

Willkommen zur
Prüfungsvorbereitung
HM 1/2 für Ingenieure
des MINT-Kollegs
Baden-Württemberg an
der Universität Stuttgart!

Autor: Andreas App



Kontaktdaten

Dr. Andreas App
Raum 1.018

Sekretariat:
Frau Rieg
Raum 0.017
Azenbergstr. 12
stuttgart@mint-kolleg.de



Angebote des MINT-Kollegs

- Vorkurse ab Mitte September direkt vor dem Studienbeginn
- Studienvorbereitende (propädeutische) Kurse, einsemestrige Kurse ab dem Sommersemester oder zweisemestrige Kurse ab dem Wintersemester
- Repetitorien und Übungen in den Fächern Höhere Mathematik, Technische Mechanik und weitere
- BSc. Bauingenieurwesen, Chemie, Maschinenbau achtsemestrig mit integrierter MINT-Kolleg Begleitung
- Schlüsselqualifikationen
- Offener Lernraum
- Prüfungsvorbereitungskurse

Skript

<http://ilias.uni-stuttgart.de/>

- ⇒ Zentrale Institutionen
- ⇒ MINT-Kolleg Baden-Württemberg
- ⇒ Studienbegleitende Kurse
- ⇒ Mathematik



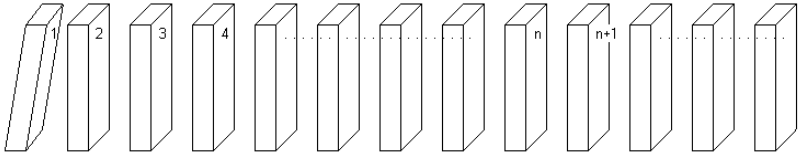
Themen

- Tag 1: Vollständige Induktion, Komplexe Zahlen, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
- Tag 2: Vektorrechnung, LGS, Matrizen
- Tag 3: Lineare Abbildungen, Affine Abbildungen
- Tag 4: Eigenwerte, Eigenvektoren, Quadriken
- Tag 5: Folgen, Reihen, Potenzreihen
- Tag 6: Stetigkeit, Differentiation
- Tag 7: Integration
- Tag 8: Mehrdimensionale Differentiation, Potentiale, Kurvenintegrale



Vollständige Induktion

→ Stoße den ersten Stein um und Sorge dafür, dass der n -te Stein auch den $(n+1)$ -ten Stein umwirft ($n \in \mathbb{N}$).



Vollständige Induktion (Forts.)

- Zum Beweis einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Im **Induktionsanfang** wird gezeigt, dass $A(1)$ gilt.
- Im **Induktionsschluss** wird gezeigt (mit $k \in \mathbb{N}$),
 - wenn $A(k)$ gilt (**Induktionshypothese**),
 - dann gilt auch $A(k+1)$ (**Induktionsbehauptung**).
- Aus Induktionsanfang und Induktionsschluss folgt dann, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Komplexe Zahlen

■ kartesische, Polar- und Euler-Darstellung

$$z = x + iy = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$$

mit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

■ Betrag der komplexen Zahl

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

■ Argument der komplexen Zahl (Hauptzweig: $0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{y}{x}$$



Multiplizieren, Potenzieren und Wurzelziehen

■ Multiplizieren

$$z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) ,$$

$$z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) ,$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) .$$

■ Potenzieren

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) ,$$

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) .$$

■ Wurzelziehen

$$z^n = w = |w| (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) ,$$

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} (\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k))$$

mit

$$\varphi_k = \frac{\beta + 2k\pi}{n} = \frac{\beta}{n} + 2\pi \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1 .$$

Mengen in der komplexen Zahlenebene

- **Kreis** um z_0 mit Radius r

$$\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}.$$

- **Mittelsenkrechte** auf der Verbindungsstrecke $\overline{z_1 z_2}$

$$\{z \in \mathbb{C}: |z - z_1| = |z - z_2|\}.$$

- Sonst setze $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
- Oder auch $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+, \varphi \in [0, 2\pi)$.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Eine Funktion $f: D \rightarrow B$ heißt

- **injektiv**

$$\forall x_1, x_2 \in D: x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{bzw. } \forall x_1, x_2 \in D: f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

d. h. jedes $y \in B$ ist Funktionswert $y = f(x)$ von **höchstens einem** $x \in D$,

- **surjektiv**

$$\forall y \in B \quad \exists x \in D: y = f(x),$$

d. h. jedes $y \in B$ ist Funktionswert $y = f(x)$ von **mindestens einem** $x \in D$,

- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist,

d. h. jedes $y \in B$ ist Funktionswert $y = f(x)$ von **genau einem** $x \in D$.

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität (Forts.)

- Durch **Einschränkung des Zielbereichs** auf den Wertebereich wird jede Funktion surjektiv.
- Durch geeignete **Einschränkung des Definitionsbereichs** wird eine Funktion injektiv.
- Jede bijektive Funktion $f: D \rightarrow W$ besitzt eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}: W \rightarrow D$

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

- Die **Komposition** bijektiver (bzw. injektiver bzw. surjektiver) Funktionen ist wieder bijektiv (bzw. injektiv bzw. surjektiv).
- Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f genau dann injektiv, wenn f **streng monoton** (wachsend oder fallend) ist.



Klausuraufgaben

- 05.03.2007 120min, Aufgabe 4
- 03.03.2008 120min, Aufgabe 3
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 1
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 8
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 11
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 3
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 1
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 9
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 8
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 5

Vektorrechnung

- **Untervektorraumkriterium** $U \subseteq V$ ist UVR, wenn

$$\begin{aligned} \forall u, v \in U: u + v \in U, \\ \forall u \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \mathbb{C} \text{)}: \lambda u \in U, \\ 0 \in U. \end{aligned}$$

- **Lineare Hülle** (Menge aller Linearkombinationen, UVR von V)

$$L(v_1, \dots, v_n) = \left\{ v \in V: v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \mathbb{C} \text{)} \right\}.$$

- Jede lineare Hülle ist ein Untervektorraum.
- **Lineare (Un-)Abhängigkeit** $v_1, \dots, v_n$ sind l. u., wenn das LGS

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

nur die (triviale) Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ besitzt. Andernfalls l. a., dann kann mindestens ein v_k als Linearkombination der anderen dargestellt werden.

Skalarprodukt und Betrag (Norm)

■ Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n .$$

■ Betrag (Länge) im $\mathbb{R}^n$

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} .$$

■ Geometrischer Zusammenhang

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos(\angle(u, v)) .$$

■ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |u||v| .$$

Basis und Dimension

- $B = (b_1, \dots, b_n)$ ist eine **Basis** von V , wenn
 - B ein **Erzeugendensystem** von V ist (d. h. $L(b_1, \dots, b_n) = V$),
 - $b_1, \dots, b_n$ l. u. sind.
- Die Anzahl n der Basisvektoren ist eindeutig und heißt **Dimension** von V ($n = \dim(V)$).
- Eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ heißt **Orthogonalbasis**, wenn

$$\langle b_j, b_k \rangle = 0 \text{ für alle } j \neq k.$$

- Eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ heißt **Orthonormalbasis** (ONB), wenn B eine Orthogonalbasis und

$$|b_k| = 1 \text{ für alle } k = 1, \dots, n.$$

- Die Matrix $A = (b_1 \cdots b_n)$ ist genau dann **orthogonal** (d. h. $A^T A = E_n = A A^T$ bzw. $A^T = A^{-1}$), wenn $b_1, \dots, b_n$ ONB ist.

Gram-Schmidt-Verfahren

- Umwandlung einer Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ in eine Orthonormalbasis $U = (u_1, \dots, u_n)$

$$u_k^* = b_k - \sum_{j < k} \langle b_k, u_j \rangle u_j ,$$

$$u_k = \frac{u_k^*}{|u_k^*|} ,$$

für $k = 1, \dots, n$.

- Es ist sogar

$$L(b_1, \dots, b_k) = L(u_1, \dots, u_k)$$

für alle $k = 1, \dots, n$.

Kreuzprodukt

■ Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im $\mathbb{R}^3$

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

■ Geometrische Definition

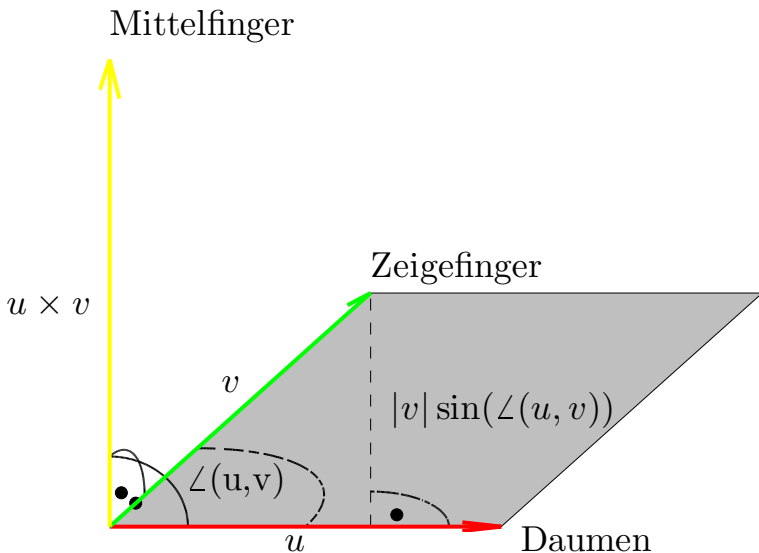
- $u \times v$ ist orthogonal zu u und v ,
- $u, v, u \times v$ sind nach der **Rechten-Hand-Regel** orientiert,
- die Länge von $u \times v$ entspricht der **Fläche** des von u und v aufgespannten Parallelogramms

$$|u \times v| = |u||v| \sin(\angle(u, v)) .$$

■ Weitere Eigenschaften

$$\begin{aligned} v \times u &= -(u \times v) , \\ u, v \perp a &\iff u \times v = 0 . \end{aligned}$$

Kreuzprodukt (Forts.)





Spatprodukt

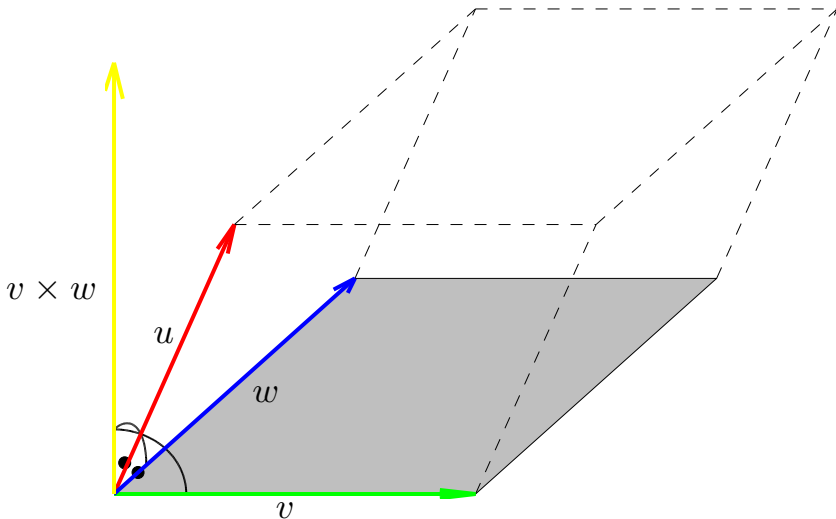
■ Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$[u, v, w] = \det(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle .$$

- Das Spatprodukt gibt das (orientierte) **Volumen**, des von u, v, w aufgespannten Spates (Prisma) an.
- $[u, v, w] > 0$ genau dann, wenn u, v, w nach der **Rechten-Hand-Regel** orientiert sind.
- Weitere Eigenschaften

$$[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v] = -[u, w, v] = -[w, v, u] = -[v, u, w] , \\ u, v, w \text{ l. a.} \iff [u, v, w] = 0 .$$

Spatprodukt (Forts.)



Geraden

- **Parameterdarstellung** einer Geraden g im $\mathbb{R}^n$

$$g: x = p + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Zwei-Punkte-Form** einer Geraden g im $\mathbb{R}^n$

$$g: x = p + \lambda(q - p), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Abstand d vom Punkt Q zur Geraden g im $\mathbb{R}^3$**

$$d = \frac{|(q - p) \times v|}{|v|}.$$

- **Abstand d zweier Geraden $g: x = p + \lambda u$ und $h: x = q + \lambda v$ im $\mathbb{R}^3$**

$$d = \begin{cases} \frac{|(q-p) \times u|}{|u|}, & \text{falls } g \parallel h \text{ (bzw. } u, v \text{ l. a.)}, \\ \frac{|[q-p, u, v]|}{|u \times v|}, & \text{falls } g \nparallel h \text{ (bzw. } u, v \text{ l. u.)}. \end{cases}$$

Ebenen

- **Parameterdarstellung** einer Ebene E im $\mathbb{R}^n$

$$E: x = p + \lambda u + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- **Drei-Punkte-Form** einer Ebene E im $\mathbb{R}^n$

$$E: x = p + \lambda(q - p) + \mu(r - p), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Hessesche Normalform

- **Normal(en)form** einer Ebene E im $\mathbb{R}^3$

$$E: \langle x - p, n \rangle = 0$$

bzw.

$$E: \langle x, n \rangle = d \quad (\text{bzw. } n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d)$$

mit $d = \langle p, n \rangle$.

- Obiges heißt **Hessesche Normalform** (HNF), falls $|n| = 1$ und $d \geq 0$ ist. Für $d > 0$ ist diese Darstellung eindeutig und d gibt den Abstand der Ebene E vom Ursprung an.
- **Abstand** d vom **Punkt** Q zur **Ebene** E im $\mathbb{R}^3$

$$d = \frac{|\langle q - p, n \rangle|}{|n|}.$$



Klausuraufgaben

- 06.09.2011 240min, Aufgabe 10
- 08.03.2010 240min, Aufgabe 9
- 14.03.2011 240min, Aufgabe 7
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 2
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 10
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 8

Rang

- Der **Zeilenrang** (bzw. **Spaltenrang**) einer Matrix A ist die maximale Anzahl l. u. Zeilen (bzw. Spalten).
- Der Zeilenrang und der Spaltenrang einer Matrix stimmen stets überein. Diese Größe wird als **Rang** der Matrix A bezeichnet ($\text{Rg}(A)$).
- Das **Lineare Gleichungssystem** (LGS)

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$) besitzt genau dann (mindestens) eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $x \in \mathbb{C}^n$), wenn

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A|b).$$



Elementare Umformungen

■ Elementare Zeilen-/Spaltenumformungen

- Vertauschung zweier Zeilen/Spalten,
 - Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Faktor $\lambda \neq 0$,
 - Addition des Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte.
- Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.
 - Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.
 - Spaltenvertauschung ändert die Lösungsmenge eines LGS nicht, es ändert sich jedoch die Reihenfolge der Unbekannten, z. B.

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Gaußalgorithmus

Durch elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen lässt sich jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auf die Form $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r,1} & \cdots & c_{r,n-r} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \hline \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

bringen, wobei der Block oben links in $\tilde{A}$ die Größe $r \times r$ hat, und der Block oben rechts beliebige Einträge $c_{i,j}$ beinhaltet. Der Vektor $\tilde{x}$ entsteht durch Spaltenvertauschungen (d. h. Vertauschungen von Unbekannten) aus x .

Gaußalgorithmus (Forts.)

- Die Matrix A (und $\tilde{A}$) hat den Rang r .
- Ohne Spaltenvertauschungen sind die ersten r Spalten von A l. u.
- Das LGS ist genau dann lösbar, wenn $\tilde{b}_k = 0$ für alle $k > r$ gilt.
- Wenn keine Spalten vertauscht wurden, hat der Lösungsraum des zugehörigen **homogenen Gleichungssystems** $Ax = 0$ die Basis

$$\begin{pmatrix} -c_{1,1} \\ \vdots \\ -c_{r,1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -c_{1,2} \\ \vdots \\ -c_{r,2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} -c_{1,n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Dimension $n - r$. Des Weiteren ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems z. B.

$$\left(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r, 0, \dots, 0 \right)^T.$$

Inverse

- **Inverse** $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt

$$AA^{-1} = E_n \quad \text{und} \quad A^{-1}A = E_n .$$

- **Eigenschaften**

$$(A^{-1})^{-1} = A ,$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T ,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} ,$$

$$\text{Sp} (B^{-1}AB) = \text{Sp} (A) .$$



Determinante

Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) kann mit Hilfe des **Entwicklungssatzes von Laplace** berechnet werden. Hierbei liefert die Entwicklung nach der i -ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

und die Entwicklung nach der j -ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) ,$$

wobei $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht.

Determinante (Forts.)

■ Eigenschaften

$$\det(A^T) = \det(A),$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B),$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{ falls } A \text{ invertierbar ist.}$$

■ B entstehe aus A durch eine elementare Umformung

- Vertauschung zweier Zeilen/Spalten

$$\det(B) = -\det(A),$$

- Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Faktor $\lambda \neq 0$

$$\det(B) = \lambda \det(A),$$

- Addition des Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte

$$\det(B) = \det(A).$$

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$) sind äquivalent

- A ist **invertierbar**.
- Das LGS $Ax = b$ besitzt **genau eine Lösung** ($x = A^{-1}b$).
- A ist **regulär** (d. h. $\text{Rg}(A) = n$).
- $\det(A) \neq 0$.



Klausuraufgaben

- 08.03.2010 240min, Aufgabe 2
- 14.03.2011 240min, Aufgabe 8
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 3
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 2
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 5
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 1
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 3

Lineare Abbildungen

- Eine Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ heißt **linear**, wenn gilt

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \text{ (Additivität),}$$

$$\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \text{ (Homogenität),}$$

mit $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$).

- Beispiel $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$\varphi: v \mapsto w = \varphi(v) = Av.$$

Darstellungsmatrix und Basiswechsel

- Die lineare Abbildung

$$\varphi: V \text{ (mit Basis } B = (b_1, \dots, b_n)) \rightarrow W \text{ (mit Basis } C = (c_1, \dots, c_m))$$

besitzt die $m \times n$ -**Darstellungsmatrix**

$${}_C\varphi_B = ({}_C(\varphi(b_1)) \dots {}_C(\varphi(b_n))) ,$$

$$\varphi: {}_Bv \mapsto {}_Cw = {}_C\varphi_B {}_Bv .$$

- Basiswechsel

$${}_B \text{id}_A {}_A v = {}_B v$$

$${}_A \text{id}_B = ({}_B \text{id}_A)^{-1}$$

$${}_D\varphi_B = {}_D \text{id}_C {}_C\varphi_A {}_A \text{id}_B$$

Kern, Bild und Dimensionsformel

- Ist $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so ist

$$\text{Kern}(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \quad (\subseteq V)$$

$$\text{Bild}(\varphi) = \{w \in W : \exists v \in V \quad w = \varphi(v)\} \quad (\subseteq W)$$

- Beide Mengen sind Untervektorräume.
- **Dimensionsformel**

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi))$$

- Beispiel $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, v \mapsto Av$ mit $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$\text{Kern}(\varphi)$ ist Lösungsmenge des LGS $Av = 0$

$$\text{Bild}(\varphi) = L(a_1, \dots, a_n)$$

$$\dim(\text{Bild}(\varphi)) = \text{Rg}(A)$$

$$\dim(\text{Kern}(\varphi)) = n - \text{Rg}(A)$$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v \mapsto Av$ ist genau dann

injektiv, wenn $\text{Kern}(\varphi) = \{0\}$

bzw. $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = 0$,

insbesondere muss dazu $n \leq m$ gelten,

surjektiv, wenn $\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}^m$

bzw. $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = m$,

d. h. es muss $m = n - \dim(\text{Kern}(\varphi))$ gelten,

bijektiv, wenn $m = n$ und $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = 0$ gilt.

LGS, Matrizen und lineare Abbildungen

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$) sind äquivalent

- A ist **invertierbar**.
- Das LGS $Ax = b$ besitzt **genau eine Lösung** ($x = A^{-1}b$).
- A ist **regulär** (d. h. $\text{Rg}(A) = n$).
- $\det(A) \neq 0$.
- Die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad v \mapsto Av$$

ist **bijektiv**.



Klausuraufgaben

- 06.03.2007 120min, Aufgabe 3
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 1
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 6
- 31.08.2015 180min, Aufgabe 4



Affine Abbildungen

- Eine Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **affin**, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ gibt, mit

$$\alpha: v \mapsto w = \alpha(v) = Av + t.$$

- Ist α bijektiv, so heißt α **Affinität** und die Umkehrabbildung α^{-1} ist ebenfalls eine Affinität

$$\alpha^{-1}: w \mapsto v = A^{-1}(w - t) = A^{-1}w - A^{-1}t.$$

- Das Bild einer Geraden unter α ist wieder eine Gerade (oder ein Punkt) (**Geradentreue**).
- Die Bilder zweier paralleler Geraden sind wieder parallel (**Parallelentreue**).
- Das Teilverhältnis dreier verschiedener Punkte auf einer Geraden bleibt erhalten (**Teilverhältnistreue**).

Affine Koordinatentransformationen

Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F} = (P; F)$ und $\mathbb{G} = (Q; G)$ drei affine Koordinatensysteme.

- Dann lauten die **Koordinatentransformationen** zwischen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{E}$

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F}v \mapsto \mathbb{E}v = F_{\mathbb{F}}v + p,$$

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{E}v \mapsto \mathbb{F}v = F^{-1}(\mathbb{E}v - p) = F^{-1}\mathbb{E}v - F^{-1}p.$$

- Die Koordinatentransformation von $\mathbb{F}$ nach $\mathbb{G}$ lautet

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F}v \mapsto \mathbb{G}v = G^{-1}(F_{\mathbb{F}}v + p - q) = G^{-1}F_{\mathbb{F}}v + G^{-1}(p - q).$$

- Die affine Abbildung $\alpha: v \mapsto Av + t$ lautet in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}: \mathbb{F}v \mapsto \mathbb{F}(\alpha(v)) = F^{-1}AF_{\mathbb{F}}v + F^{-1}(Ap - p + t).$$

Orthogonale Matrizen, Abbildungen und Isometrien

Matrix A	$\varphi: v \mapsto Av$	$\alpha: v \mapsto Av + t$
orthogonal , (wenn $A^T = A^{-1}$)	orthogonal	Isometrie
eigentlich orthogonal , wenn zusätzlich $\det(A) = 1$ $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$:	eigentlich orthogonal Drehung (um β) Drehung $(\cos(\beta) = \frac{\text{Sp}(A)-1}{2})$	eigentliche Isometrie Drehung + Verschiebung Drehung + Verschiebung
uneigentlich orthogonal , wenn zusätzlich $\det(A) = -1$ $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$:	uneigentlich orthogonal Spiegelung (Achse hat Winkel $\beta/2$ zur x -Achse) Spiegelung + Drehung	uneigentliche Isometrie Spiegelung (+ Drehung) + Verschiebung Spiegelung + Drehung + Verschiebung



Klausuraufgaben

- 06.03.2007 60min, Aufgabe 3
- 06.03.2007 120min, Aufgabe 4
- 03.09.2007 60min, Aufgabe 3
- 03.09.2007 120min, Aufgabe 5
- 04.03.2008 120min, Aufgabe 2
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 12
- 06.09.2010 240min, Aufgabe 9
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 10

Eigenwerte und Eigenvektoren

Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

- $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ heißt **Eigenvektor** (EV) zum **Eigenwert** (EW) $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn

$$Av = \lambda v \text{ bzw. } (A - \lambda E_n)v = 0.$$

- (λ, v) heißt **Eigenpaar**.
- $V(\lambda) = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}$ heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ .
- Jeder Eigenraum ist ein Untervektorraum.
- λ ist genau dann Eigenwert von A , wenn für das **charakteristische Polynom**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

die **charakteristische Gleichung** $\chi_A(\lambda) = 0$ erfüllt ist.

Algebraische und geometrische Vielfachheit

- Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ heißt **algebraische Vielfachheit** e_λ von λ .
- Die Dimension des Eigenraums $V(\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit** d_λ ($= \dim(V(\lambda))$) von λ .
- Für die algebraische und geometrische Vielfachheit gilt

$$1 \leq d_\lambda \leq e_\lambda \leq n$$

$$\sum_{\lambda} e_\lambda = n$$

$$d_\lambda = n - \text{Rg}(A - \lambda E_n)$$

- Für die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Sp}(A),$$

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(A),$$

Diagonalisierbarkeit

Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

- Ist $T = (v_1 \cdots v_n)$ eine **Basis aus Eigenvektoren** von A , so ist

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, wobei λ_k der Eigenwert zu v_k ist.

- A ist genau dann reell (bzw. komplex) **diagonalisierbar**, wenn es in $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) eine Basis aus Eigenvektoren von A gibt.
- Besitzt A lauter verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.
- A ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte λ_k gilt

$$d_{\lambda_k} = e_{\lambda_k}.$$

Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

- A heißt **symmetrisch**, wenn $A=A^T$.
- A heißt **hermitesch**, wenn $A=\overline{A}^T$.
- Jede symmetrische reelle Matrix A ist **orthogonal diagonalisierbar**, d. h. es existiert eine orthogonale Matrix $T = (v_1 \cdots v_n)$ (mit einer ONB aus Eigenvektoren von A) so, dass

$$(T^{-1}AT =) \quad T^T AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind paarweise orthogonal.



Klausuraufgaben

- 08.03.2010 240min, Aufgabe 3
- 14.03.2011 240min, Aufgabe 9
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 12
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 2
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 10
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 12
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 2
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 10
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 10
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 11

Quadriken

- Die Punktmenge

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma(x) = 0\}$$

heißt **Quadrik**, wobei α eine quadratische Form, β eine Linearform und γ eine Konstante ist.

- **Matrixbeschreibung** der Quadrik Q

$$Q: x^T A x + 2b^T x + c = 0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Erweiterte Matrix und Grobeinteilung

- Mit der **erweiterten Matrix**

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

und $\tilde{x}^T = (1, x_1, \dots, x_n)$ lässt sich die Quadrik Q beschreiben als

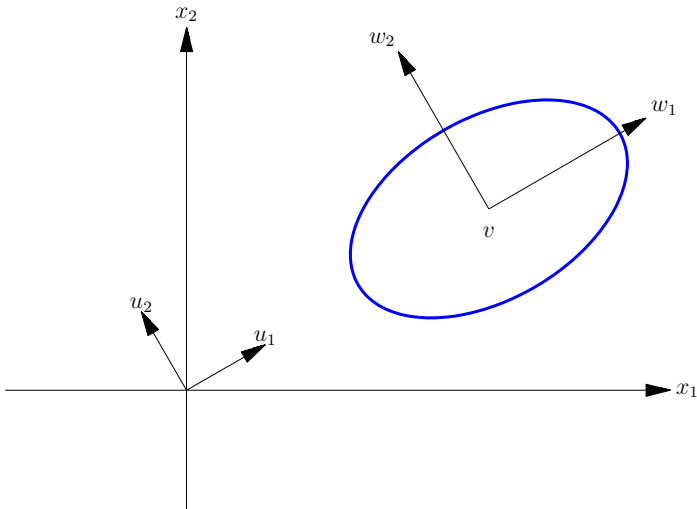
$$Q: (x^T A x + 2b^T x + c =) \quad \tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = 0.$$

- **Grobeinteilung** der Quadriken

- **kegelige Quadrik** $\text{Rg}(\tilde{A}) = \text{Rg}(A)$
(punktsymmetrisch mit Symmetriepunkt auf der Quadrik),
- **Mittelpunktsquadrik** $\text{Rg}(\tilde{A}) = \text{Rg}(A) + 1$
(punktsymmetrisch mit Symmetriepunkt nicht auf der Quadrik),
- **parabolische Quadrik** $\text{Rg}(\tilde{A}) = \text{Rg}(A) + 2$
(nicht punktsymmetrisch).



Hauptachsentransformation



Hauptachsentransformation (Forts.)

- **Diagonalisieren** von A mittels Drehung $x = Ty$ liefert

$$Q: \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k^2 + 2\tilde{b}^T y + c = 0.$$

- **Quadratische Ergänzung** mit Verschiebung $y_k = z_k - \tilde{b}_k/\lambda_k$ liefert

$$Q: \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k^2 + 2 \sum_{k=m+1}^n \tilde{b}_k z_k + \gamma = 0,$$

mit $\gamma = c - \sum_{k=1}^m \tilde{b}_k^2/\lambda_k$.

- Weitere Drehung im Unterraum (nur für parabolischen Zylinder) liefert

$$Q: \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k'^2 + 2\beta z_{m+1}' + \gamma = 0.$$

- **Verschiebung gegen die Konstante** $w_{m+1} = z_{m+1}' + \gamma/(2\beta)$ liefert

$$Q: \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k^2 + 2\beta w_{m+1} = 0.$$

Hauptachsentransformation (Forts.)

- **Gesamttransformationen** (sind Isometrien)

$$\mathbb{E}\mathcal{K}_{\mathbb{F}}: w \mapsto x = T(w + v) = Tw + Tv.$$

$$\mathbb{F}\mathcal{K}_{\mathbb{F}}: x \mapsto w = T^T x - v,$$

mit $v^T = (-\tilde{b}_1/\lambda_1, \dots, -\tilde{b}_m/\lambda_m, \gamma/(2\beta), 0, \dots, 0)$ (entspricht dem Zentrum der Quadrik).

- Neues Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Quadrik **euklidische Normalform** besitzt

$$\mathbb{F} = (Tv; T).$$

Normalformen und Hauptachsenlängen

■ Euklidische Normalformen

- kegelige Quadriken: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 = 0$
- Mittelpunktsquadriken: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 + 1 = 0$
- parabolische Quadriken: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 + 2z_{m+1} = 0$

■ Umschreiben

$$\lambda_k z_k^2 = \pm \frac{z_k^2}{a_k^2}$$

liefert positive **Hauptachsenlängen** a_k , die alle geometrische Bedeutung haben (z. B. Halbachsenlängen der Ellipse).

- Lässt man beliebige Affinitäten zu (nicht nur Isometrien), kann man die Hauptachsenlängen zu eins normieren und erhält die **affine Normalform**.



Affine Normalformen im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$

■ kegelige Quadriken

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ ein Punkt/eine Gerade}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{ schneidendes Geradenpaar/Ebenenpaar}$$

$$x_1^2 = 0 \text{ (Doppel-)Gerade/Ebene}$$

■ Mittelpunktsquadriken

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \text{ (leere Menge)}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \text{ Hyperbel/hyperbolischer Zylinder}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \text{ Ellipse/elliptischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 1 = 0 \text{ (leere Menge)}$$

$$-x_1^2 + 1 = 0 \text{ paralleles Geradenpaar/Ebenenpaar}$$

■ parabolische Quadriken

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \text{ Parabel/parabolischer Zylinder}$$

Weitere affine Normalformen im $\mathbb{R}^3$

■ kegelige Quadriken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ ein Punkt}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ (Doppel-)Kegel}$$

■ Mittelpunktsquadriken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0 \text{ (leere Menge)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \text{ zweischaliges Hyperboloid}$$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \text{ einschaliges Hyperboloid}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \text{ Ellipsoid}$$

■ parabolische Quadriken

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0 \text{ elliptisches Paraboloid}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0 \text{ hyperbolisches Paraboloid}$$



Klausuraufgaben

- 27.02.2012 180min, Aufgabe 11
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 4
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 3
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 3
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 5
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 5
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 4