

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei vom 2.9.13

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{9} - x^2.$$

Die Funktion f besitzt im Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle. Benutzen Sie die Intervallhalbierungsmethode, ausgehend von $[a_1, b_1] := [0, 1]$, um ein Intervall von kleinerer Länge als $\varepsilon = 0,3$ zu finden, das eine Nullstelle von f enthält.

Aufgabe 10 (10 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 2.3.15

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2)^2 + 4(2x_1 - x_2)^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(2, 4) =$

(b) Die Niveaumenge $E := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = f(2, 4) \right\}$, die den Punkt $(2, 4)$ enthält, ist eine Ellipse. Geben Sie die symmetrische Matrix A für die Matrixbeschreibung

$$x^\top A x + 2a^\top x - f(2, 4) = 0$$

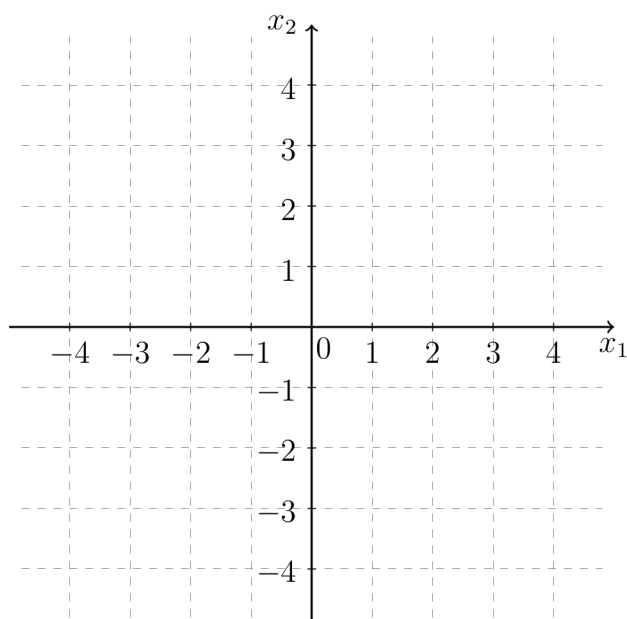
von E an: $A =$

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem E euklidische Normalform hat.

$\mathbb{F} =$

(d) Geben Sie die Halbachsenlängen der Ellipse E an:

(e) Skizzieren Sie E sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$:



Aufgabe 2 (4 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen: vom 14.3.11 (240 min)

(a) $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \right)$

(b) $\frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{e^x}{x^2 + 1} \right) \right)$

Aufgabe 10 (5 Punkte) Für die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wird das folgende Vektorfeld definiert:
vom 6.9.10 (240 min)

$$g: (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y^2 + \beta y}{x} \\ (\alpha y + \beta) \ln(x) \\ w^2 + \alpha w \\ \beta zw + \alpha z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $Jg =$

Für welche Paare (α, β) ist die
Jacobi-Matrix Jg symmetrisch?

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:
vom 6.9.10 (240 min)

(a) $\frac{d}{dx} \arctan(\sin(x)) =$

(b) $\frac{d}{dx} x^{2x} =$

(c) $\frac{d}{dx} (\sqrt{x} \ln(1 + x^2)) =$

Aufgabe 11 (2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Ableitungen in den jeweiligen Definitionsbereichen.
vom 6.9.11 (240 min)

$$\frac{d}{dx} x e^{2x} =$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x-3}{(x+1)^2} =$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 24.2.14

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \neq 0$.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(f'(\frac{1}{2\pi n}))_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Bestimmen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$.
- (d) Ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 10 (5 Punkte) Gegeben seien die Funktionen vom 1.9.14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ v+1 \end{pmatrix}, \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ y+z \end{pmatrix}, \quad h := f \circ g$$

und der Punkt $p := (0, 1, 1)$. Bestimmen Sie:

die Jacobimatrix $Jf(u, v) =$, $Jg(x, y, z) =$,

den Vektor $g(p) =$, $Jh(p) =$.

Aufgabe 6 (3 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 31.8.15

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Ist f differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$?

(c) Ist f' differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$?

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 22.2.16

$$f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 5 (12 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 8.3.10 (240 min)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge D der reellen Stellen x , an denen der Funktionsterm definiert ist. Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Polstellen.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .

(c) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $x \in [-4, 4]$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! ((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(e) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil (e).

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto e^{x \cos(y)}$$

den Gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathbb{H} f(x, y) = \begin{pmatrix} \text{[Empty Box]} & \text{[Empty Box]} \\ \text{[Empty Box]} & \text{[Empty Box]} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x, y), (0, 0))$ der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$T_2(f, (x, y), (0, 0)) =$$

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto e^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt $(0,0)$.

- (a) Berechnen Sie das in $x = 0$ entwickelte Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2(f, x, 0)$ und das zugehörige Restglied $R_2(f, x, 0)$ nach Lagrange.
- (b) Ersetzen wir $\cos(x)$ durch $T_2(f, x, 0)$, so entsteht ein Approximationsfehler. Bestimmen Sie $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ so, dass der Approximationsfehler auf $[0, \beta]$ kleiner als 10^{-3} wird.

Aufgabe 14 (7 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion
vom 7.9.09 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto e^{x+y} - \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathbb{H} f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x, y), (0, 0))$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$T_2(f, (x, y), (0, 0)) =$$

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 14.3.11 (240 min)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y)^\top \mapsto (x^2 + 1)^y.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

Aufgabe 13 (3 Punkte) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0 . vom 6.9.11 (240 min)

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos(x/2)$, $x_0 = 0$

$$T_3(f, x, 0) =$$

(b) $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x^2), \quad x_0 = 1$

$$T_3(g, x, 1) =$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion vom 27.2.12

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_0^x t \exp(t) \, dt$$

das Taylorpolynom $T_4(f, x, 0)$ der vierten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 15 (7 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion
vom 6.9.11 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \sin(x)e^{x-y}$$

den Gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$\mathbb{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x, y), (\pi/2, 1))$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (\pi/2, 1)$.

$$T_2(f, (x, y), (\pi/2, 1)) =$$

Aufgabe 6 (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 27.2.12

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy^2 - 2xy + x^3 = x((y-1)^2 + x^2 - 1).$$

Die kritischen Stellen von f sind $(0, 0)$, $(0, 2)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von f .
- (b) Geben Sie für jede der oben stehenden kritischen Stellen den Funktionswert von f und den Typ der kritischen Stelle an.
- (c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right)$ an.

Aufgabe 2 (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 25.2.13

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x-1) \ln(2x-2) - x + 1.$$

- (a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f .
- (b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für $k > 1$ ist

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-2)!}{(x-1)^{k-1}}.$$

- (c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 2)$ von f an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 4.9.12

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \sin(3x + y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f um den Entwicklungspunkt $(0, \pi/4)$.

Aufgabe 9 (4 Punkte) Es sei
vom 2.9.13

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + xy + 2y.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(f, (x, y), (1, 1))$.

$$T_1(f, (x, y), (1, 1)) =$$

(b) Entwickeln Sie f nach Potenzen von $(x - 1)$ und $(y - 1)$, d.h. schreiben Sie f in der Form

$$f(x, y) = a + b_0(x - 1) + b_1(y - 1) + \sum_{j=0}^2 c_j(x - 1)^j(y - 1)^{2-j}, \quad \text{mit } a, b_0, b_1, c_j \in \mathbb{R}.$$

$$a = \boxed{}, b_0 = \boxed{}, b_1 = \boxed{}, c_0 = \boxed{}, c_1 = \boxed{}, c_2 = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (7 Punkte) vom 24.2.14

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x/2)$. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen von f im Punkt $x_0 = \pi$:

$$f'(x_0) = \boxed{}, \quad f''(x_0) = \boxed{}, \quad f'''(x_0) = \boxed{}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 von f im Punkt $x_0 = \pi$.

$$T_3(f, x, x_0) =$$

(b) Sei $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y \geq -1\}$. Gegeben sei die Funktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{R} : (x, y)^\top \mapsto \sqrt{1 + 3x + y}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g im Punkt $a = (0, 0)^T$:

$\text{grad } g(a) =$

und

$\text{Hg}(a) =$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von g im Punkt $a = (0, 0)^T$:

$$T_2(g, (x, y), a) =$$

Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei
vom 1.9.14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (x^2 - 4x + 4)(y^2 + 2y + 1) + xy - 2y + 3.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x, y), (0, -1))$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) vom 2.3.15

Gegeben sei die Funktion $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(2+x)$.

- (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.
- (b) Berechnen Sie den Wert $T_2(f, -\frac{1}{2}, -1)$.
- (c) Geben Sie das zugehörige Restglied $R_2(f, -\frac{1}{2}, -1)$ nach Lagrange an.
- (d) Zeigen Sie, dass der Fehler $|T_2(f, -\frac{1}{2}, -1) - f(-\frac{1}{2})|$ höchstens $1/24$ beträgt.

Aufgabe 8 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 22.2.16

$$f: (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y)^T \mapsto x^y e^{2x}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten von f und das Taylorpolynom 1. Stufe zum Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

(a) $\text{grad } f(x, y) =$

(b) $T_1(f, (x, y), (1, 1)) =$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion
vom 29.8.16

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2x + e^{3(x-1)}.$$

- (a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 1)$ an.
- (b) Wir betrachten die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto f^{-1}(y)$$

von f . Geben Sie das Taylorpolynom $T_1(f^{-1}, y, 3)$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 9.3.09 (120 min)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$ und untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.
- (b) Berechnen Sie f' und f'' .
- (c) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f , sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.
- (d) Skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 3 (5 Punkte) Mit Hilfe der Methode von Lagrange sollen die Minima und die Maxima der Funktion vom 10.3.09

$$f(x, y) = \frac{x}{4} + \frac{y}{3}$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1$$

bestimmt werden.

Aufgabe 7 (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion vom 7.9.09 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (y^2 - 1)(x - y - 1).$$

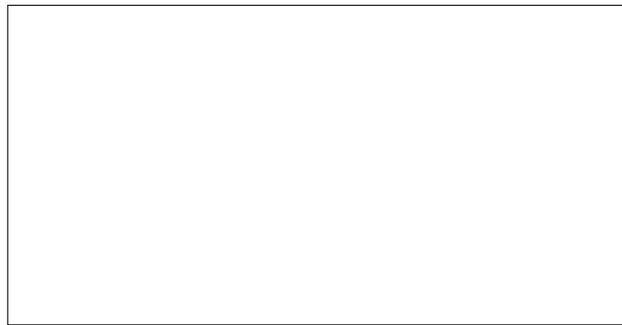
- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge der Funktion f . Markieren Sie das Vorzeichen der Funktionswerte in allen Bereichen.
- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f . Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und markieren Sie diese in Ihrer Skizze.
- (c) An welchen dieser kritischen Stellen liegen Extrema, wo Sattelpunkte vor?

Aufgabe 12 (5 Punkte)

vom 8.3.10 (240 min)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^T \mapsto e^{(x+1)^2+y^2}$.

- (a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f .



- (b) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f .



- (c) Geben Sie den Typ der kritischen Stellen an.

Aufgabe 7 (8 Punkte) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch vom 6.9.10 (240 min)

$$f(x, y) := (x^2 - 2y^2)e^{-(x+y)}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in $\mathbb{R}^2$.
- (b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von f .

Aufgabe 5 (8 Punkte) Ein rechteckiger Karton ohne Deckel soll aus 12m^2 Pappe hergestellt werden. Berechnen Sie das maximale Volumen eines solchen Kartons. **vom 14.3.11 (240 min)**

- (a) Geben Sie einen Ausdruck V für das Volumen des Kartons in Abhängigkeit von Länge und Breite an.
- (b) Bestimmen Sie Lage und Typ aller kritischen Stellen von V . Was ist das maximale Volumen des Kartons?

Aufgabe 8 (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion
vom 6.9.11 (240 min)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^3 - y^2 - 2x.$$

- (a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . Welcher Typ liegt jeweils vor?
- (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf der Geraden $y = x - 1$.

Aufgabe 7 (7 Punkte) Bestimmen Sie alle absoluten Maxima und Minima der Funktion
vom 27.2.12

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^T \mapsto (x + y)^3$$

auf der durch die Nebenbedingung

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$$

beschriebenen Ellipse.

Aufgabe 7 (6 Punkte) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch
vom 4.9.12

$$f(x, y) := (y + 1)(y - x^2 + 2) = -x^2y - x^2 + y^2 + 3y + 2.$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in $\mathbb{R}^2$.
- (b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von f .

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben seien zwei reelle Zahlen x, y . Für welche Werte von x und y ist das Produkt von x und y am größten, wenn man voraussetzt, dass die Summe der Quadrate von x und y konstant 4 ist? **vom 25.2.13**

Aufgabe 7 (11 Punkte) Gegeben seien die folgenden Funktionen.
vom 2.9.13

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + (y - 1)^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 1$$

Es ist $f(x, y)$ das Quadrat des Abstands des Punktes $P := (0, 1)$ vom Punkt (x, y) .

Die Menge $E := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0 \}$ ist eine Ellipse.

Bestimmen Sie die absoluten Minimalstellen und die absoluten Maximalstellen von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes P von einem Punkt der Ellipse E .

Aufgabe 4 (7 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion
vom 1.9.14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 1 + 6xy - x^3 - 8y^3$$

- (a) alle kritischen Stellen,
- (b) Lage, Art und Wert der lokalen Extrema.

Aufgabe 6 (5 Punkte) vom 2.3.15

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \sqrt{6}x - \sqrt{3}y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 6 (7 Punkte) Bestimmen Sie alle globalen Minimalstellen und globalen Maximalstellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^3 - y^2$$

unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$.

vom 29.8.16

Aufgabe 2 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto x - 2y + 2z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

vom 27.2.17

Aufgabe 5 (12 Punkte) vom 13.10.17

Seien $\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ Koordinatensysteme von $\mathbb{R}^2$.

Bezüglich $\mathbb{E}$ heißen die Koordinaten x_1, x_2 . Bezüglich $\mathbb{F}$ heißen die Koordinaten y_1, y_2 .

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x_1, x_2) \mapsto 4x_1^2 + x_2^2$. Sei die Quadrik Q bezüglich $\mathbb{E}$ beschrieben durch

$$Q: 4x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

also als Niveaumenge von f zum Niveau 16.

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{F}$ und Q in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ ein.

(b) Sei P der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Liegt der Punkt P auf der Quadrik Q ?

(c) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x_1, x_2)$.

(d) Sei g die Tangente an die Quadrik Q durch den Punkt P aus (b).

Berechnen Sie einen Richtungsvektor von g .

Zeichnen Sie P und g in die Zeichnung aus (a) ein.

(e) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(f) Geben Sie eine Beschreibung der Quadrik Q bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe 2 (14 Punkte) Sei

vom 13.10.17

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (x^2 - x)(x^2 + y^2 - 1).$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit einem “+” und die Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit einem “-”.

(b) Zeigen Sie die Ungleichungen $4 < \sqrt{17} < 5$.

(c) Berechnen Sie $\nabla f(1, 0)$.

(d) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 5 (14 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit
vom 04.09.17

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + x - x^2 - y^2 - x^3 + x^2 y^2 \\ &= (1 - x^2) \cdot (1 + x - y^2). \end{aligned}$$

- (a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit einem “+” und diejenigen Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit einem “−”.
- (b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.