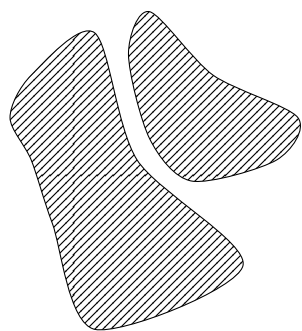


8 Tag 8

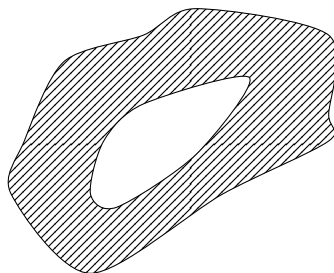
Weitere topologische Begriffe im $\mathbf{R}^n$

Sei $n \in \mathbf{N}$ und $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen.

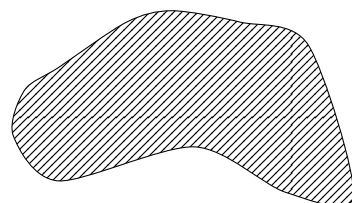
- D heißt *zusammenhängend*, wenn für alle $p, q \in D$ eine stetige Abbildung $C: [a, b] \rightarrow D$ mit $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$, $C(a) = p$ und $C(b) = q$ existiert.
(Je zwei Punkte in D lassen sich durch einen in D verlaufenden Weg verbinden.)
- D heißt *einfach zusammenhängend*, wenn D zusammenhängend ist und wenn sich jeder geschlossene Weg in D stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt.
(Anschaulich für $n = 2$: D hat keine Löcher)



nicht
zusammenhängend



zusammenhängend,
aber nicht einfach
zusammenhängend



einfach
zusammenhängend

- Beispiele einfach zusammenhängender Mengen:
 $\mathbf{R}^n$, konvexe Mengen, ε -Umgebungen, Halbebenen und kartesische Produkte wie $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ und $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$
- Für $a \in \mathbf{R}^2$ ist $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$ nicht einfach zusammenhängend.

8.1 Vektorfelder und Potentiale

Sei $n \in \mathbf{N}$ und $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen.

- Eine Funktion $g: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ wird *Vektorfeld* auf D genannt. Ein solches heißt stetig differenzierbar, geschrieben $g \in C^1(D, \mathbf{R}^n)$, wenn $g_k \in C^1(D)$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt.
- Ist $f \in C^1(D)$, so ist $\nabla f: D \rightarrow \mathbf{R}^n: a \mapsto \nabla f(a)$ ein Vektorfeld.

- Ein Vektorfeld $g: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt *Gradientenfeld* (oder *konservativ*), wenn ein $U \in C^1(D)$ mit $\nabla U = g$ existiert. In diesem Fall heißt U ein *Potential* von g .

Satz zur Existenz von Potentialen

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und $g \in C^1(D, \mathbf{R}^n)$.

- Ist g ein Gradientenfeld, so ist die Jacobimatrix $Jg(a)$ für alle $a \in D$ symmetrisch.
- Ist D einfach zusammenhängend und $Jg(a)$ für alle $a \in D$ symmetrisch, so ist g ein Gradientenfeld.

Divergenz und Rotation

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und $g \in C^1(D, \mathbf{R}^n)$.

- Die Funktion

$$\operatorname{div} g: D \rightarrow \mathbf{R}: a \mapsto \operatorname{Sp}(Jg(a)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(a)$$

heißt die *Divergenz* von g .

Man nennt g *quellenfrei*, falls $\operatorname{div} g = 0$ gilt.

- Im Falle $n = 2$ ist g ein sogenanntes *ebenes* Vektorfeld und man nennt

$$\operatorname{rot} g: D \rightarrow \mathbf{R}: a \mapsto \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a)$$

die *Rotation* von g .

Man nennt g *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} g = 0$ ist.

Im Falle $n = 3$ ist g ein sogenanntes *räumliches* Vektorfeld und man nennt

$$\operatorname{rot} g: D \rightarrow \mathbf{R}^3: a \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von g .

Man nennt g *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} g = 0$ ist.

Formale Merkgeln für $n = 3$:

$$\operatorname{div} g = \nabla \cdot g = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{rot} g = \nabla \times g = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Satz zur Existenz von Potentialen für $n = 2$ und $n = 3$

Sei $n \in \{2, 3\}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und $g \in C^1(D, \mathbf{R}^n)$.

- Ist g ein Gradientenfeld, so gilt $\operatorname{rot} g = 0$.
- Ist D einfach zusammenhängend und gilt $\operatorname{rot} g = 0$, so ist g ein Gradientenfeld.

Wenn wir also wissen möchten, ob ein ebenes ($n = 2$) oder räumliches ($n = 3$) Vektorfeld ein Potential besitzt, so können wir die Rotation berechnen:

Wenn der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist, so gibt es genau dann ein Potential, wenn die Rotation verschwindet.

Berechnung eines Potentials

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und $g: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ ein Vektorfeld. Wir möchten (falls möglich) ein Potential $U: D \rightarrow \mathbf{R}$ von g berechnen.

Dazu stellen wir das Gleichungssystem $\nabla U(x) = g(x)$ auf und integrieren die erste Gleichung nach x_1 :

$$[U(x)] = \int g_1(x) \, dx_1 = [f(x)].$$

Die auftretende Integrationskonstante darf von allen anderen Variablen abhängen. Wir erhalten also $U(x) = f(x) + c(x_2, \dots, x_n)$.

Nun setzen wir schrittweise die Zwischenergebnisse für U in die weiteren Gleichungen ein und berechnen so $c(x_2, \dots, x_n)$. Dabei treten Integrationskonstanten auf, die von weniger Variablen abhängen.

8.2 Kurven und ihre Parametrisierungen

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ und $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leq b$.

Eine Funktion $C: [a, b] \rightarrow D$ heißt *reguläre Parametrisierung* einer *Kurve* in D , wenn für die Komponentenfunktionen gilt:

$$C_k \in C^1([a, b]) \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } C'(t) = \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ \vdots \\ C'_n(t) \end{pmatrix} \neq 0 \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Die Kurve, die hier parametrisiert wird, ist $K = \{C(t) | t \in [a, b]\}$.

- C heißt doppeltpunktfrei, wenn C injektiv ist.
- K heißt geschlossen, wenn $C(a) = C(b)$ gilt.
- Ist K geschlossen, so nennt man C auch dann doppeltpunktfrei, wenn $C|_{[a,b)}: [a, b) \rightarrow D: t \mapsto C(t)$ injektiv ist.

Ausgewählte Parametrisierungen

- Seien $p, q \in \mathbf{R}^n$ mit $p \neq q$. Die Strecke von p nach q kann durch

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n: t \mapsto p + t(q - p)$$

regulär und doppeltpunktfrei parametrisiert werden.

- Sei $m \in \mathbf{R}^2$ und $r \in \mathbf{R}^+$. Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt m kann durch

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2: t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

regulär und doppeltpunktfrei parametrisiert werden. Durch Einschränken des Definitionsbereichs kann man Kreisbögen parametrisieren.

Etwas allgemeiner kann die Ellipse mit Hauptachsenlängen $a, b \in \mathbf{R}^+$ und Mittelpunkt $m \in \mathbf{R}^2$ (Gleichung: $\frac{(x - m_1)^2}{a^2} + \frac{(y - m_2)^2}{b^2} = 1$) durch

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2: t \mapsto m + \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

regulär und doppeltpunktfrei parametrisiert werden.

- Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \leq b$ eine stetig differenzierbare Funktion, so parametrisiert

$$C: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

den Graphen $\Gamma(f)$ von f regulär und doppelpunktfrei.

8.3 Kurvenintegrale

Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leq b$, $g: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ stetig und $C: [a, b] \rightarrow D$ eine reguläre Parametrisierung einer Kurve K . Dann heißt

$$\int_K g(x) \cdot dx = \int_C g(x) \cdot dx = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) dt$$

das *Kurvenintegral* von g längs K bezüglich C .

- Die Notation $\int_K g(x) \cdot dx$ ist gefährlich, da der Wert des Kurvenintegrals im Allgemeinen von der gewählten Parametrisierung abhängt. Bei doppelpunktfreien regulären Parametrisierungen mit gleichem Anfangspunkt gibt es aber kein Problem, hier ergibt sich stets der selbe Wert.
- Manchmal kann man nicht ganz K regulär parametrisieren. Dann setzt man K zusammen aus Kurvenstücken, die man regulär parametrisieren kann und das Kurvenintegral längs K ergibt sich als Summe der Kurvenintegrale längs der Kurvenstücke.
- Ein Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve K heißt auch *Umlaufintegral* und man schreibt

$$\oint_K g(x) \cdot dx = \int_K g(x) \cdot dx.$$

- Das Kurvenintegral ist linear: Ist $h: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ ein weiteres stetiges Vektorfeld und sind $z, w \in \mathbf{R}$, so ist

$$\int_K (zg(x) + wh(x)) \cdot dx = z \int_K g(x) \cdot dx + w \int_K h(x) \cdot dx.$$

- Ist g ein Gradientenfeld, so hängt das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Für jedes Potential U von g gilt dann

$$\int_K g(x) \cdot dx = U(C(b)) - U(C(a)).$$

Insbesondere folgt diesenfalls $\oint_K g(x) \cdot dx = 0$ für eine geschlossene Kurve K .

Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen

Sei $n \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leq b$ und $C: [a, b] \rightarrow D$ eine reguläre Parametrisierung einer Kurve K . Ferner sei $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion mit $f \circ C$ stetig. Dann heißt

$$\int_K f(s) \, ds = \int_C f(s) \, ds = \int_a^b f(C(t)) \cdot |C'(t)| \, dt$$

das *Kurvenintegral* von f längs K bezüglich C .

- Dieses Kurvenintegral hängt nicht von der Parametrisierung ab. Es ist auch unabhängig vom Durchlaufssinn.
- Die *Länge* der Kurve K ist

$$L(K) = \int_K 1 \, ds = \int_a^b |C'(t)| \, dt.$$

Beispielsweise erhält man für eine stetig differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \leq b$ die Länge des Graphen von f als

$$L(\Gamma(f)) = \int_{\Gamma(f)} 1 \, ds = \int_a^b \left| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt.$$

Zirkulation und Ausfluss

Sei $D \subseteq \mathbf{R}^2$ offen, $g: D \rightarrow \mathbf{R}^2$ stetig, $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a \leq b$ und $C: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ eine reguläre Parametrisierung einer geschlossenen Kurve K . Dann heißt

$$Z(g, K) = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) \, dt$$

die *Zirkulation* von g längs K und

$$A(g, K) = \int_a^b g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} dt$$

der *Ausfluss* von g durch K . Hierbei ist $\begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor, der orthogonal zum Tangentenvektor $C'(t)$ steht.

Erinnerung: Für $x \in \mathbf{R}$ ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Für $z \in \mathbf{C}$ gilt $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.