

5 Tag 5

5.1 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

- Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine *Folge* $(a_k)_{k \in \mathbf{N}} = (a_k)_{k \geq 1} = (a_k)_k$ in $D \subseteq \mathbf{R}^n$ ist eine Funktion $\mathbf{N} \rightarrow D: k \mapsto a_k$. (Etwas allgemeiner erlauben wir auch Folgen $(a_k)_{k \geq k_0}$, also Funktionen $\{k \in \mathbf{Z} | k \geq k_0\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ mit $k_0 \in \mathbf{Z}$.)

Sie heißt *konvergent* mit *Grenzwert* $z \in \mathbf{R}^n$, geschrieben $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = z$ wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert mit $|a_k - z| < \varepsilon$ für alle $k > N$, ansonsten *divergent*. Folgen in $\mathbf{C}$ sind nichts anderes als Folgen in $\mathbf{R}^2$.

Eine Folge $(a_k)_k = \left(\begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \right)_k$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbf{R}^n$, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj} = z_j$ für $1 \leq j \leq n$ gilt. Bei der Berechnung von Grenzwerten können wir uns also im Wesentlichen auf den eindimensionalen Fall ($n = 1$) zurückziehen. Eine Folge $(a_k)_k$ in $\mathbf{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $\pm\infty$, geschrieben $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \pm\infty$, wenn für jedes $S \in \mathbf{R}^+$ ein $N \in \mathbf{N}$ existiert mit $\pm a_k > S$ für alle $k > N$.

Ist $(n_k)_k$ mit $n_k \in \mathbf{N}$ streng monoton steigend, d.h. $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$, so heißt $(a_{n_k})_k$ eine *Teilfolge* einer Folge $(a_k)_k$ in $\mathbf{R}$. (Häufig betrachtet man die Teilfolgen $(a_{2k})_k$ und $(a_{2k+1})_k$ der geraden bzw. ungeraden Indizes.) Die Grenzwerte solcher Teilfolgen ($\pm\infty$ zugelassen) heißen *Häufungspunkte* von $(a_k)_k$, wobei $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}$ den größten Häufungspunkt, genannt *Limes superior*, und $\underline{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}$ den kleinsten Häufungspunkt, genannt *Limes inferior*, bezeichnet. $(a_k)_k$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbf{R}$, wenn $\underline{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k} = z = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}$ gilt.

- Seien $n, m \in \mathbf{N}$. Sei $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$. f besitzt in a den *Funktionsgrenzwert* $z \in \mathbf{R}^m$, geschrieben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = z$, wenn für alle Folgen $(x_k)_k$ in D mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = z$. Für $n = m = 1$ besitzt f in a den *rechts-* (bzw. *linksseitigen*) *Funktionsgrenzwert* $z \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, geschrieben $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = z$, wenn für alle Folgen $(x_k)_k$ in D mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ und $\pm(x_k - a) > 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = z$. Ferner gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = z \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, wenn für alle Folgen $(x_k)_k$ in D mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \pm\infty$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = z$.

- Grenzwerte von Folgen und Funktionen hängen also eng zusammen: Funk-

tionsgrenzwerte können über Folgengrenzwerte definiert werden und kennt man umgekehrt einen Funktionsgrenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = z$, so folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = z$ auch für die Folge $(f(k))_k$.

- Stetige Funktionen sind solche, die sich gut mit Funktionsgrenzwerten vertragen: Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt *stetig* in $a \in D$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a)$ gilt. f heißt stetig, wenn f in allen $a \in D$ stetig ist.

Wichtige stetige Funktionen sind:

- * Die Betragsfunktion $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto |x|$.
- * Projektionen $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto x_j$ mit $1 \leq j \leq n$.
- * Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises. Insbesondere Polynomfunktionen, der natürliche Logarithmus, die Sinus-, die Cosinus- und die eulersche e-Funktion.

Rechenregeln für Folgengrenzwerte

Seien $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ Folgen in $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ mit $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$, $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \in \mathbf{K}$.

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) = a + b$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k b_k) = ab$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a}{b}$ falls $b_k, b \neq 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt:

Für Folgen in $\mathbf{R}$ erhalten wir:

- Gilt $a_k \leq b_k$ für (fast) alle $k \in \mathbf{N}$, so folgt $a \leq b$.
- *Sandwichsatz*: Ist $(c_k)_k$ eine Folge in $\mathbf{R}$ mit $a_k \leq b_k \leq c_k$ für (fast) alle $k \in \mathbf{N}$ und gilt $a = b$, so folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = a$.
- Ist $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$ und $a = 0$, so folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_k} = +\infty$.
- Für eine Folge $(c_k)_k$ in $\mathbf{R}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k| = +\infty$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c_k} = 0$. Insbesondere sind Grenzwerte der Form $\frac{\text{beschränkt}}{\pm\infty}$ gleich 0.

Vorsicht beim Versuch mit $\pm\infty$ zu rechnen: Grenzwerte der Form $'0 \cdot \infty'$, $'\frac{0}{0}'$, $'\frac{\infty}{\infty}'$, $'\infty - \infty'$, etc. folgen keiner allgemeinen Gesetzmäßigkeit. Hier benötigen wir andere Werkzeuge.

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Seien f, g, h, k reelle Funktionen und $a \in \mathbf{R}$ jeweils so gewählt, dass die folgenden Grenzwerte Sinn ergeben. Aufgrund der Beziehungen

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(2a-x)$ und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0\pm0} f(\frac{1}{x})$ beschränken wir uns auf rechtsseitige Grenzwerte. Wir nehmen an, dass $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = z \in \mathbf{R}$ und $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = w \in \mathbf{R}$ existieren.

- Es gilt $\lim_{x \rightarrow a+0} (f(x)+g(x)) = z+w$, $\lim_{x \rightarrow a+0} (f(x)g(x)) = zw$ und $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{z}{w}$ falls $w \neq 0$.

- Gilt $f(x) \leq g(x)$ nahe a , so folgt $z \leq w$.

- *Sandwichsatz:*

Gilt $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ nahe a und $z = w$, so folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} h(x) = z$.

- Gilt $f(x) > 0$ nahe a und $z = 0$, so folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Gilt $\lim_{x \rightarrow a+0} |h(x)| = +\infty$, so folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{1}{h(x)} = 0$. Insbesondere sind Grenzwerte der Form $\frac{\text{beschränkt}}{\pm\infty}$ gleich 0.
- Existiert $\lim_{x \rightarrow z} h(x) = y \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, so folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} h(f(x)) = y$.
- Gilt $h(x) > 0$ nahe a und existiert $\lim_{x \rightarrow a+0} (k(x) \cdot \ln h(x)) = y \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, so folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} h(x)^{k(x)} = e^y$, wobei $e^{+\infty} = +\infty$ und $e^{-\infty} = 0$ zu interpretieren ist.
- *Regel von de l'Hospital:*

Sind $h(x), k(x)$ differenzierbar nahe a mit $\lim_{x \rightarrow a+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} k(x) = 0$ oder

$\lim_{x \rightarrow a+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} k(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h'(x)}{k'(x)} \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, so

folgt $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{h'(x)}{k'(x)}$.

Mit dem Ausdruck 'nahe a ' ist jeweils Folgendes gemeint: es gibt ein $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ so, dass die Aussage für alle $x \in (a, a+\varepsilon)$ in den entsprechenden Definitionsbereichen wahr ist.

Ausgewählte Folgen- und Funktionsgrenzwerte

Seien $z \in \mathbf{C}$, $a, q \in \mathbf{R}$ und $\ell \in \mathbf{Z}$.

- $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z| < 1 \\ 1 & \text{falls } z = 1 \end{cases}$ (ansonsten divergiert $(z^k)_k$)
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^k}{k!} = 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k = e^z$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{a} = 1$ falls $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ falls $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a \cdot \ln x = 0$ falls $a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0$ falls $q > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^\ell = 0$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^k}{k^a} = 0$ falls $|z| < 1$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^a} = 0$ falls $a > 0$

Strategien zum Berechnen von Folgen- und Funktionsgrenzwerten

- Verwendung von Stetigkeit, Rechenregeln und bekannten Grenzwerten.

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} \cdot \cos x \right) = \frac{0^3 + 1}{0^3 + 2} \cdot \cos 0 = \frac{1}{2}$$

$$* \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{k} \right)^k = e^3$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} (-\sin x \cdot \ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(-\frac{\sin x}{x} \cdot x \cdot \ln x \right)} = e^{-1 \cdot 0} = 1$$

- Bei Quotienten: Anwenden der Regel von de l'Hospital oder Kürzen mit der höchsten Potenz. Letzteres kann auch bei Wurzel- oder Potenzfunktionen funktionieren.

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 2n^2 + n}{2n + n^3 + 3n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^3} + \frac{1}{n} + 3} = \frac{8 + 0 + 0}{0 + 0 + 3} = \frac{8}{3}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \sqrt[4]{\frac{1}{x^4}} + 1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3 + \sqrt[4]{0+1}}{1 + \sqrt{0+1}} = 2$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} \stackrel{0,0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cos(1-x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -2 \cos(1-1) \cdot \sqrt{1} = -2$$

- Bei Differenzen der Form ' $\infty - \infty$ ', insbesondere bei Wurzelfunktionen: Auf gemeinsamen Nenner bringen, z.B. Erweitern mit ' $\infty + \infty$ ', um die dritte binomische Formel anzuwenden.

$$* \lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{k^2 + 2k} - \sqrt{k^2 - k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k^2 + 2k) - (k^2 - k)}{\sqrt{k^2 + 2k} + \sqrt{k^2 - k}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k}{\sqrt{k^2 + 2k} + \sqrt{k^2 - k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{k}} + \sqrt{1 - \frac{1}{k}}} = \frac{3}{2}$$

- Sandwichsatz, z.B. wenn sich eine Folge/Funktion nur leicht von einer mit bekanntem Grenzwert unterscheidet.

$$* -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbf{R}^+. \text{ Aus } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{x} = 0 \text{ folgt } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

$$* \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{(n+1)^2} \leq \sqrt[n]{(2n)^2} \text{ für } n \in \mathbf{N}.$$

$$\text{Aus } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \text{ folgt } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^2} = 1.$$

- Bei rekursiv definierten Folgen kann man durch Grenzwertübergang in der Rekursionsgleichung eine Gleichung erhalten, die ein Grenzwert erfüllen muss.

5.2 Reihen und Potenzreihen

- Für eine Folge $(a_k)_k$ in $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}$ heißt $\sum_{k=1}^n a_k$ die *n-te Partialsumme* der Folge $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_n$. Diese Folge wird *Reihe* genannt und man schreibt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_n$.

Konvergiert diese Reihe, so schreibt man zudem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

Analog definiert man $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=k_0}^n a_k\right)_{n \geq k_0}$ bzw. $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k$ für entsprechende Folgen $(a_k)_{k \geq k_0}$ mit $k_0 \in \mathbf{Z}$.

- Für $z, z_0 \in \mathbf{C}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine *Potenzreihe*, die üblicherweise als Funktion $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für geeignete $z \in \mathbf{C}$ aufgefasst wird. z_0 nennt man den *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe. Reihen der Form $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(z - z_0)^{\ell k}$ mit $\ell \in \mathbf{N}$ und $k_0 \in \mathbf{N}_0$ sind bequem notierte Potenzreihen, deren Koeffizientenfolgen sonst abschnittsweise als a_k und 0 definiert werden müssten.

Konvergenzkriterien

Sei eine Folge $(a_k)_{k \geq k_0}$ in $\mathbf{K}$ mit $k_0 \in \mathbf{Z}$ gegeben.

- Konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, so ist $(a_k)_{k \geq k_0}$ eine Nullfolge, d.h. es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.
- Konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ (man sagt $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ ist *absolut konvergent*), so konvergiert auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
- *Leibnizkriterium:*
Ist $(a_k)_{k \geq k_0}$ monoton in $\mathbf{R}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, so konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$.
- *Quotientenkriterium von d'Alembert:*
 - * Gilt $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent.
 - * Gilt $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, so ist die Reihe divergent.
- *Wurzelkriterium von Cauchy:*
 - * Gilt $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent.
 - * Gilt $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so ist die Reihe divergent.
- *Majorantenkriterium:* Ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe in $\mathbf{R}$ mit $|a_k| \leq b_k$ für (fast) alle $k \geq k_0$, so konvergiert auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- *Minorantenkriterium:* Sind $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ Reihen in $\mathbf{R}$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ divergent und gilt $a_k \geq b_k \geq 0$ für (fast) alle $k \geq k_0$, so divergiert auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- Sei $z_0 \in \mathbf{C}$ und $k_0 \geq 0$.

Es gibt ein $\rho \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ so, dass die Potenzreihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für alle $z \in U_\rho(z_0)$ absolut konvergiert und für alle $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{U_\rho(z_0)}$ divergiert.

Hierbei ist

$$U_\rho(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \rho\} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} \setminus \overline{U_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| > \rho\}$$

für $\rho \in \mathbf{R}_0^+$, sowie $U_{+\infty}(z_0) = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C} \setminus \overline{U_{+\infty}(z_0)} = \emptyset$.

Man nennt ρ den *Konvergenzradius* der Potenzreihe und $U_\rho(z_0)$ den *Konvergenzkreis* der Potenzreihe.

Der Konvergenzradius ρ kann wie folgt berechnet werden: Hat man

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \text{oder} \quad a = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \text{oder} \quad a = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

berechnet, so ist $\rho = \frac{1}{a}$, wobei $\frac{1}{0}$ als $+\infty$ und $\frac{1}{+\infty}$ als 0 zu interpretieren ist.

Ist die Potenzreihe in der Form $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(z - z_0)^{\ell k}$ mit $\ell \in \mathbf{N}$ gegeben, so berechnet man

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[\ell k]{|a_k|} \quad \text{oder} \quad a = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[\ell k]{|a_k|}$$

und erhält dann wie oben $\rho = \frac{1}{a}$.

Ausgewählte Reihen

- Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}$ für $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| < 1$, ansonsten divergent
- Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ für alle $z \in \mathbf{C}$
- Sinusfunktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin z$ für alle $z \in \mathbf{C}$

- Cosinusfunktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z$ für alle $z \in \mathbf{C}$
- Natürlicher Logarithmus: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -\ln(1+x)$ für $x \in (-1, 1]$
Für $x = 1$ erhält man die sogenannte alternierende harmonische Reihe.
- Verallgemeinerte harmonische Reihe:
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$
Für $\alpha = 1$ erhält man die harmonische Reihe.

Hinweise zur Untersuchung auf Konvergenz und zur Grenzwertberechnung bei Reihen

- Linearität: Für konvergente Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ und $z, w \in \mathbf{K}$ gilt:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (za_k + wb_k) = z \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right) + w \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \right)$$

- Für die Konvergenz einer Reihe ist der Summationsbeginn unbedeutend:
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ haben das selbe Konvergenzverhalten.

Das gilt jedoch nicht für die Grenzwerte! Hier muss man entsprechende Summanden hinzufügen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2^n} + \frac{2}{3^n} \right) &= -\frac{i}{2^0} - \frac{2}{3^0} + i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \\ &= -i - 2 + \frac{i}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

- Falls $(a_k)_{k \geq k_0}$ keine Nullfolge ist, so divergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

Beispielsweise divergiert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$:

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ ist $\left(\frac{n!}{3^n} \right)_n$ divergent, insbesondere also keine Nullfolge.

- Potenzreihen müssen manchmal umgeformt werden, um als solche erkannt zu werden. Nützlich sind zum Beispiel Umformungen der Form

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (bz - w)^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^k \left(z - \frac{w}{b}\right)^k$$

und

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z^2 - 2zz_0 + z_0^2)^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{2k}.$$

- *Teleskopsummen:*

Für eine konvergente Folge $(a_k)_{k \geq k_0}$ in $\mathbf{K}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \in \mathbf{K}$ ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_{k_0} - a.$$

Beispiele:

$$* \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\sqrt{j} - \sqrt{j+1}}{\sqrt{j(j+1)}} = \sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{j+1}} - \frac{1}{\sqrt{j}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$* \text{ Die Partialbruchzerlegung } \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \text{ liefert}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}.$$