

Aufgabe 4 (6 Punkte) vom 5.3.07 (120 min)

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe einer vollständigen Induktion.**Aufgabe 3 (4 Punkte) vom 3.3.08 (120 min)**

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe einer vollständigen Induktion.**Aufgabe 1 (3 Punkte)** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge, die durch
vom 24.2.14

$$f_0 := 0, f_1 := 1 \text{ und } f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$$

definiert ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^n f_j^2 = f_n f_{n+1}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
vom 29.8.16

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1 (5 Punkte) vom 8.3.10 (240 min)Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{z\pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$ die Formel

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der vollständigen Induktion.Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, ohne Beweis benutzen:

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x).$$

Aufgabe 1 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 e^{-x}$.
vom 31.8.15(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (x^2 - 2kx + (k-1)k) e^{-x}.$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt der Graph von $f^{(k)}$ an der Stelle $x = 6$ eine waagrechte Tangente?**Aufgabe 2 (8 Punkte)** Gegeben ist die Funktion
vom 25.2.13

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x-1) \ln(2x-2) - x + 1.$$

(a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f .(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für $k > 1$ ist

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-2)!}{(x-1)^{k-1}}.$$

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 2)$ von f an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 5 (12 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 8.3.10 (240 min)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Menge D der reellen Stellen x , an denen der Funktionsterm definiert ist. Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Polstellen.
- (b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .
- (c) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $x \in [-4, 4]$.
- (d) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

- (e) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- (f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil (e).

Aufgabe 10 (4 Punkte) vom 14.3.11 (240 min)

- (a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$z(2 - i) = 1 + 3i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- (b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung vom 7.9.09 (240 min)

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte) vom 9.3.09 (120 min)

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2z + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- (b) Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$z\bar{z} = 2$$

$$|z - \bar{z}| + |z + \bar{z}| = 4$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. vom 8.3.10 (240 min)

Aufgabe 9 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt: vom 1.9.14

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Geben Sie die komplexe Zahl $-32i$ in Polarkoordinaten an.
vom 27.2.12

Bestimmen Sie diejenigen Lösungen der Gleichung $z^5 = -32i$, deren Argumente im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ liegen. Die Lösungen können in der Form $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ angegeben werden.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Zeichnen Sie die Lösungen der Gleichung
vom 22.2.16

$$w^3 = -8i$$

in die komplexe Zahlenebene ein.

Aufgabe 11 (4 Punkte) vom 4.9.12

(a) Geben Sie $z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ in Polarkoordinatendarstellung an.

Berechnen Sie $1 - \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)^{28} =$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $-8i = z^3$ an. (Die Lösungen können in Polarkoordinatendarstellung angegeben werden.)

Aufgabe 9 (3 Punkte) vom 29.8.16

(a) Berechnen Sie den Betrag $r \in \mathbb{R}_0^+$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ der komplexen Zahl

$$z = (\sqrt{3} + i)^4.$$

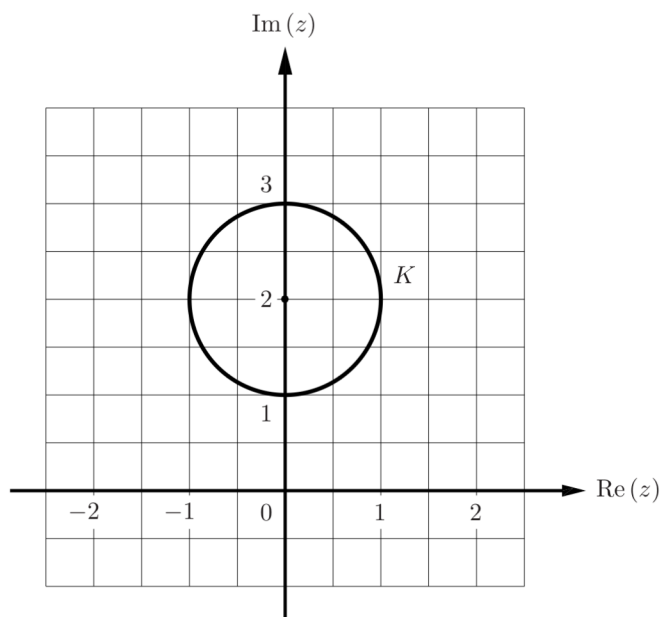
$$r = \text{ }, \quad \varphi = \text{ }$$

(b) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass der rechts abgebildete Kreis K in der komplexen Zahlenebene durch die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - 4\operatorname{Im}(z) = s\}$$

beschrieben wird.

$$s = \text{ }$$



Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben sind die Mengen
vom 7.9.09
(240 min)

$$M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |(1+i)z| \leq 4\sqrt{2}\right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}, z \neq 0\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1 , M_2 und $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 1 (6 Punkte) vom 2.3.15

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Spur von A_α .
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A_α .
- (c) Zeichnen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{C} \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ so, dass } c \text{ Eigenwert von } A_\alpha \text{ ist}\}$ in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 5 (3 Punkte) vom 22.2.16

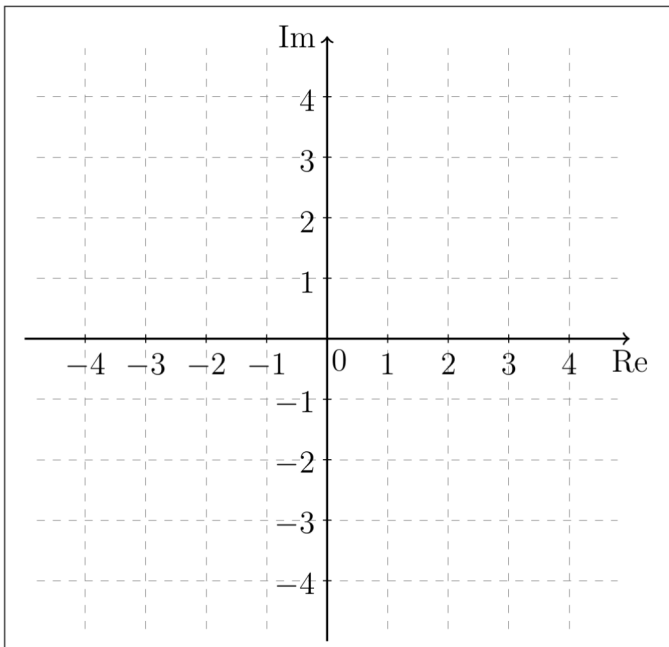
Gegeben sei die Abbildung

$$f: \mathbb{C} \setminus \{7\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{1}{z-7}.$$

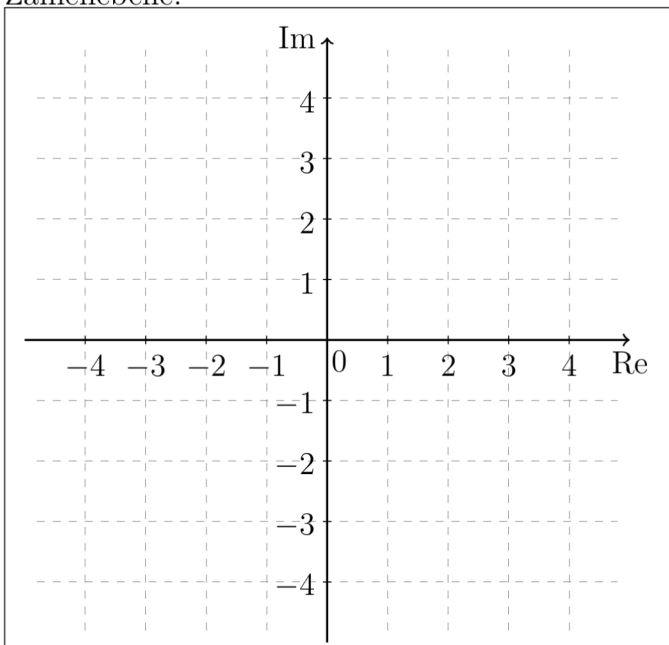
Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 14 (5 Punkte) vom 1.9.14

- (a) Zeichnen Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq -1 \text{ und } \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)+1} > 1\right\}$ in der komplexen Zahlenebene.



- (b) Sei $z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12}))$. Zeichnen Sie die Punkte $u = z^3$ und $v = z^3 - 3i$ in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 1 (3 Punkte) Gegeben sind die Mengen vom 6.9.10 (240 min)

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |iz - 1| \leq 4 \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 2 \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < -1 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1 , M_2 und $M_1 \setminus M_2$.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Gegeben sind die Mengen vom 6.9.11 (240 min)

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq \operatorname{Im}(z + i) \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = \frac{4}{|\bar{z} + i|} \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

(a) Skizzieren Sie M_1 und M_2 .

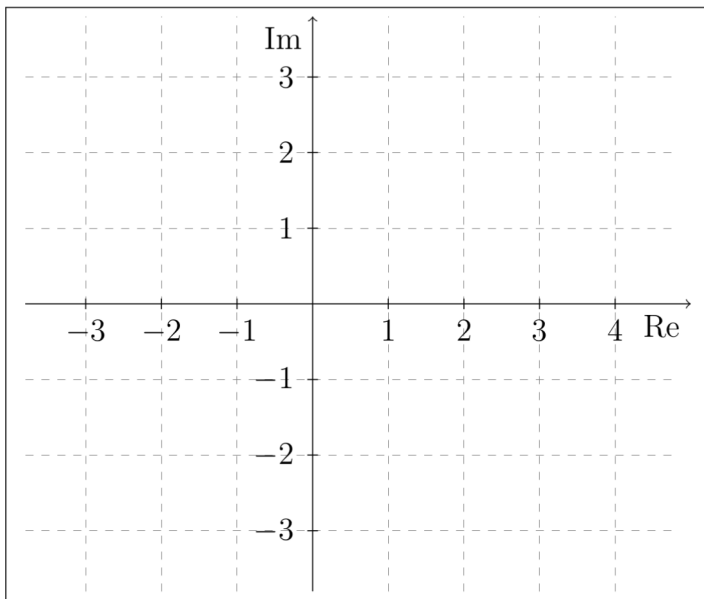
(b) Lesen Sie aus Ihrer Skizze ab, welche der komplexen Zahlen, die in beiden Mengen liegen, den kleinsten Betrag haben (d.h. am nächsten an $z = 0$ liegen) und geben Sie diesen minimalen Betrag an.

Aufgabe 9 (3 Punkte) Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$. vom 4.9.12

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| \leq \frac{9}{4}\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = (\operatorname{Re}(z))^2\}$



Aufgabe 8 (4 Punkte) vom 25.2.13

(a) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen z , die der Bedingung

$$1 \leq |z - 2 + 2i| \leq 2\sqrt{2}$$

genügen.

(b) Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$|z - 4 - 6i| = |z + 2 - 4i|.$$

Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass die Lösungsmenge auch beschrieben wird als

$$\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

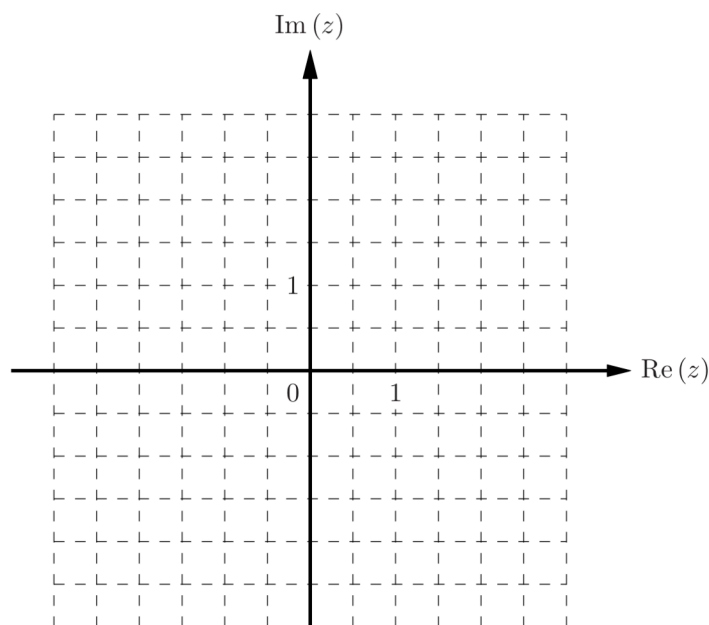
Aufgabe 8 (6 Punkte) vom 31.8.15

(a) Es sei $w = 5e^{\frac{1}{3}\pi i} - 3\sqrt{3}e^{\frac{1}{6}\pi i}$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Re}(w) = \boxed{}, \quad \operatorname{Im}(w) = \boxed{},$$

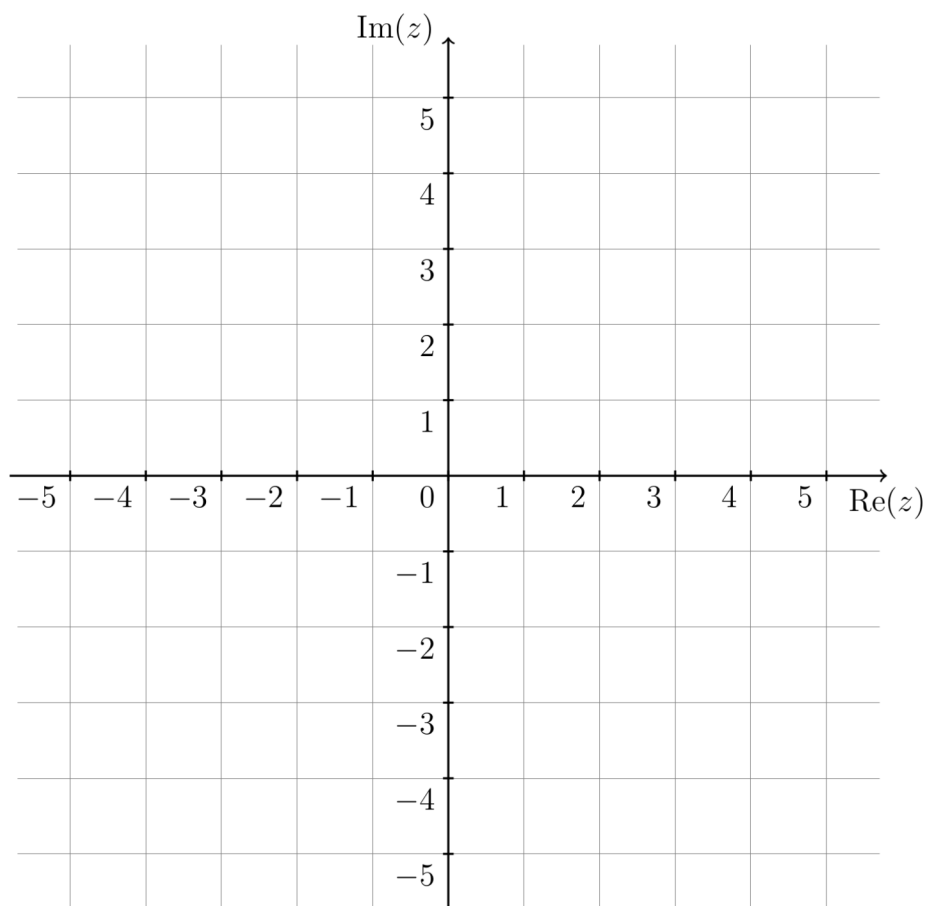
und zeichnen Sie w in die komplexe Zahlenebene ein.

(b) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| \operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) \right| > 1 \right\}$ in der komplexen Zahlenebene.

**Aufgabe 11 (6 Punkte) vom 27.2.17**

(a) Zeichnen Sie $z_1 = \frac{10}{1-2i}$, $z_2 = \frac{1}{2}(1-i)$ und $z_3 = \frac{1}{2}(1-i)^7$ in die komplexe Zahlenebene ein.

(b) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z+3-i| \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z+2i) \leq 3 \right\}$.



Aufgabe 7 (4 Punkte) Es seien die Abbildungen

vom 15.12.12 (Scheinklausur)

$$f_1: [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]: x \mapsto -2x^2 + 1$$

$$f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto i(\overline{2z})^2$$

$$f_3: \mathbb{C} \setminus \{2i\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{1}{z-2i}$$

$$f_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto -\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z)$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				

Aufgabe 6 (2 Punkte) Geben Sie eine Abbildung $f: [2, 4] \rightarrow [4, 7]$ an, die surjektiv und nicht injektiv ist.
vom 13.12.14 (Scheinklausur)

Aufgabe 6 (4 Punkte) vom 12.12.15 (Scheinklausur)

Es seien die Abbildungen

$$f_1: \mathbb{C} \rightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\right\}: z \mapsto z\bar{z} - 1$$

$$f_2: \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto -\operatorname{Im}(z) + i \operatorname{Re}(z)$$

$$f_4: \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\right\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x-2)^2 - 1$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv				
surjektiv				

Aufgabe 7 (4 Punkte) vom 14.12.13 (Scheinklausur)

(a) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Abbildung: $f: \mathbb{R} \setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x-6} + 3$

(b) Bestimmen Sie für die Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto (z+3i)^2$

zwei verschiedene Werte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Geben Sie z_1 und z_2 in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $z_2 =$

(c) Geben Sie eine Abbildung

$$f: [-2, 2] \rightarrow [1, 6]$$

an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 1 (8 Punkte) vom 04.09.17

(a) Seien $A, D, T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei T invertierbar und es gelte $T^{-1}AT = D$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $A^n = TD^nT^{-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch T^{-1} an.

Aufgabe 6 (4 Punkte) vom 13.10.17

(a) Bestimmen Sie folgende Reihenwerte.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} = \boxed{}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\pi^2}{16} \right)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} = \boxed{}$$

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie: $\operatorname{Re}(e^{2\pi it/3}) = \boxed{}$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(2 \operatorname{Re}(e^{2\pi ik/3}))_{k \in \mathbb{N}}$:

Aufgabe 7 (6 Punkte) vom 04.09.17

(a) Geben Sie $e^{\frac{13}{6}\pi i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(b) Bestimmen Sie den Betrag sowie den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \frac{10e^{\frac{13}{6}\pi i}}{i - 2}$.

$$|z| = \boxed{}, \quad \operatorname{Im} z = \boxed{}.$$

(c) Es sei $M := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg(z^3) = \frac{\pi}{2}\}$. Weiter sei $z \in M$.

Geben Sie alle Werte aus $[0, 2\pi)$ an, die $\arg(z)$ annehmen kann:

Skizzieren Sie die Menge M im unten vorgezeichneten Koordinatensystem.

