

7 Tag7

7.1 Integration in einer Veränderlichen

Stammfunktionen

Sei I ein reelles Intervall und $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion.

- Eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbf{R}$ heißt *Stammfunktion* von f , wenn $F' = f$ gilt.
- Zu jeder stetigen Funktion gibt es eine Stammfunktion: Für $a \in I$ ist die *Flächenfunktion* $F_a: I \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion f .
- Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so ist für $c \in \mathbf{R}$ auch

$$F + c: I \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto F(x) + c$$

eine Stammfunktion von f und jede Stammfunktion von f ist von dieser Form. Man schreibt dann $[F] = \{F + c | c \in \mathbf{R}\}$ für die Menge aller Stammfunktionen von f . $[F]$ heißt auch das *unbestimmte Integral* von f und man schreibt wahlweise

$$\int f(x) dx = [F] = [F(x)] = F(x) + c, c \in \mathbf{R}.$$

Die häufig verwendete Schreibweise $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbf{R}$ bedeutet also: F ist eine Stammfunktion von f .

Anmerkung:

Bei einem Definitionsbereich, der aus mehreren zusammengesetzten Intervallen besteht, kann auf jedem Intervall eine eigene additive Konstante c gewählt werden.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Seien $a, b \in \mathbf{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrierbar und $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Üblicherweise schreibt man $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ und berechnet schrittweise

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dieses bestimmte Integral gibt den (orientierten) Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich zwischen a und b an.

Ausgewählte Stammfunktionen

- Reelle Potenzreihen besitzen innerhalb ihres Konvergenzintervalls Stammfunktionen:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k dx = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \right]$$

- Tabellarische Übersicht von Stammfunktionen wichtiger reeller Funktionen auf jeweils geeignet gewählten Definitionsbereichen:

(mit $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ und $b \in \mathbf{R}^+$)

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	$\left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arcsin x]$
e^x	$[e^x]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos x]$
b^x	$\left[\frac{1}{\ln b} \cdot b^x \right]$	$\frac{1}{1+x^2}$	$[\arctan x]$
$\frac{1}{x}$	$[\ln x]$	$\sinh x$	$[\cosh x]$
$\sin x$	$[-\cos x]$	$\cosh x$	$[\sinh x]$
$\cos x$	$[\sin x]$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$[\operatorname{arsinh} x]$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$[\tan x]$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[\operatorname{arcosh} x]$

Rechenregeln

- Linearität des Integrals: Sei I ein reelles Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$. Ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g , dann ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$. Man schreibt

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Ist zudem $z \in \mathbf{R}$, so ist $z \cdot F$ eine Stammfunktion von $z \cdot f$:

$$\int z \cdot f(x) dx = z \cdot \int f(x) dx.$$

- Partielle Integration: Sei I ein reelles Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$. Sind f und g stetig differenzierbar, so gilt

$$\int f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x) \, dx.$$

Für bestimmte Integrale ($a, b \in I$) folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

- Substitution: Seien I, J reelle Intervalle und $u: I \rightarrow J$ stetig differenzierbar. Die stetige Funktion $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ habe die Stammfunktion F . Dann gilt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = [F(u(x))] \quad \left(= \int f(u) \, du \right).$$

Für bestimmte Integrale ($a, b \in I$) folgt

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = [F(u(x))]_a^b \quad \left(= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du \right).$$

Bei letzteren Schreibweisen fasst man u als neue Variable auf, man substituiert. Um bei unbestimmten Integralen wieder eine Funktion in x zu erhalten, muss die Substitution wieder rückgängig gemacht werden. Formale Merkregel:

$$\int f(u(x))u'(x) \, dx = \int f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \, dx = \int f(u) \, du.$$

Hier wird formal also $u'(x) \, dx$ durch du ersetzt.

Partialbruchzerlegung

Seien $p(x)$ und $q(x)$ reelle Polynome und $p(x)$ sei nicht das Nullpolynom. Wir möchten eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ auf Intervallen finden, in denen $p(x)$ keine Nullstellen hat.

Die Polynomdivision von $q(x)$ durch $p(x)$ liefert Polynome $a(x)$ und $\tilde{q}(x)$ mit $q(x) = a(x)p(x) + \tilde{q}(x)$ und wir erhalten $f(x) = a(x) + \frac{\tilde{q}(x)}{p(x)}$.

(Falls der Grad von $q(x)$ kleiner als der Grad von $p(x)$ ist, so ist $a(x) = 0$ und $\tilde{q}(x) = q(x)$ und wir können uns die Polynomdivision sparen.)

Wir zerlegen $p(x)$ in reelle Linearfaktoren, die zu reellen Nullstellen gehören und in quadratische Polynome, die zu Paaren von komplex konjugierten Nullstellen gehören:

$$p(x) = \rho \cdot \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)^{r_k} \cdot \prod_{k=1}^m (x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^{s_k}$$

mit $\rho, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbf{R}$, $r_k, s_k \in \mathbf{N}$, $n, m \in \mathbf{N}_0$. Hierbei werden gleiche Faktoren mit entsprechenden Vielfachheiten (r_k bzw. s_k) zusammengefasst: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind paarweise verschieden, ebenso $(\beta_1, \gamma_1), \dots, (\beta_m, \gamma_m)$.

Nun kann man $\frac{\tilde{q}(x)}{p(x)}$ in Partialbrüche zerlegen, das heißt es gibt Konstanten $A_{kj}, B_{kj}, C_{kj} \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{\tilde{q}(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{r_k} \frac{A_{kj}}{(x - \alpha_k)^j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{s_k} \frac{B_{kj} + C_{kj}x}{(x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^j}$$

überall dort, wo $p(x)$ keine Nullstellen hat.

Durch Koeffizientenvergleich können die Konstanten A_{kj} , B_{kj} und C_{kj} bestimmt werden. Dabei wird die Summe der Partialbrüche wieder auf den gemeinsamen Nenner $p(x)$ gebracht und dann werden die Koeffizienten der Zählerpolynome auf beiden Seiten der Gleichung verglichen. Dies liefert ein Gleichungssystem, das gelöst werden muss.

Nun bekommen wir eine gesuchte Stammfunktion durch summandenweises integrieren:

$$\int f(x) dx = \int a(x) dx + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{r_k} \int \frac{A_{kj}}{(x - \alpha_k)^j} dx + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{s_k} \int \frac{B_{kj} + C_{kj}x}{(x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^j} dx$$

Die dabei benötigten Stammfunktionen findet man wie folgt:

(Seien $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ mit $\beta^2 < 4\gamma$ und $k \in \mathbf{N}$.)

- $\int \frac{A}{x - \alpha} dx = [A \ln |x - \alpha|]$
- $\int \frac{A}{(x - \alpha)^{k+1}} dx = \left[\frac{-A}{k(x - \alpha)^k} \right]$
- $\int \frac{2x + \beta}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = [\ln(x^2 + \beta x + \gamma)]$
- $\int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \left[\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \arctan \left(\frac{2x + \beta}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \right) \right]$
- $\int \frac{B + Cx}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \frac{C}{2} \int \frac{2x + \beta}{x^2 + \beta x + \gamma} dx + \left(B - \frac{C\beta}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx$
- $\int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k+1}} dx = \left[\frac{-1}{k(x^2 + \beta x + \gamma)^k} \right]$

- $$\int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k+1}} dx = \left[\frac{2x + \beta}{k(4\gamma - \beta^2)(x^2 + \beta x + \gamma)^k} \right] + \frac{2(2k - 1)}{k(4\gamma - \beta^2)} \int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx$$
- $$\int \frac{B + Cx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k+1}} dx = \frac{C}{2} \int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k+1}} dx + \left(B - \frac{C\beta}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k+1}} dx$$

Uneigentliche Integrale

Sei $a \in \mathbf{R}$ und $b \in (a, +\infty]$. Ist eine Funktion $f: [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ auf jedem Teilintervall $[a, \beta] \subseteq [a, b)$ integrierbar, so heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b-0} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx$$

ein *uneigentliches Integral*. Dieser Grenzwert kann eine reelle Zahl g sein oder nicht existieren. Entsprechend schreibt man $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b-0} f(x) dx = g$ oder man sagt, dass das Integral $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b-0} f(x) dx$ nicht existiert. Da es um die Existenz von Funktionsgrenzwerten geht, kann man wie üblich die Begriffe Konvergenz und Divergenz verwenden. Wenn $\int_a^{b-0} |f(x)| dx$ existiert, so nennt man das Integral $\int_a^{b-0} f(x) dx$ *absolut konvergent*.

Analog definiert man

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x) dx$$

für entsprechende Funktionen $f: (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Für Funktionen $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ wählt man ein $z \in (a, b)$ und definiert

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \int_{a+0}^z f(x) dx + \int_z^{b-0} f(x) dx.$$

(Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von z .)

Im Falle einer Funktion $f: [a, b] \setminus \{z\} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $z \in (a, b)$ (z.B. Polstelle bei z) definiert man ähnlich

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{z-0} f(x) dx + \int_{z+0}^b f(x) dx.$$

Reihen und Integrale

Jede Reihe kann als (uneigentliches) Integral interpretiert werden. Für eine gegebene Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbf{Z}$ konstruieren wir die Treppenfunktion

$$T: [k_0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R} \text{ mit } T(x) = a_k \text{ für } k \leq x < k+1.$$

Dann gilt $\int_{k_0}^{+\infty} T(x) \, dx = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

Etwas allgemeiner kann man das Konvergenzverhalten von Reihen und Integralen unter gewissen Voraussetzungen übertragen:

Satz: Sei $k_0 \in \mathbf{Z}$. Eine Funktion $f: [k_0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ sei positiv und monoton fallend. Dann haben $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ und $\int_{k_0}^{+\infty} f(x) \, dx$ das gleiche Konvergenzverhalten. (Aber eventuell verschiedene Grenzwerte.)