



Willkommen zur  
Prüfungsvorbereitung  
HM 1/2 für Ingenieure  
des MINT-Kollegs  
Baden-Württemberg an  
der Universität Stuttgart!

Autor: Andreas App



## Kontakt Daten

Dr. Andreas App  
Raum 1.018

Sekretariat:  
Frau Rieg  
Raum 0.017  
Azenbergstr. 12  
stuttgart@mint-kolleg.de

# Skript

<http://ilias.uni-stuttgart.de/>

- ⇒ Zentrale Institutionen
- ⇒ MINT-Kolleg Baden-Württemberg
- ⇒ Studienbegleitende Kurse
- ⇒ Mathematik



## Themen

- Tag 1: Vollständige Induktion, Komplexe Zahlen, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
- Tag 2: Vektorrechnung, LGS, Matrizen
- Tag 3: Lineare Abbildungen, Affine Abbildungen
- Tag 4: Eigenwerte, Eigenvektoren, Quadriken
- Tag 5: Folgen, Reihen, Potenzreihen
- Tag 6: Stetigkeit, Differentiation
- Tag 7: Integration
- Tag 8: Mehrdimensionale Differentiation, Potentiale, Kurvenintegrale



## Folgen und Konvergenz

- Eine (reelle) **Folge** ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$ , wobei man  $a_n$  statt  $a(n)$  für das  $n$ -te Folgeglied schreibt.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, \dots$$

bezeichnet die gesamte Folge.

- Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **konvergiert** gegen einen **Grenzwert**  $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

bzw.

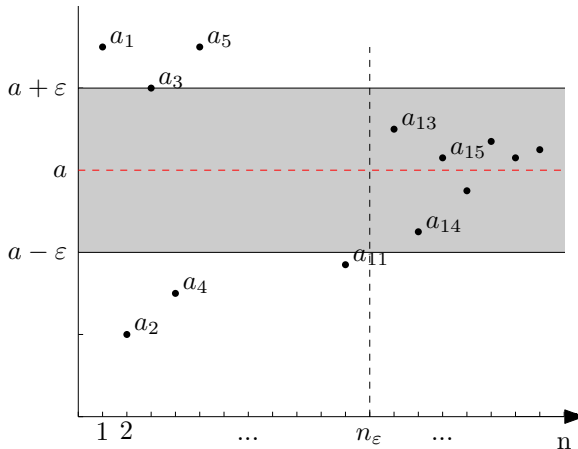
$$a_n \rightarrow a \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty,$$

wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_\varepsilon: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ansonsten heißt die Folge **divergent**.

## Konvergenz (Forts.)



## Konvergenz (Forts.)

- Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- **Konvergenzkriterium von Cauchy**  
Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

- **Satz von der monotonen Konvergenz**  
Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

## Rechenregeln für konvergente Folgen

Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

■ Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0, b_n \neq 0,$$

ist  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n$ , so folgt  $a \leq b$ .

■ **Sandwichsatz**

Ist  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c_n \leq b_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , so ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$$



## Spezielle Grenzwerte von Folgen

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$  für  $c > 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0$  für  $|q| < 1$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$  für  $\alpha > 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7183\dots$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \approx 0,3679$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

## Reihen

Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen, dann bezeichnet man die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

mit unendlich vielen Summanden als **Reihe**. Sie konvergiert gegen den Grenzwert  $s$ , wenn die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der **Partialsummen**

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

gegen  $s$  konvergiert

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Existiert kein Grenzwert, so bezeichnet man die Reihe als divergent.

## Konvergenzkriterien

- Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent, so ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
- Konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  (d. h.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **konvergiert absolut**), dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .
- **Leibnizkriterium** Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine **monotone** Nullfolge, dann konvergiert die **alternierende Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  und es gilt für den Reihenrest

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

## Quotienten- und Wurzelkriterium

### ■ Quotientenkriterium

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1, \text{ dann ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1, \text{ dann ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

### ■ Wurzelkriterium

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1, \text{ dann ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1, \text{ dann ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

## Vergleichskriterium

### ■ Majorantenkriterium

Ist  $\forall k \in \mathbb{N}: |a_k| \leq cb_k$  (mit  $c > 0$ ), so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

### ■ Minorantenkriterium

Ist umgekehrt  $\forall k \in \mathbb{N}: a_k \geq cb_k \geq 0$  (mit  $c > 0$ ), so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

## Wichtige Reihen

- **Harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergiert.
- **Verallgemeinerte harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$  konvergiert für  $\alpha > 1$   
und divergiert für  $\alpha \leq 1$ .
- **Alternierende harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln(2)$ .
- **Geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$ .
- **Exponentialreihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ .



## Klausuraufgaben

- 04.09.2012 180min, Aufgabe 5
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 11
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 5 und Aufgabe 6
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 3 (a) bis (d)
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 1

## Potenzreihen

- Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen und  $z_0 \in \mathbb{C}$ , dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

**Potenzreihe** um den **Entwicklungspunkt**  $z_0$ .

- **Satz vom Konvergenzkreis** Für eine Potenzreihe gilt entweder,
  - es gibt einen **Konvergenzradius**  $r \in \mathbb{R}_0^+$ , so dass die Potenzreihe für  $|z - z_0| < r$  absolut konvergiert und für  $|z - z_0| > r$  divergiert,
  - oder die Potenzreihe konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  ( $r = \infty$ ).
- Die Menge

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

heißt **Konvergenzkreis** der Potenzreihe.

## Bestimmung des Konvergenzradius

- Ist

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$$

- oder

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = a,$$

- so gilt für den Konvergenzradius  $r$

$$r = \begin{cases} 0, & \text{für } a = \infty, \\ \infty, & \text{für } a = 0, \\ \frac{1}{a}, & \text{für } a \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

## Wichtige Potenzreihen

- **Geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$  für  $|z| < 1$ .
- **Exponentialfunktion**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Kosinusfunktion**  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Sinusfunktion**  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Logarithmusfunktion**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = -\ln(1+x)$  für  $-1 < x \leq 1$ .

## Differentiation und Integration von Potenzreihen

Ist

$$f: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

- so ist  $f$  **stetig**
- und kann auf dem Definitionsbereich **gliedweise differenziert**,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k,$$

- und **gliedweise integriert** werden,

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k.$$



## Klausuraufgaben

- 27.02.2012 180min, Aufgabe 12
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 4
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 1
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 8
- 01.09.2014 180min, Aufgabe 5
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 9

## Stetigkeit

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig** in  $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ ,

- wenn für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  die Funktionswerte  $f(x_n)$  gegen  $f(a)$  konvergieren

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a),$$

- bzw. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D: |x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

- bzw. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \cap D \implies f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

## Eigenschaften stetiger Funktionen

### ■ Zwischenwertsatz

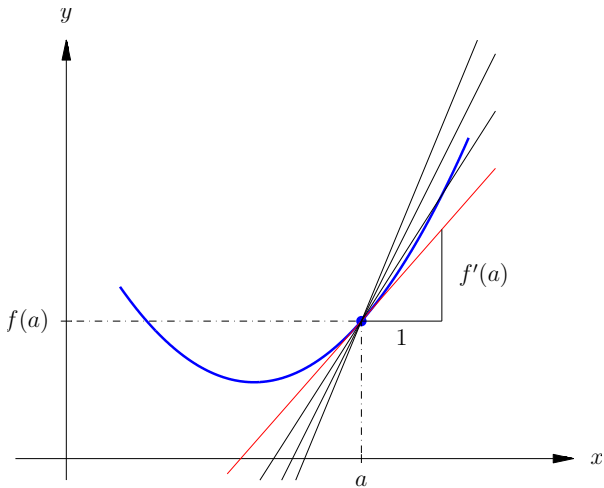
Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  mindestens einmal an.

### ■ Weierstraßscher Satz vom Maximum und Minimum

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  sein Maximum und Minimum an, d. h.

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]: f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

## Ableitung



## Differenzierbarkeit

- Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar** an der Stelle  $a \in D$ , wenn der **Differentialquotient**

$$f'(a) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert.

- Die Gerade  $g$  durch den Punkt  $(a, f(a))$  mit Steigung  $f'(a)$

$$g: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

heißt **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$ .

- Ist  $f$  differenzierbar in  $a \in D$ , so ist  $f$  stetig in  $a \in D$ .



## Ableitungsregeln

### ■ Faktorregel

$$(r f)'(x) = r f'(x) .$$

### ■ Summen-/Differenzenregel

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) .$$

### ■ Produktregel

$$(f g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) .$$

### ■ Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} .$$

## Ableitungsregeln (Forts.)

### ■ Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

### ■ Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

mit  $f(x) = y$  bzw.  $f^{-1}(y) = x$ .

## Wichtige Ableitungen

| $f(x)$       | $f'(x)$                  |  | $f(x)$                     | $f'(x)$                   |
|--------------|--------------------------|--|----------------------------|---------------------------|
| $x^a$        | $ax^{a-1}$               |  | $b^x, b > 0$               | $\ln(b) b^x$              |
| $e^x$        | $e^x$                    |  | $\ln x $                   | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin(x)$    | $\cos(x)$                |  | $\cos(x)$                  | $-\sin(x)$                |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |  | $\arccos(x)$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\tan(x)$    | $\tan^2(x) + 1$          |  | $\cot(x)$                  | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$    |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$        |  | $\operatorname{arccot}(x)$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |
| $\cosh(x)$   | $\sinh(x)$               |  | $\sinh(x)$                 | $\cosh(x)$                |

## Regel von de l'Hospital

Seien  $f$  und  $g$  differenzierbar (evtl. mit Ausnahme der Stelle  $a$ ) und  $g'(x) \neq 0$ . Ferner gelte

■

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

■ oder

$$f(x) \rightarrow \pm\infty, g(x) \rightarrow \pm\infty \text{ für } x \rightarrow a.$$

■ Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

■ Die Regel gilt entsprechend für  $x \searrow a$ ,  $x \nearrow a$  oder  $a = \pm\infty$ .

## Satz von Taylor

- Ist  $I$  ein reelles Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und (im Inneren von  $I$ )  $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für  $a, x \in I$  ein  $t$  zwischen  $a$  und  $x$  mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{T_n(f, x, a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{R_n(f, x, a)}.$$

- $T_n(f, x, a)$  (bzw. kurz  $T_n(x)$ ) heißt  $n$ -tes **Taylorpolynom** von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $a$  (in der Variablen  $x$ ).
- $R_n(f, x, a)$  ist das zugehörige **Restglied** nach Lagrange.
- Es ist  $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  für  $k = 0, \dots, n$ .

# Taylorreihe

## ■ Taylorreihe

$$T(f, x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $a$  (in der Variablen  $x$ ).

- Die Taylorreihe  $T(f, x, a)$  konvergiert genau dann gegen  $f(x)$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, a) = 0.$$



## Klausuraufgaben

- 06.09.2011 240min, Aufgabe 11
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 7
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 3 (e) und (f)
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 2
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 2
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 13
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 4
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 9 (a)
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 2

## (Un-)bestimme Integrale und Stammfunktionen

- Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem reellen Intervall  $I$ . Dann heißt  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  **Stammfunktion** von  $f$ , wenn  $F$  differenzierbar ist und

$$\forall x \in I: F'(x) = f(x).$$

- **Unbestimmtes Integral**

Falls  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion  $F$  besitzt, dann ist

$$\int f(x) dx = \{F + c: c \in \mathbb{R}\} = [F]$$

die Menge aller Stammfunktionen von  $f$ .

- Das **bestimmte Integral** gibt den (orientierten) Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse an

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

## Wichtige Stammfunktionen

| $f(x)$                   | $\int f(x) dx$                         |  | $f(x)$                   | $\int f(x) dx$               |
|--------------------------|----------------------------------------|--|--------------------------|------------------------------|
| $x^a, a \neq -1$         | $\left[ \frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]$ |  | $\frac{1}{x}$            | $[\ln  x ]$                  |
| $b^x, b > 0$             | $\left[ \frac{1}{\ln(b)} b^x \right]$  |  | $e^x$                    | $[e^x]$                      |
| $\cos(x)$                | $[\sin(x)]$                            |  | $\sin(x)$                | $[-\cos(x)]$                 |
| $\cosh(x)$               | $[\sinh(x)]$                           |  | $\sinh(x)$               | $[\cosh(x)]$                 |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}$    | $[\tan(x)]$                            |  | $\frac{1}{1+x^2}$        | $[\arctan(x)]$               |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $[\arcsin(x)]$                         |  | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $[\operatorname{arsinh}(x)]$ |

## Integrationsmethoden

### ■ Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x) dx.$$

### ■ Integration durch Substitution $y = g(x)$ (bei bestimmten Integralen)

$$\int_{x=a}^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{y=g(a)}^{g(b)} f(y) dy = [F(y)]_{y=g(a)}^{g(b)} = [F(g(x))]_{x=a}^b.$$

### ■ Lineare Substitution

$$\int f(cx + d) dx = \left[ \frac{1}{c} F(cx + d) \right].$$

### ■ Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|].$$

## Integration rationaler Funktionen

### ■ Partialbruchzerlegung ( $p, q, r$ Polynome)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{r(x)}_{\text{kann entfallen}} + \underbrace{\frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots}_{\text{reelle Nullstellen}} + \underbrace{\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta_1x + \gamma_1} + \dots}_{\text{konjugiert komplexe Nullstellen}}.$$

### ■ Bei $k$ -fachen Nullstellen $\alpha$

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}$$

und entsprechend für  $k$ -fache konjugiert komplexe Nullstellen.

- Zur Bestimmung der Konstanten  $A, B, C, \dots$  wird obige Gleichung mit  $q(x)$  durchmultipliziert (und so weit wie möglich gekürzt!).
- Die Konstanten lassen sich dann z. B. durch Einsetzen von  $x = \alpha_1 \dots$  oder Koeffizientenvergleich bestimmen.

## Stammfunktionen elementarer rationaler Funktionen ( $\beta^2 < 4\gamma$ )

$$\int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \left[ \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \arctan \left( \frac{2x + \beta}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \right) \right],$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx = \left[ \frac{2x + \beta}{(k-1)(4\gamma - \beta^2)(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} \right] + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4\gamma - \beta^2)} \int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} dx, (k > 1)$$

$$\int \frac{bx + c}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \left[ \frac{b}{2} \ln(x^2 + \beta x + \gamma) \right] + \left( c - \frac{b\beta}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

$$\int \frac{bx + c}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx = \left[ -\frac{b}{2(k-1)(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} \right] + \left( c - \frac{b\beta}{2} \right) \int \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx, (k > 1).$$

## Uneigentliche Integrale

### ■ Uneigentliches Integral

Ist  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Teilintervall  $[a, \beta] \subset [a, b)$  integrierbar, dann wird durch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

der Integralbegriff auf unendliche Intervalle ( $b = \infty$ ) und unbeschränkte Integranden ( $f(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \nearrow b$ ) erweitert, falls der Grenzwert existiert.

- Entsprechend für  $(a, b]$ .
- Für  $(a, b)$  betrachte  $(a, c]$  und  $[c, b)$  (mit  $c \in (a, b)$ ) getrennt.

## Standardbeispiele

■

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx \begin{cases} = \frac{1}{r-1}, & \text{für } r > 1, \\ \text{divergiert,} & \text{für } r \leq 1. \end{cases}$$

■

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r} dx \begin{cases} = \frac{1}{1-r}, & \text{für } r < 1, \\ \text{divergiert,} & \text{für } r \geq 1. \end{cases}$$

## Vergleichskriterium

Es sei  $\forall x \in [a, b]: 0 \leq f(x) \leq g(x)$  und es seien beide Funktionen auf allen Teilintervallen  $[a, \beta] \subset [a, b]$  integrierbar.

### ■ Majorantenkriterium

Existiert  $\int_a^b g(x) dx$ , so existiert auch  $\int_a^b f(x) dx$ , und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

### ■ Minorantenkriterium

Divergiert  $\int_a^b f(x) dx$ , so divergiert auch  $\int_a^b g(x) dx$ .



## Vergleichskriterium (Forts.)



Existiert  $\int_a^b |f(x)| dx$ , so existiert auch  $\int_a^b f(x) dx$ , und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

## Grenzwertkriterium

Es seien  $f, g$  positiv auf  $[a, b)$  und es seien beide Funktionen auf allen Teilintervallen  $[a, \beta] \subset [a, b)$  integrierbar und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

- Ist  $c > 0$ , so haben  $\int_a^b f(x) dx$  und  $\int_a^b g(x) dx$  das gleiche Konvergenzverhalten (aber evtl. unterschiedliche Werte!).
- Ist  $c = 0$ , so folgt aus der Konvergenz von  $\int_a^b g(x) dx$  die Konvergenz von  $\int_a^b f(x) dx$ .

# Integralkriterium

Es sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f: [m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-negativ und monoton fallend. Dann haben

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

und

$$\int_m^{\infty} f(x) dx$$

das gleiche Konvergenzverhalten (aber evtl. unterschiedliche Werte!).



## Klausuraufgaben

- 06.09.2011 240min, Aufgabe 14
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 13
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 6
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 4
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 11
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 5
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 4
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 6

## Funktionen mehrerer Veränderlicher

- Eine reelle **multivariate** Funktion (Funktion mehrerer Veränderlicher)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)$$

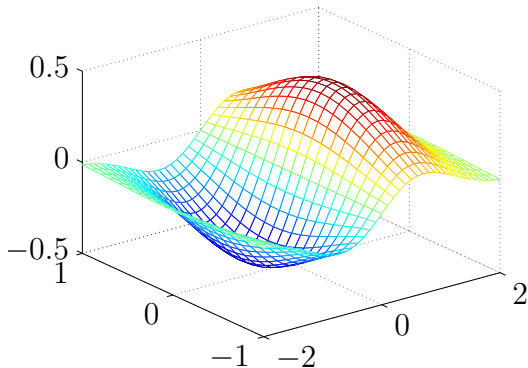
mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ordnet einem Vektor  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D$  einen Vektor

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \text{ zu.}$$

- Für  $m = 1$  heißt  $f$  **skalarwertig** (oder **Skalarfeld**).
- Für  $m > 1$  heißt  $f$  **vektorwertig** (und im Fall  $m = n$  **Vektorfeld**).
- Für  $n = 1$  (und  $f$  stetig) heißt  $f$  **Parametrisierung einer Kurve**.
- Der **Graph** von  $f$  ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^{m+n}$ .



## Graph einer multivariaten Funktion



## Stetigkeit

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **stetig** in  $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

- wenn für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  die Funktionswerte  $f(x_n)$  gegen  $f(a)$  konvergieren

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a),$$

- bzw. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D: |x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

- bzw. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \cap D \implies f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$



## Satz vom Maximum und Minimum

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  **kompakt** (d. h. abgeschlossen und beschränkt) und

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

**stetig.**

- Dann ist  $f(D)$  ebenfalls kompakt.
- Im Fall  $m = 1$  nimmt  $f$  auf  $D$  sein Maximum und Minimum an, d. h.

$$\exists x_1, x_2 \in D \quad \forall x \in D: f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

## Partielle Ableitungen und Gradient

- Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D^\circ$ . Falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_k) - f(a)}{h}$$

existiert, nennt man ihn die **partielle Ableitung**  $f_{x_k}(a)$  von  $f$  nach der  $k$ -ten Variablen  $x_k$  im Punkt  $a$  und  $f$  heißt **partiell** nach  $x_k$  **differenzierbar** im Punkt  $a$ .

- Die Abbildung  $\text{grad } f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt **Gradient** von  $f$ .

- Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von  $f$ .

## Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz

### ■ Höhere Ableitungen

$$f_{x_k x_j}(x) = (f_{x_k})_{x_j}(x).$$

### ■ Satz von Schwarz

Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  zweimal partiell differenzierbar und sind alle zweiten partiellen Ableitungen stetig ( $f \in C^2(D)$ ), so ist die Reihenfolge der Differentiation unerheblich

$$f_{x_k x_j}(x) = f_{x_j x_k}(x).$$

### ■ Multi-Index Beispiel

$$D^{(3,0,2,1)} f(x) = \frac{\partial^6}{(\partial x_1)^3 (\partial x_3)^2 \partial x_4} f(x) = f_{x_4 x_3 x_3 x_1 x_1 x_1}(x).$$

## Hesse-Matrix

Für eine Funktion  $f \in C^2(D)$  heißt die **symmetrische** Matrix

$$H f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(a) & \cdots & f_{x_1 x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(a) & \cdots & f_{x_n x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von  $f$  im Punkt  $a \in D$ .

## Richtungsableitung

- Existiert der Grenzwert

$$\partial_v f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h},$$

so nennt man ihn die **Ableitung längs  $v$**  von  $f$  im Punkt  $a$ .

- Ist  $|v| = 1$ , so nennt man ihn die **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$  im Punkt  $a$ . Diese gibt die Steigung von  $f$  in Richtung  $v$  an.
- Eigenschaften

$$\partial_{\lambda v} f(a) = \lambda \partial_v f(a),$$

$$\partial_{e_k} f(a) = f_{x_k}(a),$$

$$\partial_v f(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \text{grad } f(A) \bullet v.$$

## Satz von Taylor für mehrere Veränderliche

- Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und offen,  $a \in D$ ,  $f \in C^{k+1}(D)$ . Dann ist für  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $a + v \in D$

$$\begin{aligned}
 f(a+v) &= f(a) + \partial_v f(a) + \underbrace{\frac{1}{2!} \partial_v^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{k!} \partial_v^k f(a)}_{T_k(f, a+v, a)} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \partial_v^{k+1} f(t)}_{R_k(a, v)}
 \end{aligned}$$

mit  $t$  zwischen  $a$  und  $a + v$ .

- $T_k(f, x, a) = f(a) + \partial_{x-a} f(a) + \cdots + \frac{1}{k!} \partial_{x-a}^k f(a)$  heißt **Taylorpolynom** der Stufe  $k$  von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $a$ .
- $R_k(a, v)$  heißt das zugehörige **Restglied**.



## Taylorpolynome

- Taylorpolynom der Stufe 1 (**lineare Approximation**)

$$T_1(f, x, a) = f(a) + \text{grad } f(a) \bullet (x - a).$$

- Für  $x, a \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  ist

$$x_3 = T_1(f, x, a) = f(a) + f_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a)(x_2 - a_2)$$

die **Tangentialebene** im Punkt  $(a, f(a))$  an den Graphen von  $f$ .

- Taylorpolynom der Stufe 2

$$T_2(f, x, a) = f(a) + \text{grad } f(a) \bullet (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T H f(a) (x - a).$$

- Für  $x, a \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  ist

$$x_3 = T_2(f, x, a) = f(a) + f_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{f_{x_1 x_1}(a)}{2}(x_1 - a_1)^2 + f_{x_1 x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \frac{f_{x_2 x_2}(a)}{2}(x_2 - a_2)^2$$

die **Schmiequadrik** im Punkt  $(a, f(a))$  an den Graphen von  $f$ .

## Extrema von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

### ■ Kritische Stelle $a \in D$

$$\text{grad } f(a) = 0.$$

- ### ■ Ist die Hesse-Matrix $H f(a)$ an der kritischen Stelle $a \in D$
- **positiv definit** (d. h. alle Eigenwerte sind positiv), so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  ein **lokales Minimum**,
  - **negativ definit** (d. h. alle Eigenwerte sind negativ), so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  ein **lokales Maximum**,
  - **indefinit** (d. h. es existieren positive und negative Eigenwerte), so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  kein Extremum (**Sattelpunkt**).

## Extrema von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

### ■ Kritische Stelle $a \in D$

$$\text{grad } f(a) = 0.$$

### ■ Ist an der kritischen Stelle $a \in D$

- $\det(H f(a)) > 0$  und  $\text{Sp}(H f(a)) > 0$ , so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  ein **lokales Minimum**,
- $\det(H f(a)) > 0$  und  $\text{Sp}(H f(a)) < 0$ , so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  ein **lokales Maximum**,
- $\det(H f(a)) < 0$ , so besitzt  $f$  bei  $(a, f(a))$  kein Extremum (**Sattelpunkt**).

## Extrema mit Nebenbedingung

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f, g \in C^1(D)$ ,  $a \in D$  mit  $g(a) = 0$  und  $\text{grad } g(a) \neq 0$ .

- Ist  $(a, f(a))$  ein lokales Extremum von  $f$  unter der **Nebenbedingung**

$$g(x) = 0,$$

so gibt es  $\lambda \in \mathbb{R}$  (**Lagrange-Multiplikator**) so, dass

$$\text{grad } f(a) + \lambda \text{grad } g(a) = 0.$$

- **Hinweis:** Satz vom Maximum und Minimum liefert für stetige Funktionen  $f$  mit kompakter Nebenbedingung  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$  globale (und damit lokale) Extrema.

## Differentiation vektorwertiger Funktionen

- Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  und alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  nach jeder Variablen partiell differenzierbar. Dann heißt die  $m \times n$ -Matrix

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x)^T \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

**Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)** von  $f$  (an der Stelle  $x$ ).

- Sind alle Komponentenfunktionen  $f_k \in C^1(D)$ , so ist  $f$  **total differenzierbar**, d. h. es gilt die **lineare Approximation**

$$f(x) = f(a) + Jf(a)(x - a) + o(|x - a|).$$

- Beispiel: Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineare Abbildung mit  $f: x \mapsto Ax$ , dann ist  $f$  an jeder Stelle  $a \in \mathbb{R}^n$  total differenzierbar und

$$Jf(a) = A.$$



## Differentiationsregeln

Für  $f, g \in C^1(D)$  gilt

### ■ Produktregel

$$\text{grad}(fg)(x) = g(x) \text{grad } f(x) + f(x) \text{grad } g(x),$$

### ■ Quotientenregel

$$\text{grad} \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{g(x) \text{grad } f(x) - f(x) \text{grad } g(x)}{(g(x))^2}.$$

Sind die vektorwertigen Funktionen  $f, g$  total differenzierbar, so ist

### ■ Linearität

$$J(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha J f(x) + \beta J g(x),$$

### ■ Kettenregel

$$J(g \circ f) = J g(f(x)) J f(x).$$



## Klausuraufgaben

- 06.09.2011 240min, Aufgabe 15
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 6
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 9
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 9 (b)
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 8
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 6
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 7
- 06.09.2011 240min, Aufgabe 8
- 27.02.2012 180min, Aufgabe 7
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 4
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 7

## Potentiale

- Ein Vektorfeld  $g: \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konservativ** oder **Gradientenfeld**, wenn es eine **Potentialfunktion**  $U \in C^1(D)$  gibt mit

$$\text{grad } U = g.$$

- Ist  $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  ein Gradientenfeld, so gelten die **Integrabilitätsbedingungen**

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_k = \frac{\partial}{\partial x_k} g_j.$$

- Wenn  $D$  **einfach zusammenhängend** ist und obige **Integrabilitätsbedingungen** erfüllt sind, existiert eine Potentialfunktion  $U$  von  $g$ , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

## Divergenz und Rotation

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ .

### ■ Divergenz

$$\operatorname{div} g(x) = „\nabla \cdot g(x)“ = \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} g_n(x) = \operatorname{Sp}(J g(x)).$$

### ■ Rotation (für $n = 3$ )

$$\operatorname{rot} g(x) = „\nabla \times g(x)“ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} g_3(x) - \frac{\partial}{\partial x_3} g_2(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} g_1(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} g_3(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x) \end{pmatrix}.$$

### ■ Rotation (für $n = 2$ )

$$\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x).$$

## Laplace-Operator

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(D)$ .

### ■ Laplace-Operator

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \text{„}\nabla \cdot \nabla f(x)\text{“} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 f(x) + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x) \\ &= \text{Sp}(\text{H} f(x)).\end{aligned}$$

### ■ Ist

$$\Delta f = 0,$$

so heißt  $f$  **harmonisch**.

## Differentiationsregeln

Es sei  $f \in C^2(D)$ .

■

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f,$$

■ für  $n = 3$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

Es sei  $g \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ .

■

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0.$$

## Integrabilitätsbedingungen

Ist  $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ , so sind äquivalent

- die **Integrabilitätsbedingungen**

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_k = \frac{\partial}{\partial x_k} g_j ,$$

- die **Jacobi-Matrix**

$$Jg$$

ist **symmetrisch**,

- (für  $n = 2, 3$ )

$$\operatorname{rot} g = 0 .$$

## Parametrisierungen

- **Strecke** von  $P$  nach  $Q$  mit  $P, Q \in \mathbb{R}^n$

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto p + t(q - p).$$

- **Kreis** (im  $\mathbb{R}^2$ ) mit Mittelpunkt  $(x_M, y_M)$  und Radius  $r$  im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) + x_M \\ r \sin(t) + y_M \end{pmatrix}.$$

- **Graph** (im  $\mathbb{R}^2$ ) von  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

- **Umkehrung** des **Durchlaufungssinns** einer beliebigen Parametrisierung  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto C(t)$

$$C^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto C^*(t) = C(a + b - t).$$

## Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $C: [a, b] \rightarrow D$  regulär.

- Dann heißt

$$\int_K g(x) \bullet dx = \int_C g(x) \bullet dx = \int_a^b g(C(t)) \bullet C'(t) dt$$

**Kurvenintegral** zweiter Art oder **Arbeitsintegral** von  $g$  längs der Kurve  $K = C([a, b])$  bezüglich der Parametrisierung  $C$ .

- **Hauptsatz für Kurvenintegrale**

Ist  $g$  ein Gradientenfeld mit  $\text{grad } U = g$ , so ist das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig, also wegunabhängig

$$\int_K g(x) \bullet dx = U(C(b)) - U(C(a)).$$

## Kurvenintegrale und Potentiale

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

- Besitzt  $g$  ein Potential, so gilt für das **Umlaufintegral** jeder **geschlossenen** (stückweise) regulär parametrisierten **Kurve**  $K \subseteq D$

$$\oint_K g(x) \bullet dx = 0.$$

- Existiert eine **geschlossene** (stückweise) regulär parametrisierte **Kurve**  $K \subseteq D$  mit

$$\oint_K g(x) \bullet dx \neq 0,$$

so besitzt  $g$  kein Potential auf  $D$  (jedoch eventuell auf Teilmengen von  $D$ ).

## Kurvenintegrale von Skalarfeldern

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $C: [a, b] \rightarrow D$  regulär.

- Dann heißt

$$\int_K f(s) ds = \int_C f(s) ds = \int_a^b f(C(t)) |C'(t)| dt$$

**Kurvenintegral** erster Art von  $f$  längs der Kurve  $K = C([a, b])$  bezüglich der Parametrisierung  $C$ .

- Die Funktion  $f(x) = 1$  liefert die **Länge**  $L(K)$  der Kurve  $K$

$$L(K) = \int_K 1 ds = \int_a^b |C'(t)| dt.$$



## Klausuraufgaben

- 06.09.2011 240min, Aufgabe 9
- 04.09.2012 180min, Aufgabe 8
- 25.02.2013 180min, Aufgabe 10
- 02.09.2013 180min, Aufgabe 3
- 24.02.2014 180min, Aufgabe 7
- 22.02.2016 180min, Aufgabe 7