

Aufgabe 4 (4 Punkte) Das Vektorfeld vom 10.3.09

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + xy + y^2z)e^{xy-z} \\ (z + x^2 + xyz)e^{xy-z} \\ (y - x - yz)e^{xy-z} \end{pmatrix}.$$

besitzt ein Potential. Berechnen Sie ein solches.

Aufgabe 15 (3 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

vom 14.3.11 (240 min)

$$f_\alpha: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: \quad (x, y, z)^\top \mapsto \left(\alpha \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \ln(xy) \right)^\top$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α :

$$Jf_\alpha \left((x, y, z)^\top \right) =$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld ein Potential: $\alpha =$	?
---	---

Aufgabe 7 (6 Punkte) vom 22.2.16

Gegeben sei für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha e^{x_1+x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + e^{x_1+x_2} \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

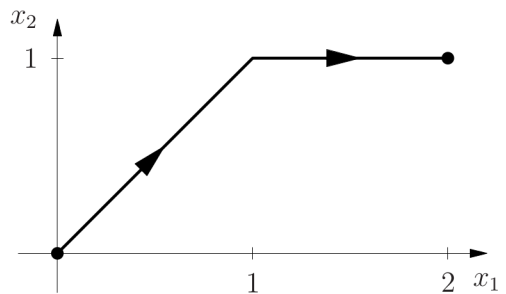
Aufgabe 4 (5 Punkte) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes vom 9.3.09 (120 min)

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + x_2 e^{x_1+x_2} \\ (1+x_2)e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

und das Kurvenintegral

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d} x$$

entlang des abgebildeten Weges K von $(0,0)$ nach $(2,1)$,
der aus zwei Teilstrecken besteht.



Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld
vom 7.9.09 (240 min)

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/v \\ -u/v^2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve K , die parametrisiert wird durch

$$C: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K g(x) \bullet dx.$$

Aufgabe 6 (7 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld
vom 8.3.10 (240 min)

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{2x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + 2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Weg C , welcher geradlinig von $(1, 1)$ zu $(1, 3)$ läuft.

(a) Entscheiden Sie, für welche α das Vektorfeld ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet dx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld
vom 14.3.11 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^\top\} \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y)^\top \mapsto \frac{-1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x, y)^\top.$$

(a) Berechnen Sie ein Potential von f .

(b) Gegeben seien nun die Punkte $P_1 = (-1, 0)^\top$ und $P_2 = (1, 0)^\top$. Geben Sie eine Parametrisierung für eine Kurve K an, welche die Punkte P_1 (Startpunkt) und P_2 (Endpunkt) über einen Halbkreis um den Nullpunkt mit Radius 1 verbindet.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K .

Aufgabe 3 (3 Punkte) Der Graph der Funktion
vom 2.9.13

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cosh(x) - 1$$

ist parametrisiert durch

$$C: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, \cosh(t) - 1)^\top.$$

Berechnen Sie die Länge des Graphen von f .

Aufgabe 7 (4 Punkte) vom 2.3.15

Durch $C: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t), t)^\top$ sei ein idealisierter Draht parametrisiert.

Die Massendichte des Drahtes betrage $\rho(C(t)) = \sqrt{t/(2+t^2)}$.

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes, die durch das Kurvenintegral $\int_C \rho(s) ds$ gegeben ist.

Aufgabe 9 (8 Punkte) Gegeben seien die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sowie das Vektorfeld vom 6.9.11 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \\ \alpha x^2 + 3x \cos(y) + 5xz \\ \beta xy \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche Parameter α, β besitzt f ein Potential?
 (b) Berechnen Sie ein Potential von f für die Parameterwerte aus (a).
 (c) Sei nun $\beta = 5$ und folgende Parametrisierung der Kurve K gegeben.

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t \\ t\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die

$$\int_K f(s) \bullet ds = 1$$

gilt.

Aufgabe 8 (6 Punkte) Gegeben ist das von dem reellen Parameter α abhängige Vektorfeld vom 4.9.12

$$f_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 \\ 2x_1^3 + 8x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

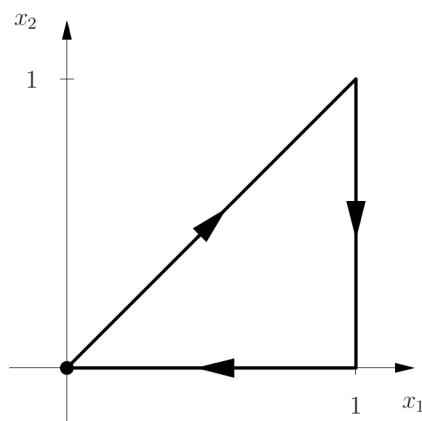
- (a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die

$$U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 4x_1^2 x_2^2 + 2x_1^3 x_2$$

ein Potential von f_α ist.

- (b) Berechnen Sie für den abgebildeten Weg C die Integrale

$$\oint_C f_4(x) \bullet dx \quad \text{und} \quad \oint_C f_0(x) \bullet dx.$$



Aufgabe 7 (8 Punkte) Gegeben sei für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld vom 24.2.14

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + e^{x_1 x_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Einheitskreises K_1

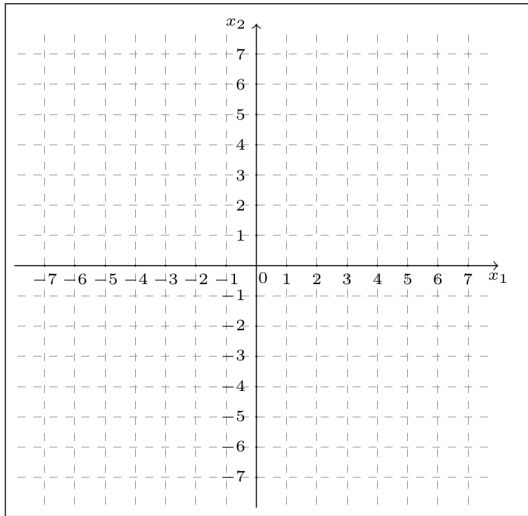
$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.
 (b) Bestimmen Sie $\int_{K_1} g_0(x) \bullet dx$ und $\int_{K_1} g_1(x) \bullet dx$.

Aufgabe 10 (6 Punkte) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis um den Mittelpunkt $M = (2, 3)$, auf dem die beiden Punkte $P_1 = (5, 6)$ und $P_2 = (-1, 6)$ liegen. vom 25.2.13

(a) Bestimmen Sie den Radius r des Kreises K : $r =$

Skizzieren Sie K :



(b) Parametrisieren Sie den kürzesten Kreisbogen $B \subseteq K$, der P_1 mit P_2 verbindet.

(c) Bestimmen Sie für die Kurve B aus Teil (b) das Kurvenintegral

$$\int_B 1 \, ds =$$

(d) Bestimmen Sie für die Kurve B aus Teil (b) und die reellwertige Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2} \quad \text{das Kurvenintegral} \quad \int_B f(s) \, ds =$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben ist die skalare Funktion vom 1.9.14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x_2 (\cos(x_1))^2 - \exp(x_2)$$

und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

Skizzieren Sie K . Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (\text{grad } f)(x)$ das Gradientenfeld von f . Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K g(x) \bullet dx.$$

Aufgabe 7 (8 Punkte) Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld vom 31.8.15

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f .
- (b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?
- (c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a, b) = (3, 2)$.
- (d) Gegeben sei die Parametrisierung der Kurve K durch

$$C: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $(a, b) = (3, 2)$ das Integral $\int_K f(x) \bullet dx$.

Aufgabe 3 (11 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei vom 29.8.16

$$g_{a,b}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} bx_1 x_3 + ax_1 x_2^2 \\ 8x_1^2 x_2 + bx_3 \\ ax_1^2 + 2ax_2 + a \cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

- (a) Gegeben sei die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\int_K g_{0,1}(x) \bullet dx$.

- (b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Rotation von $g_{a,b}$.
- (c) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt $g_{a,b}$ ein Potential? Geben Sie für diese Werte ein Potential an.

Aufgabe 8 (4 Punkte) vom 13.10.17

Wir betrachten das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Die geschlossene Kurve K werde durch $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 3 \cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ parametrisiert.

Bestimmen Sie $C'(t) =$ und $\int 2(\sin(t))^2 dt =$.

Berechnen Sie den Ausfluss von g durch K : $A(g, K) =$.

Aufgabe 7 (6 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:
vom 27.2.17

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten zwei Kurven H und K in $\mathbb{R}^3$ vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Kurve H ist parametrisiert durch $B: [0, \ln(3)] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Die Kurve K ist parametrisiert durch $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_H v(x) \bullet dx$ und $\int_K v(x) \bullet dx$.

Aufgabe 10 (4 Punkte) vom 04.09.17

(a) Geben Sie eine Stammfunktion F von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2e^{\sin(x)} \cos(x)$ an.

$F(x) =$

(b) Gegeben sei die Parametrisierung $C: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Kurve K mit

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3t \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $C'(t)$, $|C'(t)|$ sowie die Länge $L(K)$ von K :

$$C'(t) = \quad, \quad |C'(t)| = \quad, \quad L(K) = \quad.$$