A beschreibt eine Drehung um den Winkel

im Gegenuhrzeigersinn.

Welche Eigenschaften hat die Matrix A ? Tragen Sie entweder „wahr“ oder „falsch“ ein.

quadratisch

eigentlich orthogonal

symmetrisch

hermitesch

Aufgabe 5 (5 Punkte) vom 10.3.09

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die v_1 als Eigenvektor zum Eigenwert -2 und v_2 als Eigenvektor zum Eigenwert 2 besitzt.

$$A =$$

(b) Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Matrix B_α besitzt:

Genau einen reellen Eigenraum für $\alpha \in$

Genau zwei reelle Eigenräume für $\alpha \in$

Keinen reellen Eigenraum für $\alpha \in$

Aufgabe 10 (5 Punkte) Gegeben sei die reelle Matrix vom 2.9.13

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \alpha(x) = Ax$.

(a) Bestimmen Sie den Kern von α .

Kern(α) =

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A .

$\chi_A(\lambda) =$

(c) Welche Eigenwerte hat A ?

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert seine algebraische und seine geometrische Vielfachheit an.

Aufgabe 9 (7 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei vom 2.3.15

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α .

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die wenigstens ein Eigenwert von A_α mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Eigenräume von $A_{\frac{1}{2}}$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume von A_1 .

(e) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte) vom 13.10.17

Seien $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ Koordinatensysteme von $\mathbb{R}^2$.

Bezüglich $\mathbb{E}$ heißen die Koordinaten x_1, x_2 . Bezüglich $\mathbb{F}$ heißen die Koordinaten y_1, y_2 .

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto 4x_1^2 + x_2^2$. Sei die Quadrik Q bezüglich $\mathbb{E}$ beschrieben durch

$$Q: 4x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

also als Niveaumenge von f zum Niveau 16.

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{F}$ und Q in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ ein.

(b) Sei P der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Liegt der Punkt P auf der Quadrik Q ?

(c) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x_1, x_2)$.

(d) Sei g die Tangente an die Quadrik Q durch den Punkt P aus (b).

Berechnen Sie einen Richtungsvektor von g .

Zeichnen Sie P und g in die Zeichnung aus (a) ein.

(e) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(f) Geben Sie eine Beschreibung der Quadrik Q bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe 4 (6 Punkte) vom 13.10.17

Sei $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto Ax$ die Drehung mit $\delta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und mit $\delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A .

(b) Bestimmen Sie die Drehachse von δ . Bestimmen Sie den Cosinus des Drehwinkels von δ .

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B: b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$

so, dass die Gerade $L(b_1)$ die Drehachse von δ ist.

(d) Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\delta_B$ für die Orthonormalbasis B aus (c).

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sei die Orthonormalbasis $B: b_1, b_2, b_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit vom 04.09.17

$b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Weiter bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Für die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gelte $\varphi(b_1) = -b_1$, $\varphi(b_2) = b_2$ und $\varphi(b_3) = -b_3$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_B\varphi_B$ von φ bezüglich B .

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\text{id}_B$ und ${}_B\text{id}_E$.

(c) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_E\varphi_E$ von φ bezüglich E .

Aufgabe 2 (3 Punkte) Eine reelle 4×4 -Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ besitze den komplexen Eigenwert

$\lambda_1 = 3 + i\sqrt{2}$, habe den Rang 3 und die Spur $\sqrt{7}$. Geben Sie alle Eigenwerte von A an.

vom 04.09.17