

Aufgabe 3 (10 Punkte) Gegeben sei die Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3, f_4 von $\mathbb{R}^4$ an mit

$$L(f_1) = L(v_1),$$

$$L(f_1, f_2) = L(v_1, v_2),$$

$$L(f_1, f_2, f_3) = L(v_1, v_2, v_3),$$

$$L(f_1, f_2, f_3, f_4) = L(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

(b) Es sei A die Matrix mit den Spalten f_1, f_2, f_3, f_4 . Geben Sie $A^T A$ an.

Aufgabe 10 (7 Punkte) vom 6.9.11 (240 min)

Gegeben ist die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$$\alpha = \boxed{} \qquad \beta = \boxed{}$$

(b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \gamma v_2 + \delta v_3$.

$$\gamma = \boxed{} \qquad \delta = \boxed{}$$

(c) Geben Sie eine Basis $B \subseteq M$ des von M erzeugten Vektorraums $W = L(M)$ aus Vektoren von M an.

$B :$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\tilde{B}$ für W in dem Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren auf die Basis B anwenden.

Aufgabe 12 (2 Punkte) Seien $v_1 = (5, 3, 2)^\top$ und $v_2 = (2, 4, 6)^\top$. Berechnen Sie: vom 1.9.14

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{} \quad \text{und} \quad \langle 3v_2 | v_1 \rangle + \langle 7v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (3 Punkte) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass folgende Vektoren ein Rechtssystem bilden:
vom 29.8.16

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

Berechnen Sie:

$$|(u+v) \times (u-v)| = \boxed{}, \quad \langle u-3w | v+2w \rangle - \langle v \times u | v \times w \rangle = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte) Es seien $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch
vom 8.3.10 (240 min)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den Winkel α zwischen b_1 und b_2 .
 (b) Bestimmen Sie $f_2 \in L(b_1, b_2)$ so, dass f_2 normiert und senkrecht zu b_1 ist.
 (c) Bestimmen Sie f_3 so, dass b_1, f_2, f_3 ein Rechtssystem bilden.

Aufgabe 2 (7 Punkte) Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = (1, c, 1)^T$ und $v_2 = (2, 1, 2)^T$ für $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Durch v_1, v_2 wird ein von c abhängiges Parallelogramm Δ_c mit Fläche F_c aufgespannt. Bestimmen Sie c so, dass $F_c < 1$ wird. vom 6.9.10 (240 min)

Aufgabe 9 (2 Punkte) Entscheiden Sie, welche der nachstehenden Folgerungen wahr sind für alle möglichen Wahlen der Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, und tragen Sie „wahr“ oder „falsch“ ein. vom 25.2.13

- (a) Falls $c \in L(a, b)$, so gilt:
 (b) Falls $\langle a|b \rangle = \langle b|c \rangle = \langle c|a \rangle = 0$ und $\det(a, b, c) \neq 0$ erfüllt ist, so gilt:

$a \in L(c)$ ☐
 a, b, c sind linear abhängig ☐
 $a \in L(b, c)$ ☐

a, b, c ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ☐
 $c, a \times b$ sind linear abhängig ☐
 a, b, c ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ☐

Aufgabe 10 (3 Punkte) Gegeben sind drei Punkte $P_1 = (0, 1, 2)$, $P_2 = (3, 6, 9)$ und $P_3 = (2, 4, 8)$ im Raum $\mathbb{R}^3$. Durch diese Punkte ist die Ebene E gegeben. vom 27.2.12

Geben Sie zwei Vektoren v und w an, welche die Ebene E aufspannen und bestimmen Sie einen Normalenvektor n der Ebene E .

$$v = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad w = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad n = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an.

vom 2.9.13

- $S =$

- $$n =$$

- $$\alpha =$$

- | |
|--|
| |
|--|

- vom 6.9.10 (240 min)

- $$g := \left\{ P + tu \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \ell_k := \left\{ Q + sv_k \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Sei E die Ebene senkrecht zu f_1 durch den Punkt P . Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene vom Ursprung O .

Aufgabe 1 (4 Punkte) Gegeben seien die Geraden vom 25.2.13

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei U der reelle Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, der von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

(a) Welche der gegebenen Geraden liegen in U ?

(b) Liegt die Menge $A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}, y \in \mathbb{R}, z = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right\}$ in U ?

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben seien die folgenden Ebenen im Raum $\mathbb{R}^3$: vom 1.9.14

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 10x_2 - x_3 = -28\},$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_2 - 2x_3 = 8\},$$

$$E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -12\}.$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei eine Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch vom 14.3.11 (240 min)

$$E_2 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$$

(a) Bestimmen Sie die Ebenen E_1 und E_3 parallel zu E_2 , welche von E_2 jeweils den Abstand 3 haben.

Wir betrachten eine Gerade g durch den Ursprung, welche E_1 im Punkt A schneidet, E_2 im Punkt B und E_3 im Punkt C . Dabei betragen die Abstände $|AB|$ und $|BC|$ jeweils 6.

(b) Machen Sie eine Skizze des geometrischen Sachverhalts.

(c) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Gerade g die Ebenen E_1, E_2 und E_3 schneidet. Ermitteln Sie dabei den Winkel zur jeweiligen Normalen der Ebene.

Aufgabe 4 (6 Punkte) vom 7.9.09 (240 min)

(a) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$f_1 = (-1, 0, 1)^\top, \quad f_2 = (3, c, 0)^\top, \quad f_3 = (-2, 1, c)^\top$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2 (3 Punkte) Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem vom 4.9.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Matrizen X mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung vom 25.3.13

$$AX = B$$

erfüllen, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch vom 29.8.16

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & \alpha & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ genau eine Lösung?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $A_\alpha^\top A_\alpha$ eine Diagonalmatrix?

Aufgabe 8 (3 Punkte) vom 2.3.15

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\det(A) = \boxed{}, \quad \det(B) = \boxed{}, \quad \det(\sqrt[4]{5}B) = \boxed{}.$$

Aufgabe 1 (3 Punkte) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix vom 27.2.12

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Lösungen x des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix nicht invertierbar?

Geben Sie diese α wahlweise in der Form $\alpha = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ oder in der Form $\alpha = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & i \end{pmatrix}$$

vom 9.3.09 (120 min)

Aufgabe 2 (9 Punkte) vom 8.3.10 (240 min)

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A .
- (b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.
- (c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.
- (d) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

Aufgabe 3 (6 Punkte) vom 6.9.11 (240 min)

Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Für welche Werte des Parameters α ist das System eindeutig lösbar?
- (b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.
- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $\alpha = -3$.
- (d) Gibt es einen Parameterwert α , für den in einer Lösung des Gleichungssystems alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3$) annehmen?

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei t ein reeller Parameter. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:
vom 24.2.14

$$\begin{aligned} x + ty + z &= 0 \\ x + (1 + 2t)y + (t + 2)z &= 0 \\ x + y + tz &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems.
- (b) Für welche t ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
- (c) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei α ein reeller Parameter. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem vom 31.8.15

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x & + & y & + & \alpha z & = & 1, \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1, \\ \alpha x & + & y & + & z & = & -2. \end{array}$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems.
- (b) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
- (c) Für welche α ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?

Aufgabe 5 (6 Punkte) vom 27.2.17

- (a) Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems $S: Ax = 0$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Element von $\mathcal{L}(S)$ ist.

- (c) Geben Sie den Rang und die Determinante von A an.

Aufgabe 8 (8 Punkte) vom 14.3.11 (240 min)

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A .
- (b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.
- (c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.
- (d) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Orthonormalbasis u_1, u_2, u_3 von $L(v_1, v_2, v_3)$ so an, dass $L(v_1) = L(u_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2)$ sind.

$$u_1 = \boxed{}, \quad u_2 = \boxed{}, \quad u_3 = \boxed{}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) vom 13.10.17

Seien $u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $R : u, v, w$ ein Rechtssystem ist: $w =$

(b) Berechnen Sie $u \times w =$

(c) Berechnen Sie $(u \times (u + w)) \times w =$ und $u \times ((u + w) \times w) =$.

(d) Sei D das Dreieck, dessen Ecken die Ortsvektoren u , v und $3u + v$ haben.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von D :

(e) Bestimmen Sie die Anzahl der Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$,

für welche $B : u, v, x$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist:

Aufgabe 9 (5 Punkte) Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
vom 13.10.17

Bestimmen Sie die Spur: $\text{Sp}(A_t) =$

Bestimmen Sie die Determinante: $\det(A_t) =$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom: $\chi_{A_t}(\lambda) =$

Für welche Werte von t ist A_t invertierbar?

Für welche Werte von t ist A_t positiv definit?