

Aufgabe 6 (5 Punkte) vom 9.3.09 (120 min)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-3)^2}{n+1} =$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) =$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} =$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2} =$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.
vom 7.9.09 (240 min)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} \cos(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x} - 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x \ln(x) - 10}$

Aufgabe 11 (5 Punkte) In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist folgender Funktionsgrenzwert gegeben:
vom 7.9.09 (240 min)

$$G_\alpha := \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha \sin x.$$

Berechnen Sie G_α für $\alpha = -1$ und $\alpha = 1$:

$$G_{-1} =$$

$$G_1 = \boxed{}$$

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert G_α existiert:

--

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert G_α nicht existiert:

Aufgabe 12 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
vom 14.3.11 (240 min)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) =$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n}{2n^2 + 1} - 2 \right) =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos(x)}{x} =$

Aufgabe 5 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen.
vom 6.9.11 (240 min)

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 2} \right)$$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sin(\pi/4 + 1/n))$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

vom 6.9.11 (240 min)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan x}{x + \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Aufgabe 11 (4 Punkte) Geben Sie für die unten genannten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils den größten und kleinsten Häufungspunkt an. Entscheiden Sie außerdem, ob die Folge konvergiert. Tragen Sie in der Spalte Grenzwert entweder „divergent“ oder den jeweiligen Grenzwert ein.

vom 25.2.13

	$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$	$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$	Grenzwert
$a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$			
$a_n = \frac{n}{n+1} ((-1)^n + 2)$			
$a_n = 3 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$			
$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$			

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

vom 1.9.14

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

vom 31.8.15

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}: (x,y) \mapsto \frac{xy - x^2}{2x^2 - 2xy + y^2}.$$

(a) Berechnen Sie $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k)$ für die durch $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ definierte Folge.

(b) Ist f bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

vom 1.9.14

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4 + x^2 y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben ist, nicht stetig ist.

Aufgabe 11 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Folgengrenzwerte:

vom 29.8.16

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 2n^2 + n}{2n + n^3 + 3n^4} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=3}^n \frac{\sqrt{j} - \sqrt{j+1}}{\sqrt{j(1+j)}} =$

Aufgabe 1 (4 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

vom 27.2.17

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)}{x \sin(x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x)$

Aufgabe 10 (4 Punkte) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

vom 27.2.17

(a) $\left(\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right), \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{2^n}, \cos\left(\pi + \frac{1}{n}\right), 2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte) vom 10.3.09

Tragen Sie in das Kästchen unterhalb der entsprechenden Reihe „konvergent“ ein, falls die Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert. Tragen Sie „divergent“ ein, falls die Reihe nicht konvergiert.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$

Aufgabe 12 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

vom 7.9.09 (240 min)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{4^n}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n(n+1)}$

Aufgabe 10 (5 Punkte) vom 8.3.10 (240 min)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n-1)} - n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$

Aufgabe 5 (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
vom 6.9.10 (240 min)

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+3)^2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+1}{\sqrt{5n^2+1}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1+(-2)^k}{4^k}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.
vom 14.3.11 (240 min)

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(3 + (-1)^k)^k}$

Aufgabe 6 (6 Punkte) vom 6.9.11 (240 min)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k}{2^k}$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} + \frac{(-2)^k}{6^k} \right)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren.
vom 27.2.12

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k} \right)^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{6} \right)^k$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \sinh(k)$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k(k^2+2)}$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

Aufgabe 5 (6 Punkte) vom 4.9.12

(a) Bestimmen Sie den Funktionsgrenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^5 - 1)(x - 1)}{4x^2 - 8x + 4}.$$

(b) Bestimmen Sie die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-3)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k.$$

(c) Bestimmen Sie den Häufungspunkt $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \cos \left(5n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} \right).$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) vom 25.2.13

(a) Führen Sie für $\frac{1}{k(k-1)}$ die Partialbruchzerlegung durch.

(b) Nun betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Berechnen Sie den Wert der n -ten Partialsumme.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe aus Aufgabenteil (b) konvergiert. Bestimmen Sie den Wert, gegen den sie konvergiert.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, begründen Sie dies. vom 22.2.16

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n}{n+1})}{\ln(n+1) \ln(n)}$

Aufgabe 5 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Reihe
vom 29.8.16

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1+i)^k$$

konvergiert. Geben Sie deren Wert in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 9 (3 Punkte) Geben Sie in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte der folgenden Reihen an. vom 27.2.17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2^n} + \frac{2}{3^n} \right) = \boxed{}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\pi}{2} \right)^n = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (5 Punkte) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius. vom 6.9.10 (240 min)

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n 5^n}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-i+1)^n$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^n$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (4^n + 3^n) z^n$		

Aufgabe 11 (3 Punkte) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius. vom 14.3.11 (240 min)

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n z^{2n}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} (z-3i)^n$		

Aufgabe 12 (3 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen.
vom 27.2.12

(a) $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j^2 + 3j + 1}{3j^2 + 4j + 21} \right)^j z^j$

$\rho =$

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j + 3^j}{4^j} (z - 4i)^j$

$\rho =$

(c) $\sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{3j + (-1)^j j}{2j + 1} \right)^j z^j$

$\rho =$

Aufgabe 4 (5 Punkte) vom 4.9.12

Gegeben seien die folgenden komplexen Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n \quad \text{und} \quad g_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n+1} z^n$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzkreis der Reihe $f(z)$. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(b) Finden Sie das maximale $\delta > 0$ so, dass die Reihe $f(z)$ für alle $z \in U_{\delta}(\frac{1}{9}i)$ absolut konvergiert.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{C}$, für die der Konvergenzradius der Reihe $g_{\alpha}(z)$ gleich 2 ist.

Aufgabe 1 (7 Punkte) Gegeben seien folgende Potenzreihen:
vom 2.9.13

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n (x+1)^n.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt.

(b) Entscheiden Sie nun für jedes $x \in \mathbb{R}$, ob die obigen Reihen jeweils konvergieren oder divergieren.

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte z_0 und die Konvergenzradien ρ folgender Potenzreihen:
vom 24.2.14

$$\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n n^2}$$

$z_0 =$

$\rho =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1+2i+z)^n$$

$z_0 =$

$\rho =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^n z^{3n}$$

$z_0 =$

$\rho =$

Aufgabe 5 (7 Punkte) vom 1.9.14

Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 2iz - 1}{9} \right)^n.$$

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.
 (b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $z = 2i$.
 (c) Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert und für welche $z \in \mathbb{C}$ sie divergiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte) vom 2.3.15

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^{n+1} - 2^n}.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9 (3 Punkte) Geben Sie für jede der folgenden komplexen Potenzreihen den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihres Konvergenzkreises an: **vom 31.8.15**

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (3z)^n,$ $z_0 =$, $\rho =$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n (z+i)^{2n},$ $z_0 =$, $\rho =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) vom 22.2.16

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{R}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihres Konvergenzkreises an:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} 2^n}{(n+1)^6} z^n$ $z_0 =$ $\rho =$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3z)^{2n}$ $z_0 =$ $\rho =$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-7)^n}{n!}$ $z_0 =$ $\rho =$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Bestimmen Sie: vom 2.3.15

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^5 + 3n - 1}{-n^4 + 35n^3 - 108n^2 + 13} \right)$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \sum_{k=0}^n \frac{(-9)^k}{(2k+1)!} \right)$

Aufgabe 11 (2 Punkte) Berechnen Sie den folgenden Reihenwert: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} + n!}{4^n \cdot n!} =$.

vom 04.09.17

Aufgabe 4 (5 Punkte) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:
 vom 04.09.17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^n.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

vom 04.09.17

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5^{n-2}}{3 + 5^{n+1}} =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 3^n} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{e^{7x} - 1} =$

Aufgabe 6 (4 Punkte) vom 13.10.17

(a) Bestimmen Sie folgende Reihenwerte.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\pi^2}{16}\right)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} =$

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie: $\operatorname{Re}(e^{2\pi i t/3}) =$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(2 \operatorname{Re}(e^{2\pi i k/3}))_{k \in \mathbb{N}}$: